Равновесие Нэша

Самый популярный принцип рационального поведения в теории некооперативных игр рекомендует в качестве рациональных исходов использовать *ситуации равновесия Нэша*. Они характеризуются тем, что отклонение от данной ситуации равновесия <u>одним из игроков</u> не может увеличить его выигрыша, и, таким образом, рациональной стратегией каждого игрока должна быть реализация равновесия. Можно сказать, что ситуация называется равновесной по Нэшу, если она устойчива относительно индивидуального отклонения игроков.

Равновесие Нэша - определения

<u>Определение 1:</u> Ситуация $x^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ называется *ситуацией равновесия по Нэшу* (*в чистых стратегиях*), если для всех $x_i \in X_i$, $i \in N$ справедливо неравенство

$$K_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq K_i(x_i, x_{-i}^*).$$

<u>Определение 2:</u> Совокупность всех равновесных по Нэшу ситуаций игры называется *множеством равновесий Нэша*.

<u>Определение 3:</u> Набор смешанных стратегий $\chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*, \ldots, \chi_n^*)$ называется *ситуацией равновесия Нэша в смешанных стратегиях*, если для произвольной смешанной стратегии χ_i любого игрока $i \in N$ справедливо неравенство

$$\widetilde{K}_i(\chi_i^*, \chi_{-i}^*) \geq \widetilde{K}_i(\chi_i, \chi_{-i}^*),$$

где $\widetilde{K}_i(.)$ – результат усреднения функций выигрыша игроков по используемым ими смешанным стратегиям.

Равновесие Нэша – существование в смешанных стратегиях

Теорема 1 (Теорема Дж. Нэша). Для произвольной дискретной игры существует, по меньшей мере, одно равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Доказательство. Множество смешанных стратегий каждого игрока – непустой выпуклый компакт (ограниченное и замкнутое множество) в конечномерном пространстве.

Множество наилучших ответов игрока на произвольную обстановку:

$$R_i(\chi_{-i}) = Arg\max_{\chi_i} \widetilde{K}_i(\chi_i, \chi_{-i}).$$

это множество всех вероятностных распределений на множестве чистых стратегий – наилучших ответов на заданную обстановку.

R_i – выпуклое множество, так как оно представляет собой ограниченное линейными неравенствами подмножество выпуклого множества смешанных стратегий.

Многозначное соответствие

$$R(\chi) = (R_1(x_{-1}),\ldots, R_n(x_{-n})),$$

которое ставит в соответствие каждой ситуации множество – декартово произведение множеств стратегий – наилучших ответов каждого игрока на обстановку, заданную остальными компонентами ситуации.

Для произвольной ситуации в смешанных стратегиях χ, $R(\chi)$ является непустым, выпуклым компактом (так как является декартовым произведением непустых, выпуклых компактов).

<u>Определение 4:</u> Многозначное отображение F компакта S в себя, называется *полунепрерывным сверху*, если для любых сходящихся последовательностей $\chi^k \in S$ ($\chi^k \to \chi$), и $\rho^k \in S$ ($\rho^k \to \rho$), таких, что $\rho^k \in F(\chi^k)$, ρ принадлежит $F(\chi)$.

Отображение R полунепрерывно сверху:

Рассмотрим произвольные сходящиеся последовательности χ^k и ρ^k из определения полунепрерывности сверху.

Из того, что $\rho^k \in R(\chi^k)$ следует, что для произвольной смешанной стратегии σ_i

$$\widetilde{K}_i(\rho_i^k, \chi_{-i}^k) \geq \widetilde{K}_i(\sigma_i, \chi_{-i}^k) .$$

Функция ожидаемого выигрыша непрерывна по совокупности переменных, поэтому

$$\widetilde{K}_i(\rho_i, \chi_{-i}) \geq \widetilde{K}_i(\sigma_i, \chi_{-i}),$$

то есть $\rho \in R(\chi)$.

Теорема 2 (теорема Какутани о неподвижной точке). Пусть S есть непустой, выпуклый компакт конечномерного пространства. Если F – полунепрерывное сверху многозначное соответствие, которое ставит в соответствие каждой точке S непустое выпуклое подмножество S, то существует такой $\chi^* \in S$, что $\chi^* \in F(\chi^*)$.

По теореме Какутани, существует неподвижная точка – ситуация χ^*, такая, что $\chi^* \in R(\chi^*)$. Значит, для всех игроков

$$\widetilde{K}_i(\chi_i^*, \chi_{-i}^*) \geq \widetilde{K}_i(\chi_i, \chi_{-i}^*),$$

где χ_i – произвольная смешанная стратегия. То есть χ^* – это равновесие Нэша. •

Теорема 3. Если множества стратегий игроков компактны, а функции выигрыша непрерывны по совокупности переменных (чистых стратегий игроков), то в игре существует, по крайней мере, одно равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Равновесие Нэша – существование в чистых стратегиях

Теорема 4. Если в непрерывной игре множества стратегий X_i – выпуклые подмножества линейных метрических пространств, для каждого игрока i функция выигрыша K_i непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной x_i, то в этой игре существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.

Доказательство. Ранее была доказана теорема о том, что наилучший ответ всегда достигается на чистых стратегиях. Теперь необходимо показать, что следствием вогнутости целевых функций является единственность наилучшего ответа. Это будет означать, что наилучшим ответом может быть только чистая стратегия. Тогда и равновесие Нэша будет состоять только из чистых стратегий.

Множество чистых стратегий, которые являются наилучшими ответами на обстановку χ_{-i}:

$$X_i^*(\chi_{-i}) = Arg\max_{x_i} K_i(x_i, \chi_{-i})$$

Пусть имеются два наилучших ответа – $x_i^* \in X_i^*$ и $x_i^{**} \in X_i^*$.

Так как оба они являются лучшими ответами на обстановку χ_{-i}, значит $K_i(x_i^*, \chi_{-i}) = K_i(x_i^{**}, \chi_{-i})$, то есть

$$M := \int_{X_{-i}} K_i(x_i^*, x_{-i})\chi_{-i}(x_{-i})dx_{-i} = \int_{X_{-i}} K_i(x_i^{**}, x_{-i})\chi_{-i}(x_{-i})dx_{-i}.$$

Рассмотрим стратегию $\tilde{x}_i = \alpha x_i^* + (1-\alpha)x_i^{**}$, где $\alpha \in (0,1)$.

В силу выпуклости X_i, $\tilde{x}_i \in X_i$.

Ожидаемая полезность от применения этой стратегии:

$$K_i(\widetilde{x}_i, \chi_{-i}) = \int\limits_{X_{-i}} K_i(\widetilde{x}_i, x_{-i}) \chi_{-i}(x_{-i}) dx_{-i} =$$

$$\int\limits_{X_{-i}} K_i(\alpha x_i^* + (1-\alpha) x_i^{**}, x_{-i}) \chi_{-i}(x_{-i}) dx_{-i}.$$

В силу строгой вогнутости целевой функции K_i, имеем

$$K_i(\widetilde{x}_i, \chi_{-i}) > \alpha \int\limits_{X_{-i}} K_i(x_i^*, x_{-i}) \chi_{-i}(x_{-i}) dx_{-i} +$$

$$+ (1-\alpha) \int\limits_{X_{-i}} K_i(x_i^{**}, x_{-i}) \chi_{-i}(x_{-i}) dx_{-i}.$$

Следовательно, $K_i(\widetilde{x}_i, \chi_{-i}) > \alpha M + (1-\alpha) M = M$, что невозможно, так как M – это максимальный ожидаемый выигрыш.

Таким образом, наилучший ответ всегда один, а, значит, и равновесие Нэша будет равновесием в чистых стратегиях. •

Вычисление равновесий Нэша

бесконечные игры

Чтобы для конкретной игры вычислить равновесие Нэша в чистых стратегиях, необходимо проверить наличие собственного значения оператора R и, что оно равно 1.

Оператор R – отображение произвольной игровой ситуации на совокупность лучших ответов игроков на задаваемую для них этой ситуацией обстановку. Таким образом, для бесконечных игр, задача сводится к нахождению вида этого оператора и решения уравнения

$$x^* = R(x^*).$$

Пример. Вычисление равновесий Нэша для игры «Фермеры на общем поле».

Целевые функции игроков в этой игре $K_i = x_i(120 - x_1 - x_2)$.

Наилучший ответ игрока при фиксированном поведении противника $x_i^* = R_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i} K_i(x_i, x_{-i})$.

$$\frac{\partial K_i(x_i, x_{-i})}{\partial x_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_i = 60 - \frac{x_{-i}}{2}, \ i = 1, 2.$$

Система уравнений $\begin{cases} x_1 = 60 - x_2 / 2 \\ x_2 = 60 - x_1 / 2 \end{cases}$,

решением которой является пара стратегий $x_1 = x_2 = 40$,

приводящих к выигрышам $K_1 = K_2 = 1600$.

При условии безусловного сотрудничества игроков, то есть в случае объединения их выигрышей и выбора стратегий из условия максимизации нового критерия

$$K = K_1(x_1, x_2) + K_2(x_1, x_2),$$

стратегии игроков были бы $x_1 = x_2 = 30$.

При этом $K = 3600$, то есть при распределении выигрыша поровну на долю каждого из игроков достается по 1800 единиц, что больше, чем при конкуренции. Эта оптимальная по Парето ситуация, не является, однако, равновесной, так как неустойчива по односторонним отклонениям игроков от оптимальной по Парето стратегии. •

Система $x^* = R(x^*)$ может давать несколько решений, и все они будут равновесиями Нэша.

Кроме того, уравнения системы могут оказаться зависимыми. Это значит, что равновесий Нэша в этой игре бесконечное множество.

Например, для игры двух лиц с функциями выигрыша

$$K_i = 1(x_1 + x_2 - c) - x_i ,$$

где

$$1(x) := \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}, \quad x_1, x_2, c \in [0, 1],$$

множество равновесных ситуаций описывается равенством

$$x_1 + x_2 = c .$$

Такая ситуация характерна в основном для игр с разрывной функцией выигрыша

Вычисление равновесий Нэша

дискретные игры, смешанные стратегии

Вычисление равновесий Нэша в смешанных стратегиях для дискретных игр сводятся к той же программе действий. Она может быть легко проиллюстрирована для биматричной игры, в которой каждый игрок имеет две стратегии.

Пример «Нахождение равновесий Нэша в смешанных стратегиях в игре «Семейный спор».

Пусть матрица выигрышей имеет вид $\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 3,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,3 \end{pmatrix} \end{array}$.

Смешанная стратегия первого игрока определяется одним числом p – вероятностью выбора им первой стратегии, смешанная стратегия второго, соответственно, числом q.

Выигрыш первого игрока:

$$K_1(x_1, qx_2 + (1-q)y_2) = 3q,$$

$$K_1(y_1, qx_2 + (1-q)y_2) = 1-q.$$

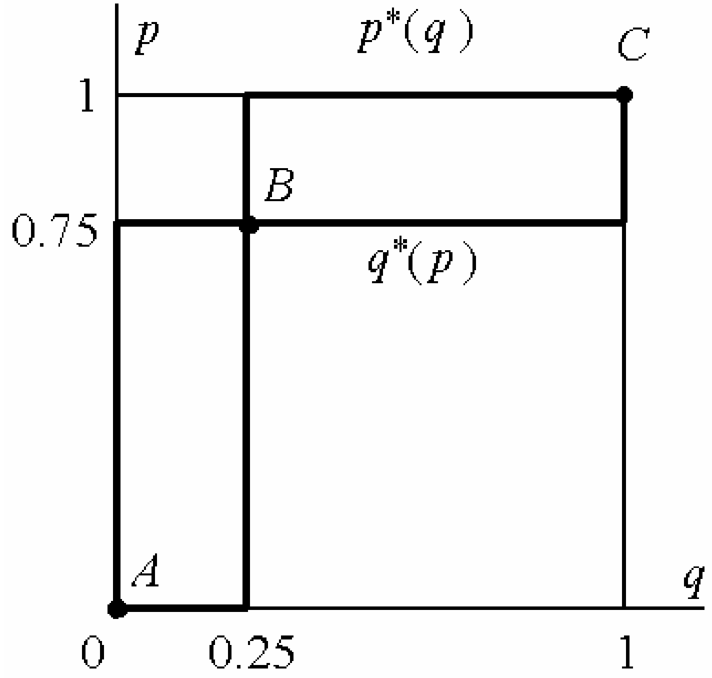
Таким образом, при $q < 0.25$, наилучшим ответом первого игрока является стратегия y_1, при $q > 0.25$ – стратегия x_1. При $q = 0.25$ обе стратегии равнозначны с точки зрения ожидаемого выигрыша.

То есть наилучший ответ первого игрока:

$$p^*(q) = \begin{cases} 0, & q < 0.25 \\ 1, & q > 0.25 \\ [0,1], & q = 0.25 \end{cases}.$$

Аналогично, наилучший ответ второго игрока:

$$q^*(p) = \begin{cases} 0, & p < 0.75 \\ 1, & p > 0.75 \\ [0,1], & p = 0.75 \end{cases}.$$



Точки *A*, *B*, *C* пересечения ломаных линий на рисунке и будут соответствовать трем равновесиям Нэша этой игры:

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2), (0.75\, x_1 + 0.25\, y_1, 0.25\, x_2 + 0.75\, y_2).$$

Сильное равновесие Нэша

Введение понятия сильного равновесия можно считать попыткой объединения концепций равновесия Нэша и равновесия Парето.

Определение 5: Для игры n лиц обозначим множество игроков через $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Любое непустое подмножество S данного множества, включая и само N, называется *коалицией*.

Для игры n лиц возможны 2^n–1 коалиций.

Множество всех возможных коалиций - 2^N.

Ситуация, в которой игроки, не входящие в коалицию $S \subset N$, используют стратегии x_i^* $(i \in N \setminus S)$ а игроки из S используют стратегии x_j $(j \in S)$ –

$$(x_{-S}^*, x_S)$$

Определение 6: Ситуация x^* называется *сильно равновесной по Нэшу*, если для любых коалиций $S \subset N$ и любых $x_S \in \prod_{i \in S} X_i$ найдется участник коалиции $i \in S$, такой, что

$$K_i(x^*) > K_i(x^*_{-S}, x_S).$$

Довольно просто показать, что все сильные равновесия, если они существуют, оптимальны по Парето.

Тем не менее, при всех привлекательных чертах сильного равновесия Нэша, его использование ограничено тем, что даже в смешанных стратегиях оно существует не во всех играх.

«Параметрическое» равновесие Нэша

Для того чтобы вычислить равновесие Нэша, исследователь игры должен точно знать функции выигрыша игроков. В задачах управления, однако, часто встречается ситуация, когда на момент исследования игры функции выигрыша известны исследователю игры не полностью. Эта ситуация характерна для механизмов управления с сообщением информации.

Неточную информацию о функциях выигрыша игроков принято описывать с помощью понятия *типа игрока*. Рассмотрим следующую игру n лиц, в которой каждый из игроков имеет некоторый тип $r_i \in \Omega_i$ из множества Ω_i возможных типов данного игрока i. Будем считать, что все множества типов Ω_i компактны, $i \in N$. Функции выигрыша игроков $K_i = K_i(x_1,\ldots x_n, r_1,\ldots,r_n)$ зависят как от действий $x_i \in X_i$ всех игроков, так и от их типов $r_i \in \Omega_i$, $i \in N$.

Определение 1: *Профилем типов игроков* называется вектор $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Omega = \prod_{i \in N} \Omega_i$.

Определение 2: Набор функций $x^*(r) = (x_1^*(r), \ldots, x_n^*(r))$ будем называть *равновесием Нэша* (*в чистых стратегиях*) *в игре с параметрически заданными функциями выигрыша*, если для каждого фиксированного профиля r типов игроков для каждого игрока $i \in N$ и для всех его стратегий $x_i \in X_i$, справедливо неравенство

$$K_i(x^*(r), r) \geq K_i(x_i, x_{-i}^*(r), r).$$

Пример. «Простая задача распределения ресурса».

Рассмотрим организационную систему, состоящую из центра и двух агентов (игроков). Центру распределяет между игроками ресурс, для чего собирает от них заявки $s_i \in [0; 1]$ ($i = 1, 2$) и выдает каждому игроку ресурс по формуле

$$x_i = s_i - \frac{s_1 + s_2}{4}.$$

Игроки имеют типы $r_i \in [0; 1]$. Функции выигрыша игроков зависят от полученного ими ресурса и типа следующим образом:

$$K_i = 2x_i - \frac{x_i^2}{r_i}.$$

Параметр $r_i \in [0; 1]$ Центр не знает типы $\{r_i\}$ игроков.

Стратегиями игроков в этой игре являются их заявки s_i на ресурс. Можно выразить функции выигрыша через стратегии, получив игру в нормальной форме. В этой игре функции выигрыша игроков зависят не только от их стратегий, но и от типов r_i.

Задача исследователя заключается в том, чтобы предсказать, насколько это возможно, равновесные заявки игроков.

Можно показать, что в зависимости от типов r_1 и r_2 игроков равновесие Нэша в этой игре будет задаваться заявками

$$(s_1^*(.), s_2^*(.)) = \begin{cases} (1.5r_1 + 0.5r_2,\ 0.5r_1 + 1.5r_2); & 3r_1 + r_2 \le 2,\ r_1 + 3r_2 \le 2 \\ (4r_1/3 + 0.25,\ 1); & 3r_1 + r_2 > 2,\ r_1 \le 1/2 \\ (1,\ 4r_2/3 + 0.25); & r_1 + 3r_2 > 2,\ r_2 \le 1/2 \\ (1,\ 1); & r_1 > 1/2,\ r_2 > 1/2 \end{cases}.$$

Однако полученный результат можно использовать и другим способом. Пусть исследователю известна та же информация, что и центру. Пусть игра разыграна один раз, и центр получил от игроков заявки (s_1, s_2). Тогда, зная параметрическое равновесие, центр может узнать типы игроков.

Например, если обе заявки меньше 1, центр может определить типы игроков по формуле:

$$r_1 = 0.75\, s_1 - 0.25\, s_2,\ \ r_2 = 0.75\, s_2 - 0.25\, s_1.$$

Если обе заявки равны 1, центр может сделать вывод, что типы обоих игроков превышают 0.5. Аналогично можно восстановить типы и для случаев, когда лишь одна из заявок равна 1. Таким образом, по результатам игры центр (а, значит, и исследователь) может с той или иной точностью восстановить типы игроков. •

Сравнение концепций решения