Пороговые модели коллективного поведения

Бреер В.В. (ИПУ РАН)

30.10.2013

План лекции

- Коллективное поведение, описанное:
  - Философией
  - Психологией
  - Культурологией
  - Экспериментальной психологией
- Конформное поведение:
  - Определение в психологии
  - Положительные и отрицательные роли

План лекции

- Методы исследования коллективного поведения:
  – Архетип и микро-изменения
  – Классификация математических моделей
- Первые модели конформного поведения:
  – Модель Шеллинга
  – Модель Грановеттера

План лекции

- Развитие и обобщение моделей:
  - Теоретико-игровая модель конформистов и анти-конформистов
  - Анонимное поведение
  - Переход к бесконечному числу агентов. Флуктуации. Время выхода из области.
  - «Гамильтониан» социальной сети. Равновесное распределение Гиббса.
  - Модель управления толпой.
  - Учет структуры социальной сети. Идентификация модели.

Коллективное поведение

- Каковы основные механизмы формирования коллективного поведения?
- Почему изолированные индивиды становятся коллективом?
- Каковы положительные и отрицательные стороны согласованных действий в коллективе?

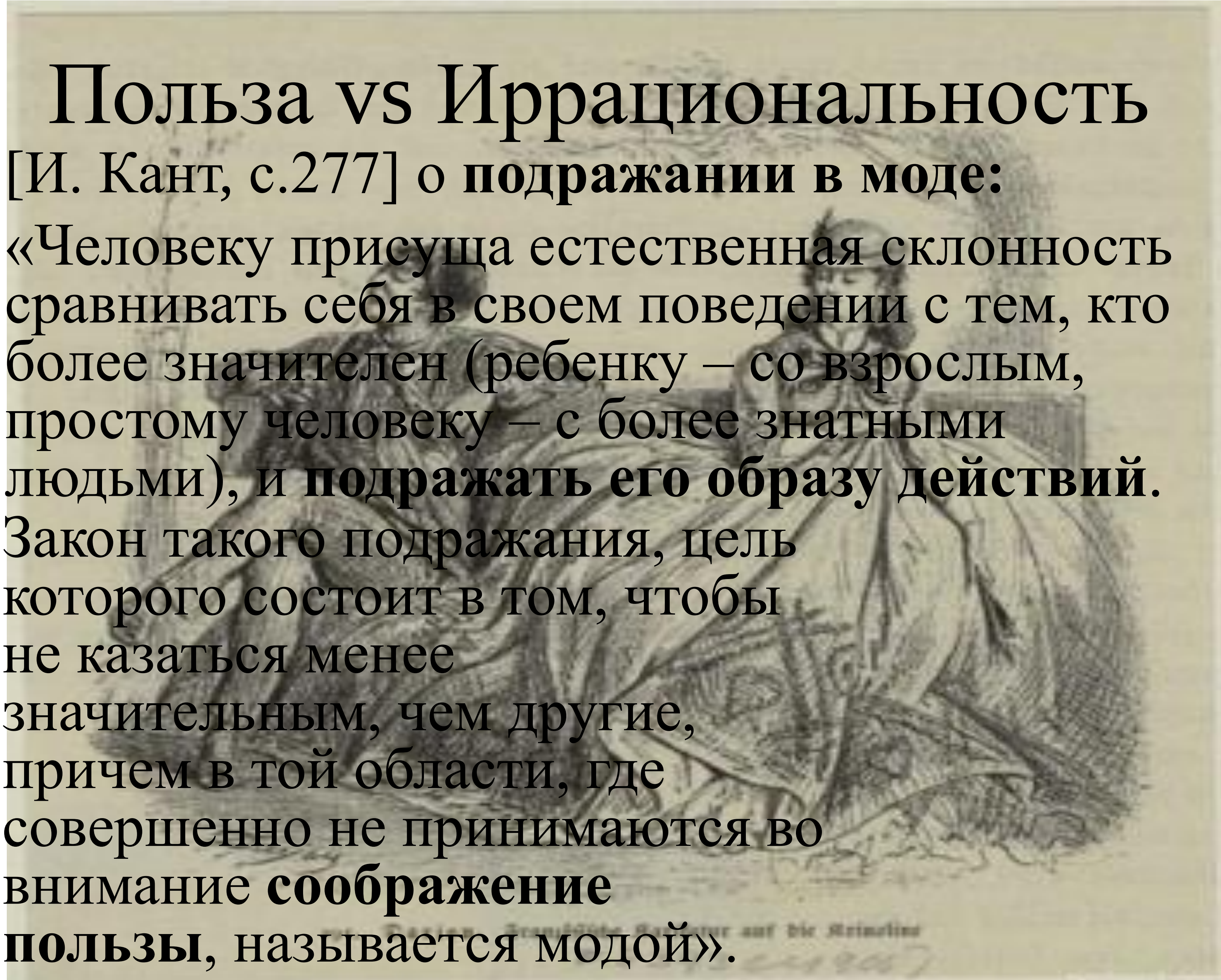
Пороговое поведение

При выборе индивида быть или не быть в коллективе (вести себя как остальные) внутри него борются два фактора: **индивидуальный** и **социальный**. В результате сравнения выгод (экономически рациональных или иррациональных), которые приносит то или иное поведение, он делает выбор.

Польза vs Иррациональность

[И. Кант, с.277] о **подражании в моде:**

«Человеку присуща естественная склонность сравнивать себя в своем поведении с тем, кто более значителен (ребенку – со взрослым, простому человеку – с более знатными людьми), и **подражать его образу действий**. Закон такого подражания, цель которого состоит в том, чтобы не казаться менее значительным, чем другие, причем в той области, где совершенно не принимаются во внимание **соображение пользы**, называется модой».



Польза vs Иррациональность

[И. Кант, с.277] о **подражании в моде:**

«Человеку присуща естественная склонность сравнивать себя в своем поведении с тем, кто более значителен (ребенку – со взрослым, простому человеку – с более знатными людьми), и **подражать его образу действий**. Закон такого подражания, цель которого состоит в том, чтобы не казаться менее значительным, чем другие, причем в той области, где совершенно не принимаются во внимание **соображение пользы**, называется модой».

Польза vs Иррациональность

[И. Кант, с.277] о **подражании в моде:**

«Человеку присуща естественная склонность сравнивать себя в своем поведении с тем, кто более значителен (ребенку – со взрослым, простому человеку – с более знатными людьми), и **подражать его образу действий**. Закон такого подражания, цель которого состоит в том, чтобы не казаться менее значительным, чем другие, причем в той области, где совершенно не принимаются во внимание **соображение пользы**, называется модой».

Общество vs Одиночество

[Ф. Ницше, с. 84]: афоризм «Страх перед одиночеством»

«Упреки совести и у самого совестливого человека слабы по сравнению с чувством: “вот это и вон то противно хорошему тону твоего общества”. Даже сильнейший все еще боится холодного взгляда, искривленного гримасой рта, со стороны тех, среди которых и для которых он воспитан. Чего же тут, собственно, бояться? **Одиночества!** – этого аргумента, перед которым отступают даже наилучшие аргументы в пользу какой-нибудь личности или дела! – Так вещает в нас *стадный инстинкт*.»

Идентификация vs Имитация

«**Имитация** есть необходимое вспомогательное средство для развивающейся, еще юной личности. Она способствует развитию до тех пор, пока не служит для простого удобства и не задерживает развития подходящего индивидуального метода. Подобно этому и **идентификация** может содействовать развитию, пока индивидуальный путь еще не проложен. ...

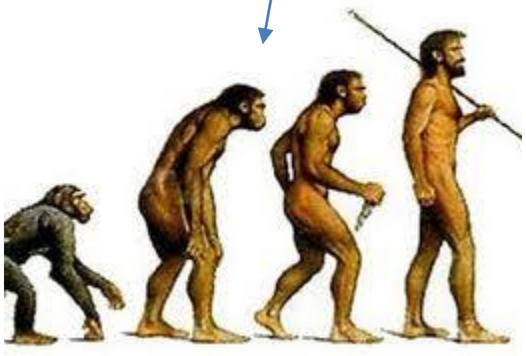
субъект под их влиянием расщепляется **на две частичные личности**, чуждые одна другой»,
[К. Г. Юнг, с. 586].

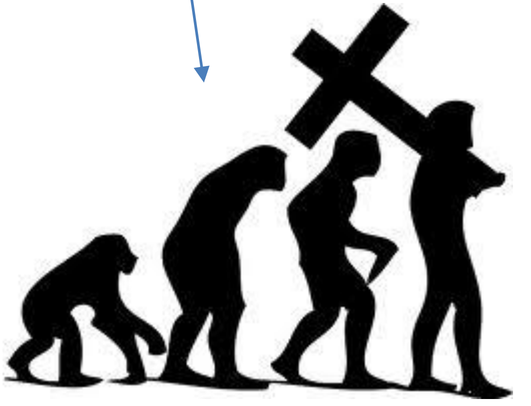
Идентификация vs Имитация

«**Имитация** есть необходимое вспомогательное средство для развивающейся, еще юной личности. Она способствует развитию до тех пор, пока не служит для простого удобства и не задерживает развития подходящего индивидуального метода. Подобно этому и **идентификация** может содействовать развитию, пока индивидуальный путь еще не проложен. ...

субъект под их влиянием расщепляется **на две частичные личности**, чуждые одна другой»,
[К. Г. Юнг, с. 586].

Историческое vs Мифическое мышление





[Элиаде М., с. 46] об осознании в архаических культурах:

«… человек традиционных культур представлял себя реальным лишь в той мере, в какой он переставал быть самим собой (с точки зрения современного наблюдателя), довольствуясь **имитацией** и **повторением** кого-то другого. Иными словами, он признавал себя реальным, «действительно самим собой» именно в той мере, в какой переставал им быть».

Конформизм и конформность

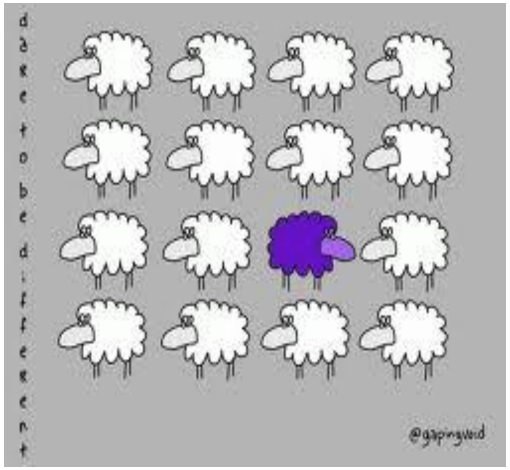
«**Конформизм** (от conformis, подобный, сообразный), морально-политический термин, обозначающий приспособленчество, пассивное принятие существующего порядка вещей, господствующих мнений и т. д. Конформизм означает отсутствие собственной позиции, беспринципное и некритическое следование любому образцу, обладающему наибольшей силой давления (мнение большинства, признанный авторитет, традиция и т. п.).» [БСЭ].

В бытовом использовании термин «конформизм» имеет, чаще всего, отрицательную окраску, акцентирующую внимание на негативной роли этого явления. Из-за образующейся ложной дилеммы нонконформизму часто приписывают отсутствие негативных качеств, присущих конформизму, и положительные качества, отсутствующие у конформизма. Чтобы избежать этих критических оценок, в дальнейшем будем использовать нейтральный термин – ***конформность.***

Конформность (Conformity)

«Конформностью будем называть такое явление, возникающее в процессе взаимодействия в социальной группе, когда поведение ее члена – агента – подвергается влиянию со стороны других членов группы (социальному давлению), и этот агент полностью или частично подчиняется этому влиянию.

Частным случаем конформности является негативизм – поведение, когда агент, подвергаясь воздействию со стороны других членов группы, всегда действует вопреки им. Негативизм можно рассматривать, как «конформность наоборот». [Кон И.С.].



Положительная роль конформности

Положительная роль конформности состоит в следующем:

- формируется **единство в кризисных ситуациях**, что позволяет, например, организации выжить в сложных условиях;
- упрощается **организация совместной деятельности** за счет отсутствия размышлений по поводу поведения в стандартных обстоятельствах и получения инструкций по поведению в нестандартных обстоятельствах;
- уменьшается **время адаптации** человека в коллективе;
- группа приобретает **единое лицо**.

Отрицательная роль конформности

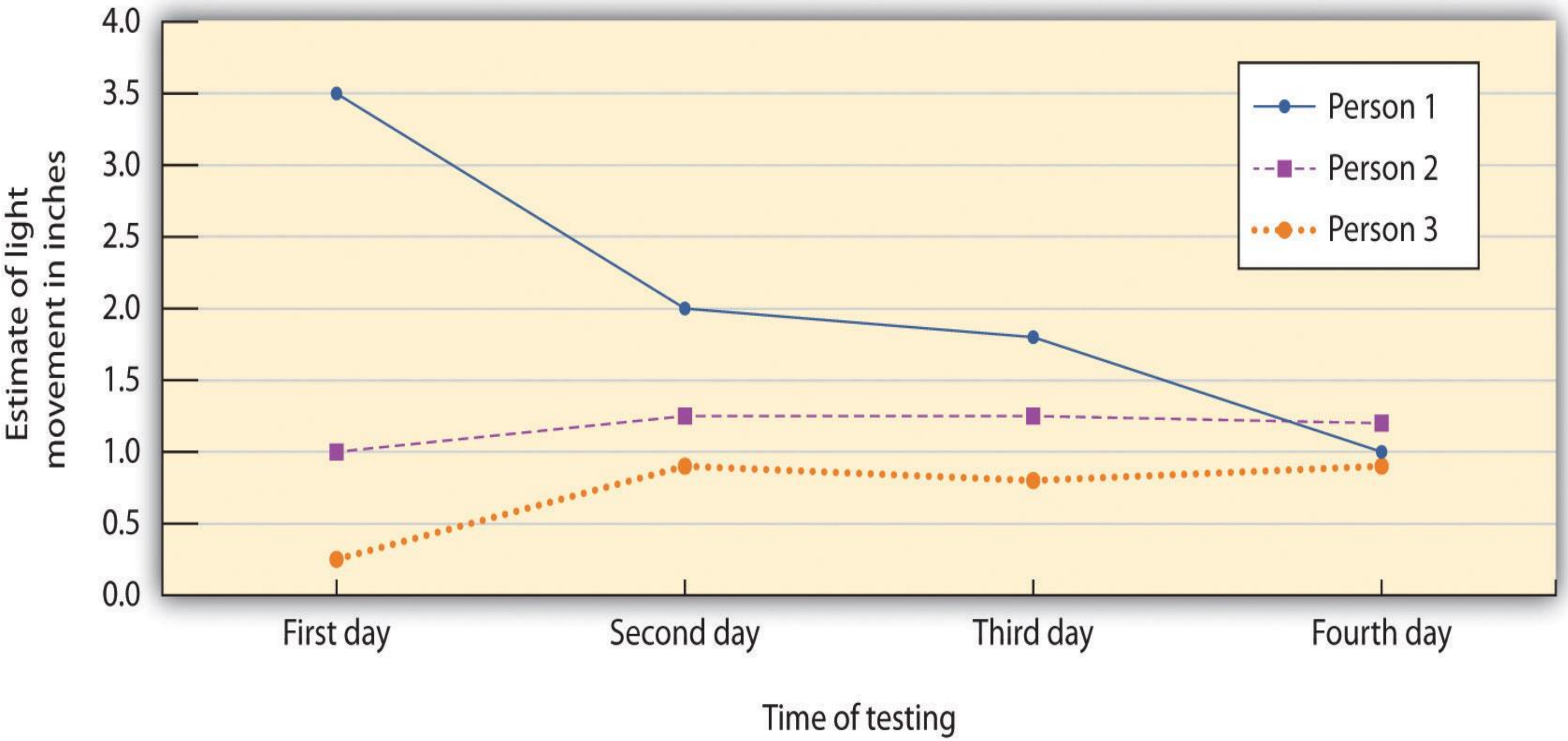
В отрицательном смысле (беспринципность, приспособленчество) конформность

- снижает **способность самостоятельно ориентироваться** в новых и непривычных условиях;
- притупляет **критичность восприятия** окружающей реальности;
- способствует **некритичной подмене** индивидуальных морально-этических норм социальными;
- способствует **развитию предрассудков и предубеждений** против меньшинств;
- снижает **способность к** оригинальным и творческим **идеям**.

Условия проявления конформности

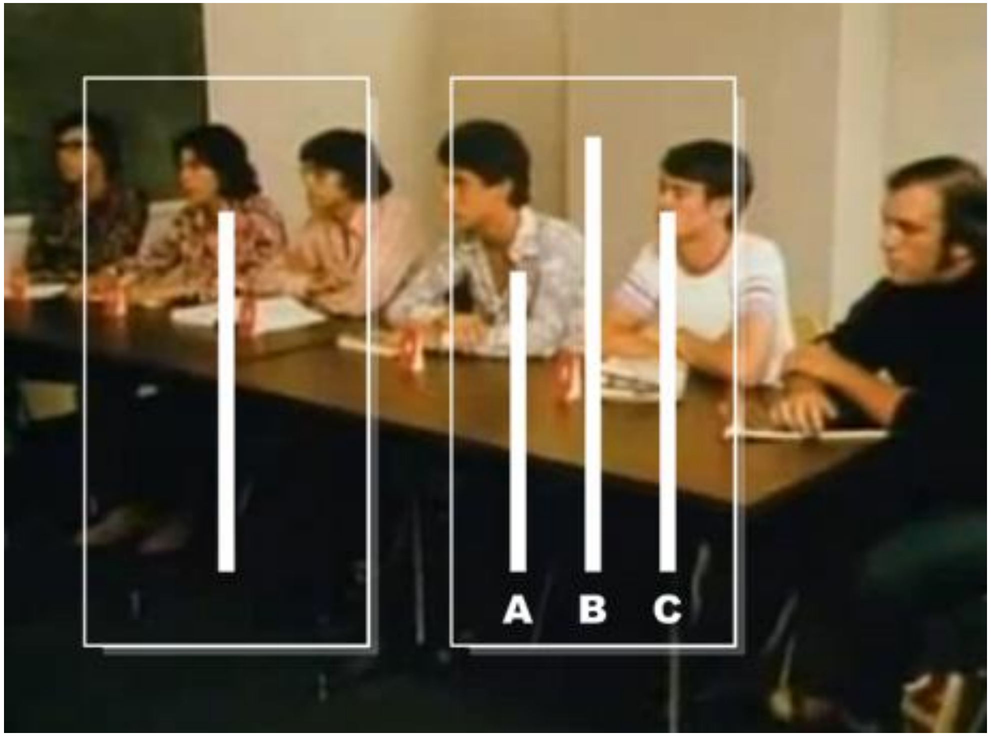
- Конформность имеет место, как в малых группах, так и в обществе в целом.
- Она может проявляться, как подсознательно, так и непосредственно с помощью социального давления
- или добровольно (см. например игру [гл.12-V, Дж. М. Кейнс]).
- Конформность проявляется и в случае присутствия окружающих, и тогда, когда другие люди фактически не присутствуют.

Опыт М. Шерифа, [Sherif 1936]



Участники помещаются в темную комнату, и им предлагается вглядываться в светлое пятно на расстоянии около 5 метров. Далее их спрашивают оценить расстояние, на которое перемещалось пятно.

Опыт С. Эша [Ash S. 1955, 1956]



97 % индивидуально испытуемых говорят правильно. В группе уровень конформности оказывается очень высоким – количество неправильных ответов у испытуемых возрастает в 10 раз до 32 %.

Архетип vs Микро-изменения

- Ранние социологические и психологические работы (см., например, [ЛЕБОН Г., Юнг К. Г.]) содержали утверждения о том, что массовое поведение больших социальных групп регулируется неким общим **фундаментальным подсознанием** (или массовым сознанием). У Юнга, например, этими функциями обладал так называемый «архетип».
- Но эта теория не нашла применения в построении моделей массового поведения и на сегодняшний день общими задачами социальных наук являются видимые изменения в социальных явлениях, которые возникают **без участия явных фундаментальных для этих явлений причин**.
- Чтобы описать подобного рода явления необходимо учитывать мелкие изменения в переменных поведения большого количества агентов. Эти **микро-изменения** в конечном итоге приводят к **макро-эффектам** в социальных явлениях.

Модели социального взаимодействия

Модели, описывающие переход от микро к макро эффектам, называются ***моделями социального взаимодействия*** (***models of social interactions***). В этих моделях поведение агента зависит, наряду с другими факторами, от выбора других агентов в социальной группе. Макро-эффект происходит тогда, когда больше агентов придерживаются одного выбора.

Модели социального взаимодействия нашли отражение в обширной литературе:

- превалирующее распространение сегрегации [SCHELLING T. 1971, 1972, 1973, 1978], участие в протестах [GRANOVETTER M. 1978], принятие религиозных предпочтений [BECKER G. 2001], бизнес циклы [COOPER J. 1988], экономический рост [DURLAUF S.N. 2001], изменение уровня преступности [GLAESER E. 1996], принятие новых технологий [ELLISON G. 1993], флуктуации цен на финансовых рынках [FOLLMER H. 2004, HORST U. 2005].

Модели конформного поведения

В рамках моделей социального взаимодействия рассматривается **конформное поведение (conformity)** [38].

Работы по *моделям конформности* [BERNHEIM D. 1994, AKERLOF G. 1970, JONES S. 1984] основываются на том, что индивидуальное поведение во многом мотивируется так называемыми социальными факторами, такими как желание престижа, уважения, популярности или желание быть принятым в различные социальные группы.

Социологические, психологические и антропологические исследования подтверждают тот факт, что эти факторы широко распространены и приводят к конформизму.

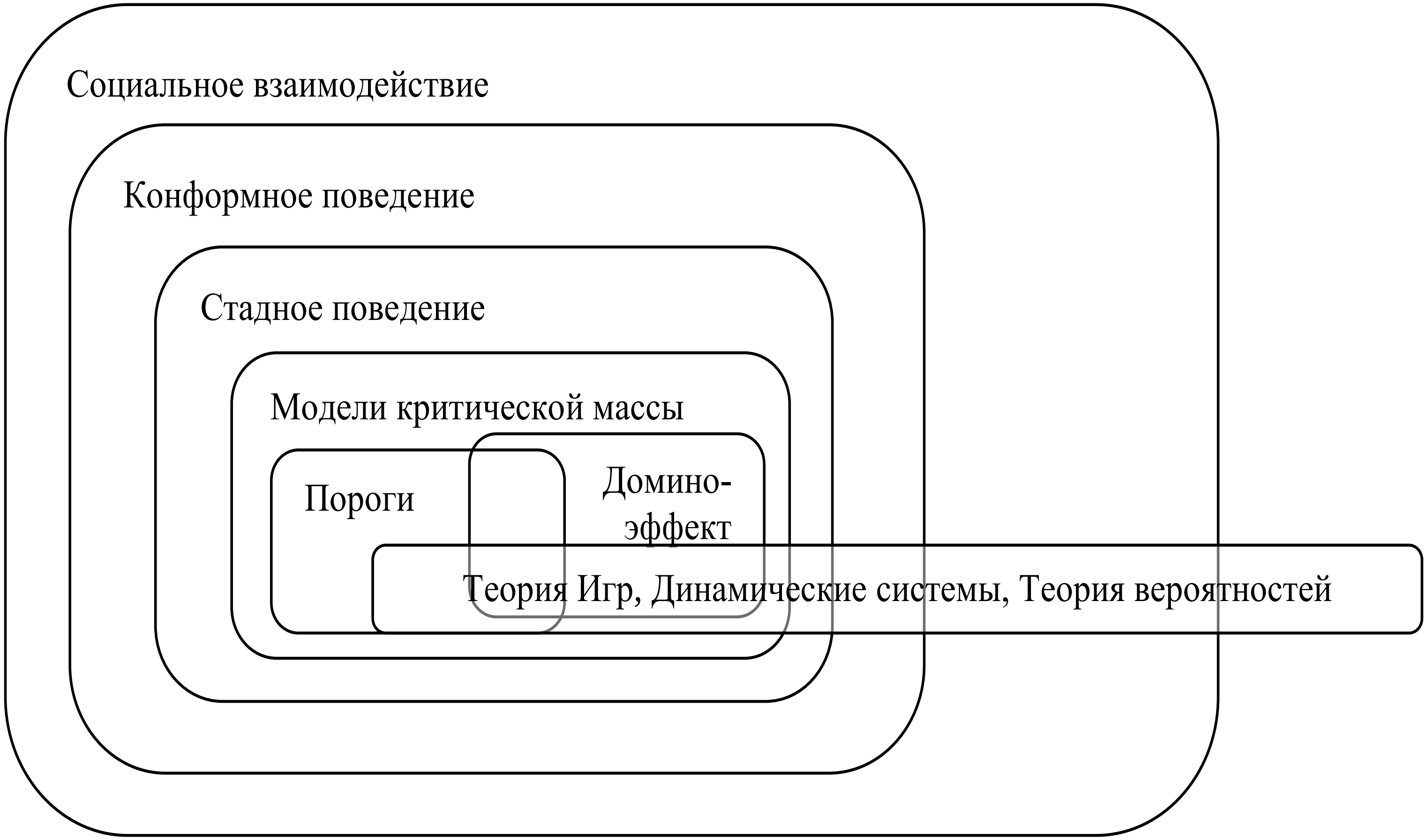
Модели критической массы

Одним из направлений исследования конформности являются ***модели критической массы***. Эти модели характеризуются следующими признаками:

- Агенты осуществляют **дискретный** или **бинарный** выбор;
- Агенты **однородны** в своих предпочтениях.
- **Функция полезности** агента возрастает с увеличением доли других агентов (его окружения), сделавших такой же выбор.

Такие термины, как «критическая масса», «эпидемии» и «инфекции», происходят от моделей в физике и эпидемиологии, сходных между собой.

Классификация моделей социального взаимодействия



Пороговые модели Шеллинга

В работах [SCHELLING T. 1971, 1972], содержащих анализ расовой сегрегации, развиваются две пороговые модели:

- ***Модель пространственного соседства*** (SPATIAL PROXIMITY MODEL)
- ***Модель ограниченного окружения*** (BOUNDED-NEIGHBORHOOD MODEL).

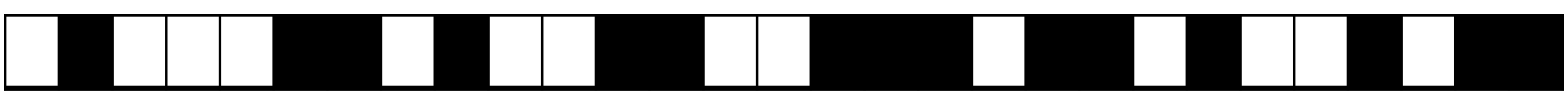
В этих моделях рассматривается выбор района проживания семей с определенной расовой принадлежностью и различными предпочтениями по отношению к своему окружению.

Модель пространственного соседства. Состав модели

Рассматривается поведение двух групп агентов, которые различаются по одному из следующих признаков: раса, пол, возраст, доход, язык, религия, цвет кожи и т.п.

Агенты, в зависимости от личных предпочтений могут **жить в окружении агентов противоположной группы или перемешаться в то место**, где агенты своей группы представлены в большей пропорции.

В начальный момент времени агенты распределены на прямой по определенному случайному закону.



Модель пространственного соседства. Функционирование

Агент может перемещаться по прямой (или плоскости), выбирая место, удовлетворяющее критерию минимальной доли соседей с таким же признаком.

Агенты перемещаются последовательно друг за другом.

При покидании своего места, его соседи смыкаются, при появлении на новом месте, соседи раздвигаются. На плоскости закон перемещения усложнен.

Модель пространственного соседства. Основные параметры

Выделяются пять элементов, от которых зависит динамика:

- **размер** значимого для агента окружения соседями
- **минимальная доля** соседей с таким же признаком
- **общее соотношение** белых и черных агентов,
- правила перемещения
- **начальное распределение** агентов вдоль прямой (или на плоскости).

Модель пространственного соседства. Основные результаты

- Исследование модели производится путем имитационного моделирования. Шеллинг отмечает, что в рамках модели с минимальным процентом соседей с таким же признаком, равным 5/9 существует равновесие, которое может быт графически изображено в виде кластеров. Таких «равновесий» много и они представляют собой структуру с регулярным переменным составом в 2, 5 и более агентов с одинаковым признаком.
- Если уменьшить *размер значимого для агента окружения соседями*, то структура равновесия остается такой же – регулярные кластеры из определенного количества агентов. При изменении *общего соотношения белых и черных агентов* в равновесии, вместо чередующихся кластеров возникает сегрегация, т.е. агенты с миноритарным качеством образуют либо малое число кластеров, либо один большой кластер. При ограничении расстояния, на которое могут агенты перемещаться (*изменение правила перемещения*), число кластеров возрастает, а их размер, соответственно, убывает.

Модель ограниченного окружения. Состав модели.

В отличие от предыдущей, в этой модели окружение имеет другой смысл.

Здесь окружение не привязано к конкретному месту, а скорее к сообществу, в котором агенту комфортно находится.

Рассматривается поведение двух групп агентов, которые различаются по одному из признаков, аналогичных модели пространственного соседства.

Агент определенной группы (например, белый) может находиться в окружении, где доля агентов противоположной группы (черных) не превышает его **верхнего уровня толерантности** – характерного для этого агента порога.

Модель ограниченного окружения. Функционирование.

Если доля агентов противоположной группы не превышает **порога данного агента**, то последний продолжает находиться в этом окружении, иначе он его покидает. При благоприятных для себя обстоятельствах агент может вернуться в это окружение обратно.

Агент имеет **двоичный выбор** в отличие от предыдущей модели, где стратегия представляла собой перемещение вдоль прямой или на плоскости.

Модель ограниченного окружения. Параметры модели.

Объектом исследования является функции распределения *порогов толерантности* агентов разных типов. В зависимости от начальных условий и вида кривых распределения исследуется динамика процесса перехода данного окружения в состояние равновесия, при котором плотность агентов определенного типа не изменяется.

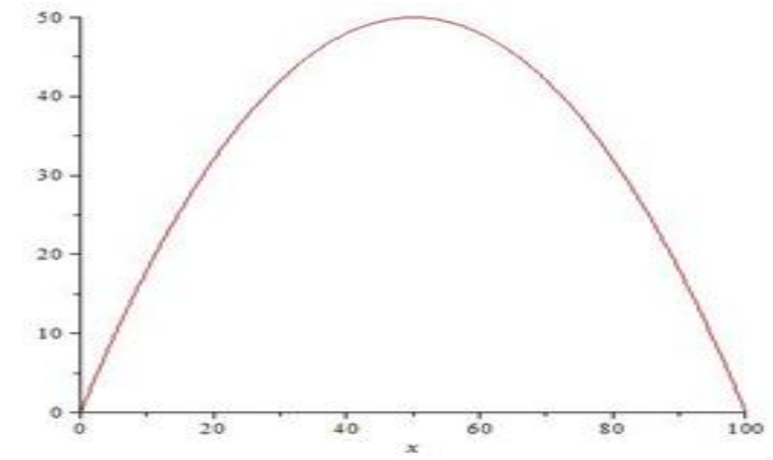
- *Общее знание* состоит в том, что агенты обладают информацией только **о пропорции двух групп** в окружении.
- Динамика процесса зависит так же от **относительной скорости** реакции агентов разных групп на изменение общего знания.

Модель ограниченного окружения. Функционирование модели.

Простейшим случаем является следующая линейная функция зависимости порога толерантности белых агентов f_W. Обозначим количество белых агентов через N_W, а максимальное значение порога толерантности отношения черных к белым агентам в окружении – через $R_{B/W}$. Количество белых агентов x пороги которых не превышают величины $f_W(x)$ связаны следующим линейным соотношением:

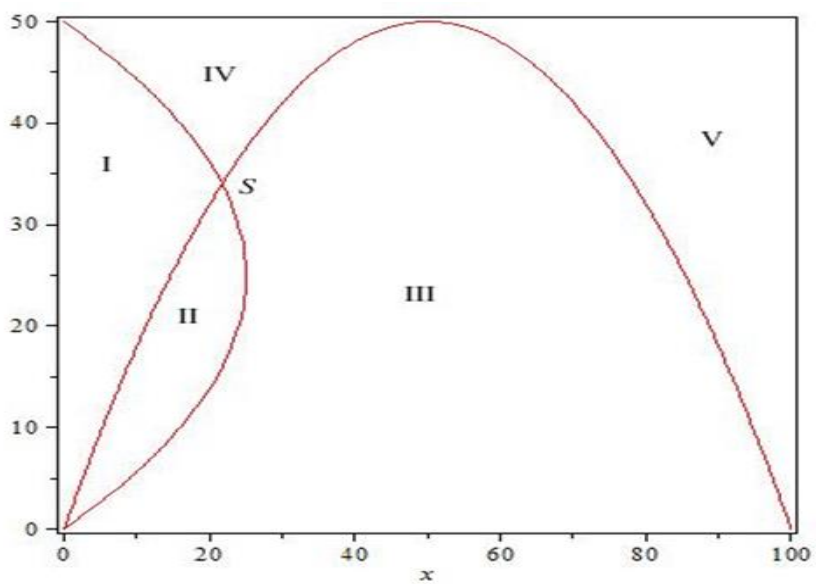
$$f_W(x) = -\frac{R_{B/W}}{N_W} x + R_{B/W}.$$

Тогда величина $F_W(x) = x f_W(x)$ показывает количество черных агентов, которых «терпит» x белых агентов.



Модель ограниченного окружения. Результаты модели.

Для черных агентов введем такие же обозначения N_B, $R_{W/B}$ и $f_B(x)$ будем считать так же линейной. Построив на том же графике функцию $F_B(x)$ для черных агентов, где x изменяется по вертикальной оси от 0 до $N_B = 50$, получим точку пересечения двух графиков S. Эта точка пересечения и определяет равновесные пропорции между черными и белыми агентами в данном окружении.



Пороговая модель Грановеттера. Состав модели

В работе [GRANOVETTER M. 1978] рассматривается *модель критической массы* с несколько иной точки зрения. Этот подход основывается на социологических исследованиях генезиса погромов и революций.

В отличие от Шеллинга, Грановеттер исследовал устойчивость равновесия в поведении **одного типа** агентов.

Социальная группа состоит из n агентов. Любой агент может либо «действовать», либо «бездействовать». Для агента каждый из выборов действия или бездействия имеет свои положительные и отрицательные стороны. Агенты являются рациональными.

Будем считать, что выигрыш агента с одной стороны зависит от действий (или бездействия) окружающих его агентов, т.е. от социального фактора – **давления группы.** С другой стороны – от его индивидуальных предпочтений, т.е. индивидуального фактора – **автономности агента**.

Пусть индивидуальный фактор описывается числом θ, принадлежащим отрезку [0; 1] (**порогом**), а социальный фактор – **долей действующих агентов**.

Пороговая модель Грановеттера. Функционирование модели

Агент сравнивает значение своего порога со значением доли действующих агентов, и принимает соответствующее решение – действовать или бездействовать: если $r < \theta$, то агент бездействует, если $r \geq \theta$, то агент действует.

Обозначим функцию распределения порогов через $F_\theta(\cdot):[0;1] \to [0;1]$, а долю действующих агентов в момент времени t через $r(t)$. По определению функции распределения, доля агентов с порогами, не превышающими $r(t)$, равна $F_\theta(r(t))$. Значит, в следующий момент времени будут действовать именно эта доля агентов, т.е. справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$r(t+1) = F_\theta(r(t)).$$

Положение равновесия достигается при условии $r(t+1) = r(t)$, т.е. $r = F_\theta(r)$.

Это положение равновесия может быть устойчивым или неустойчивым.

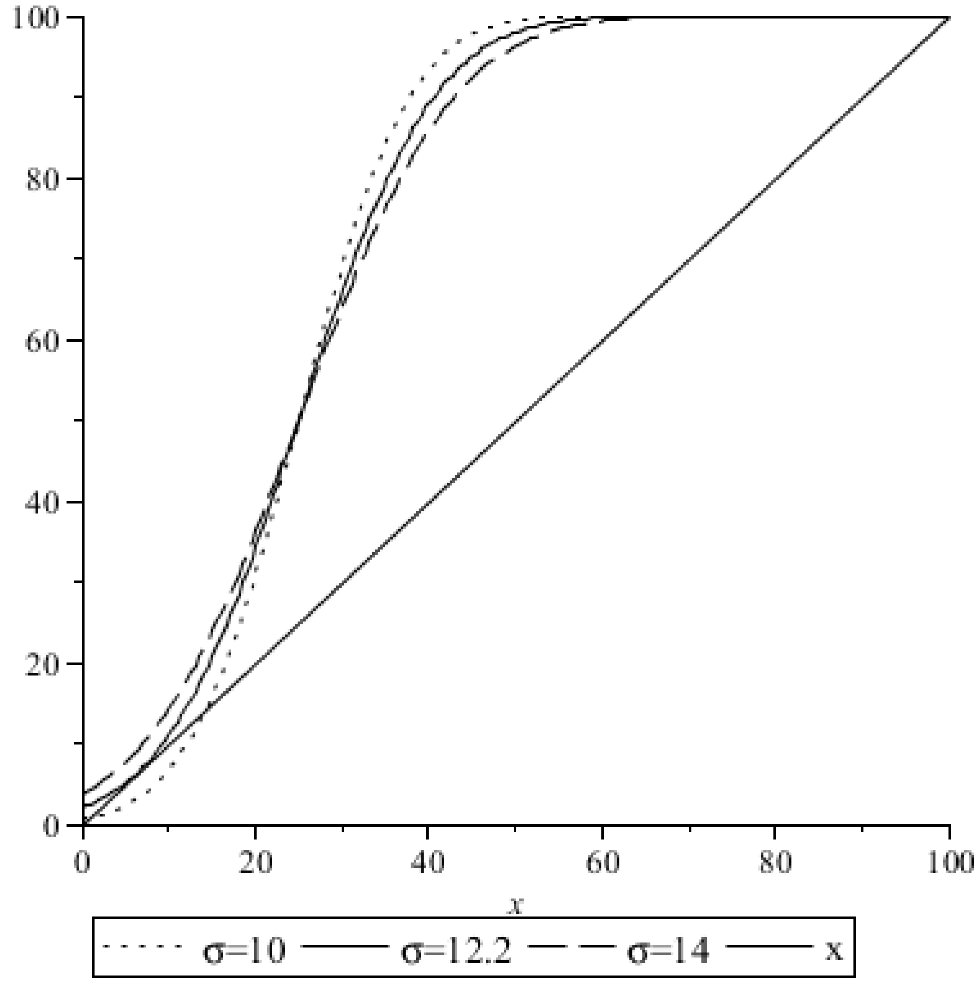
Устойчивым оно будет, если график функции распределения $F_\theta(\cdot)$ пересекает биссектрису сверху. Если график функции распределения $F_\theta(\cdot)$ пересекает биссектрису снизу, то равновесие будет неустойчивым.

Пороговая модель Грановеттера. Основные результаты модели

Грановеттер исследовал нормальную функцию распределения порогов для 100 агентов со средним значением 25 - $N(25,\sigma)$. Зависимость точки равновесия от стандартного отклонения σ получилась разрывной. В точке примерно $\sigma_c \approx 12.2$ существует разрыв в равновесии с 6 агентов на всех 100 агентов. Этот разрыв объясняется тем, что при значении стандартного отклонения $\sigma_c \approx 12.2$ график функции распределения не пересекает, а касается биссектрисы в точке $r = 6$. Небольшое отклонение переводит точку равновесия из $r = 6$ в $r = 100$. Таким образом, модель объясняет ситуации, когда две близкие по распределению порогов толпы могут вести себя совершенно по-разному.

$$F(x,\sigma) = \frac{100}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-25)^2}{2\cdot\sigma^2}} dy$$

Пороговая модель Грановеттера. Основные результаты модели



$$F(x,\sigma)=\frac{100}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-25)^2}{2\cdot\sigma^2}}\,dy$$

Примеры применения

Ситуация/действие	Социальное давление	Индивидуальное сопротивление
Поведение при погромах и забастовках/ принять участие	Количество забастовщиков	Боязнь неприятностей от властей.
Распространение слухов/ стать распространителем.	Количество знакомых, сказавших о новости, разделяющих критическое мнение и т.п.	Уровень доверия к чужому мнению
Голосование за кандидатов/ проголосовать «за».	Количество проголосовавших за	Подверженность влиянию других. Нежелание чтобы голос был потерян.
Выбор профессии	Количество выпускников, выбравших данную профессию	Готовность к предстоящей конкуренции на рынке труда. Индивидуальные предпочтения
Уход с просмотра фильма	Количество уже ушедших с просмотра	Вежливость перед создателями фильма (даже если их в зале нет!) или перед сидящими рядом, которых нужно побеспокоить.
Иммиграция/иммигрировать	Поток уезжающих граждан из данной страны.	Склонность к перемене привычной жизни. Требования к уровню комфорта, свободе и т.п.

Теоретико-игровая пороговая модель конформного поведения

В работе [Бреер В.В. 2012] сделана попытка обобщить пороговую модель Грановеттера и модель ограниченного окружения Шеллинга. В отличие от этих моделей, приводится общая формулировка *теоретико-игровой модели конформного поведения*. В рамках этой общей модели, кроме исследования собственно конформного поведения, удается получить результаты для ряда ее содержательно интерпретируемых вариаций и исследовать свойства соответствующих равновесий Нэша.

Теоретико-игровая пороговая модель. Состав.

Рассмотрим множество *агентов* $N=\{1,2,...,n\}$, каждый из которых имеет две альтернативные возможности – *действовать или бездействовать*. Выбор агента i обозначим через $x_i \in \{0;1\}$, где $x_i = 1$ означает, что агент действует, а $x_i = 0$ – бездействует. *Состояние системы*, определяемое как *вектор действий* всех агентов, обозначим через $x \in \{0,1\}^n$. Вектор действий внешних по отношению к i-му агенту агентов обозначим через $x_{-i} = \left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n\right) \in \{0,1\}^{n-1}$ и будем называть *обстановкой* для i-го агента.

Теоретико-игровая пороговая модель. Целевая функция.

Поведение агента i определяется его стремлением к максимизации целевой функции следующего вида:

(1) $$u_i(x) = u_i(x_i, x_{-i}) = a_i(x_{-i})x_i + b_i(x_{-i})(1 - x_i),$$

где $a_i(\cdot)$ и $b_i(\cdot)$ – функции полезности агента, зависящие от обстановки, при условии выбора агентом действия или бездействия соответственно.

Основные параметры модели. Случай, когда одна из функций полезности $a_i(\cdot)$ или $b_i(\cdot)$ равна константе $0 \le \Theta_i \le 1$, называется *пороговым поведением*, а сама величина Θ_i – порогом агента i. Содержательно отсутствие зависимости от обстановки означает, что это – *внутренняя характеристика* агента, влияющая на его поведение в соответствии с выражением (1). Другое слагаемое функции полезности (1), которое остается зависимым от обстановки, отражает роль *социального давления*, принуждающего агента действовать (слагаемое $a_i(\cdot)$) или бездействовать (слагаемое $b_i(\cdot)$) при превышении им порога θ_i агента i.

Теоретико-игровая пороговая модель. Функционирование.

Конформное и анти-конформное поведение агента i описывается свойствами монотонности функций его полезности $a_i(\cdot)$ и $b_i(\cdot)$ в зависимости от некоторой частичной упорядоченности множества обстановок, на котором определены эти функции.

Существует два непересекающихся множества - агентов-конформистов $N_c = \{n_1, n_2, \ldots, n_c\}$ и агентов-анти-конформистов $N_a = \{n_1, n_2, \ldots, n_a\}$.

Таким образом, исходя из предположений, целевая функция агента i будет выглядеть следующим образом:

(2) $u_i\left(x_i, x_{-i}\right) = \left(a_i\left(x_{-i}\right) - \Theta_i\right) x_i$,

Рассмотрим игру $\tilde{G} = \left(\{0,1\}^n, \{u_i\}_{i \in N}, N\right)$ в нормальной форме с функциями полезности (2).

Теоретико-игровая пороговая модель. Варианты полезности.

Модель / Поведение	Пороговая		Со взаимным влиянием		С репутацией	
	$x_i = 0$	$x_i = 1$	$x_i = 0$	$x_i = 1$	$x_i = 0$	$x_i = 1$
Конформное	$a_i(\cdot)\uparrow$	$b_i(\cdot) \equiv \Theta_i$	$a_i\left(x_{-i}\right) = \sum_{j:j\neq i} d_{ij} x_j$	$b_i(\cdot) \equiv \eta_i$	$a_i\left(x_{-i}\right) = \sum_{j:j\neq i} r_j x_j$	$b_i(\cdot) \equiv \theta_i$
Анти-конформное	$a_i(\cdot)\downarrow$	$b_i(\cdot) \equiv \Theta_i$	$a_i\left(x_{-i}\right) = \sum_{j:j\neq i} d_{ij}\left(1 - x_j\right)$	$b_i(\cdot) \equiv \eta_i$	$a_i\left(x_{-i}\right) = \sum_{j:j\neq i} r_j\left(1 - x_j\right)$	$b_i(\cdot) \equiv \theta_i$

$$u_i(x) = u_i(x_i, x_{-i}) = a_i(x_{-i})x_i + b_i(x_{-i})(1 - x_i)$$

Теоретико-игровая пороговая модель. Анонимное взаимодействие.

Если у агентов одинаковые репутации, т.е. $\forall i \in N : r_i = \frac{1}{n}$, то в этом случае целевые функции конформистов и анти-конформистов соответственно будут выглядеть следующим образом:

(3) $w_i^c(x_i, x_{-i}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j \neq i} x_j - \theta_i \right) x_i, i \in N_c,$

(4) $w_i^a(x_i, x_{-i}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j \neq i} (1 - x_j) - \theta_i \right) x_i, i \in N_a.$

Введем следующую функцию распределения:

(5) $F^c(y) = \frac{1}{n} \sum_{i \in N^c} \chi\{\theta_i < y\}.$

<u>Теорема</u>. Ситуация $x^* = x^*(p) : x_i^* = \chi\{\theta_i < p\}, \forall i \in N$ является равновесием Нэша для игры $\left(\{0,1\}^n, \{w_i^c\}_{i \in N}, N = N_c\right)$ тогда и только тогда, когда $p \in [0,1]$ есть решение следующего уравнения:

(6) $F^c(p) = p$.

Трудности в модели игры для большого числа агентов

Как известно, для реализации равновесия Нэша необходимо «общее знание», т.е. любой агент должен знать в том числе целевые функции других агентов, а значит и значения их порогов.

При большом количестве агентов это условие трудно выполнимо. Кроме того, в игровой модели невозможно предсказать, какое из нескольких равновесий Нэша будет достигаться.

Переходя от игровой модели к описанию поведения агентов как динамической системы [*Эволюционные игры*], можно получить условия равновесия не для *микросостояний* , а для *макросостояний*, а именно для доли действующих агентов .

Стохастическая модель порогового поведения

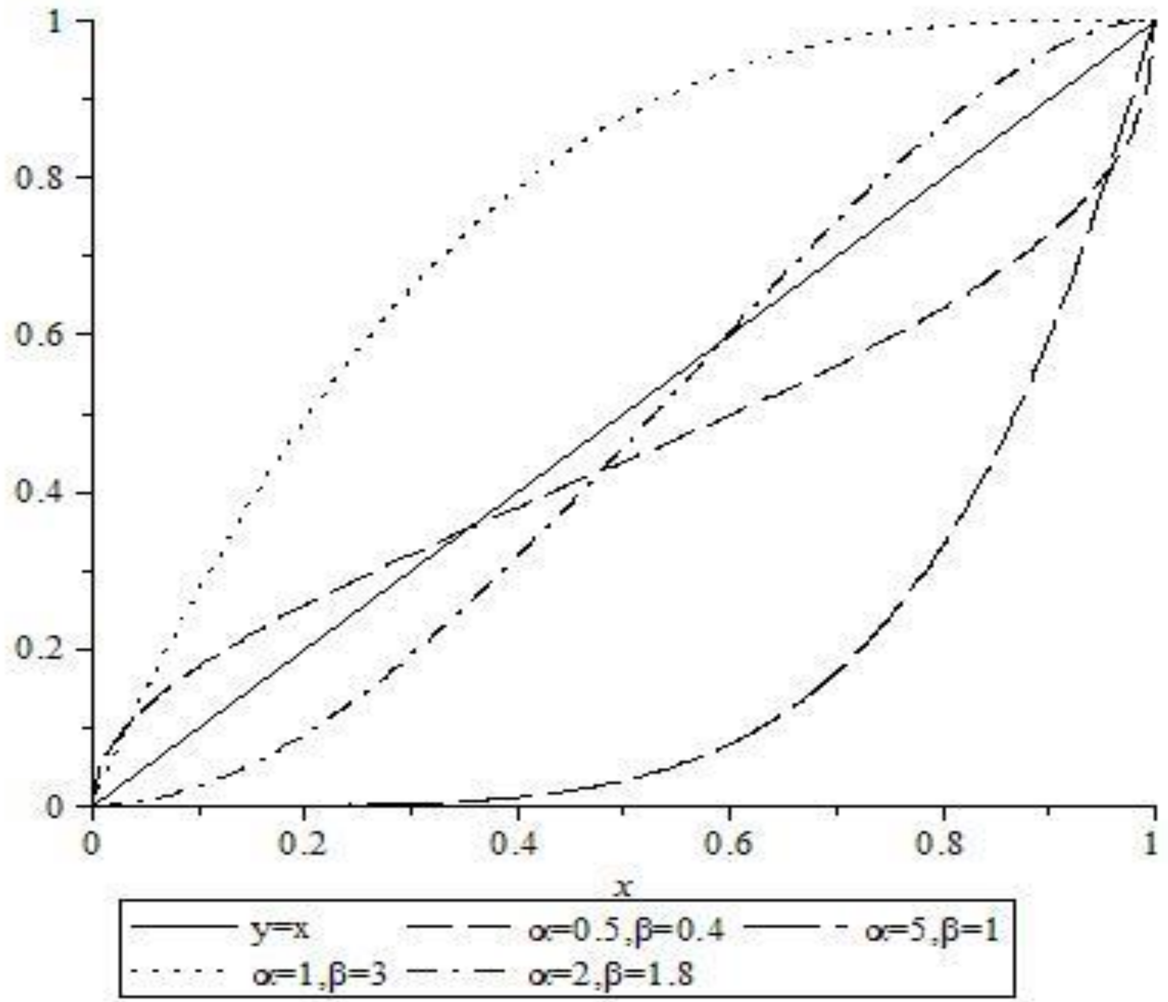
Предположим, что нам неизвестны точные значения порогов агентов, но могут быть известны их стохастические характеристики.

Пусть задано вероятностное пространство $\Theta = [0,1)^n$ с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(\Theta)$. Пусть вектор независимых одинаково распределенных случайных величин, $\{\theta_i\}_{i \in N}$ принимающих значения на полуинтервале $[0,1)$, с функцией распределения $F:[0,1] \to [0,1]$

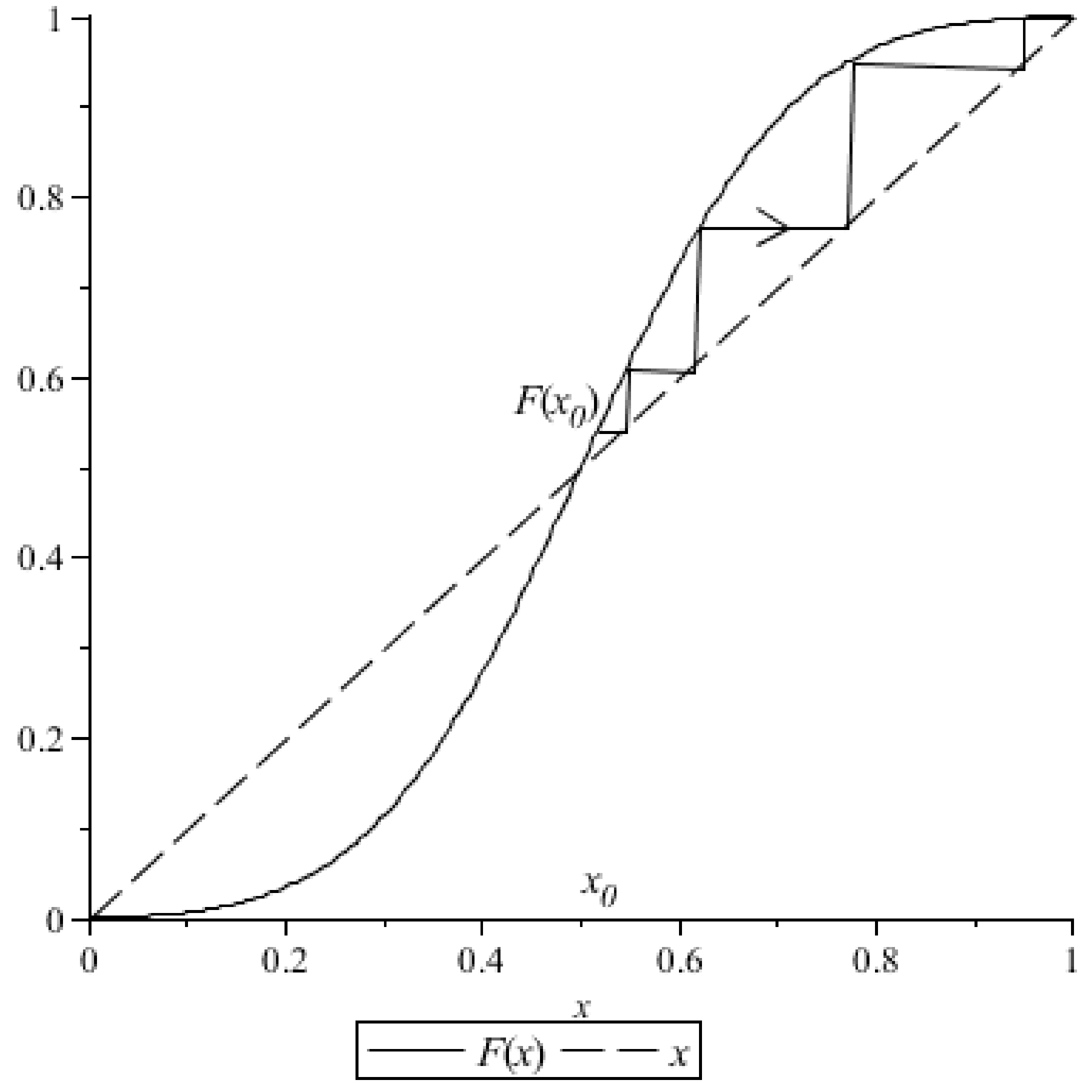
Пример функции распределения – бета-функция:

(5) $$F(x) = \mathcal{B}(x;\alpha,\beta) = \frac{\int_0^x y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy}{\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy}$$

Параметрические распределения порогов



Пример динамики порогового поведения



Модель возмущений динамической системы (6)

Так как пороги $\{\theta_i\}_{i \in N}$ являются случайными величинами, то динамическая система, описываемая рекуррентной схемой (6) будет подвержена флуктуациям, величина которых уменьшается с увеличением количества агентов n.

Будем считать, что флуктуации правой части F на шаге k, описывается случайной величиной $\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_k$, где $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ – последовательность нормально распределенных случайных величин $N(0,1)$, а множитель $\frac{1}{\sqrt{n}}$ характеризует уменьшение влияния флуктуации при увеличении n.

Теперь уточненная разностная схема будет выглядеть следующим образом:

(7) $$x_{k+1} - x_k = F(x_k) - x_k + \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_{k+1} .$$

Переход к непрерывному времени

Следуя способу, описанному в [4], перейдем к непрерывному времени для рекурсивной последовательности (7).

Пусть момент времени t для процесса на конечном интервале времени $T=[0,1]$ соответствует шагу $[nt]$ для рекурсивной процедуры (7).

Так как n велико, то момент времени соответствует *длительному* развитию динамической t системы.

Введем следующий случайный процесс:

(8)

$$X_t^n = x_0 + \sum_{k=0}^{[nt]} \left(F\left(x_k\right) - x_k \right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{[nt]} \xi_{k+1}$$

Время выхода из области

Нас будет интересовать, каково среднее время первого выхода процесса (8) из интервала $[0;h)$, где h – граница области притяжения точки равновесия 0.

После выхода из области притяжения процесс быстро (по сравнению со временами порядка n) перейдет в другую точку равновесия (на Рис. это точка равновесия $x=1$).

Обозначим время первого выхода процесса (8) из интервала $[0;h)$ через $\tau_n = \min\{[nt]: X_t^n > h\}$.

Экспоненциальная оценка времени выхода

Оценка времени выхода выражается через потенциал детерминированной динамической системы (6).

По определению потенциала U правая часть дифференциального уравнения должна быть равна производной этого потенциала, взятой с обратным знаком

$$F(x) - x = -\frac{dU}{dx} .$$

Соответственно этот потенциал можно записать в виде

(9)
$$U(x) = \int_0^x \big(y - F(y)\big)dy .$$

Тогда, согласно [3, Глава 4, Теорема 4.1]:

(10)
$$E\tau_n \approx \exp\left[2nU(h)\right] = \exp\left[2n\int_0^h \big(y - F(y)\big)dy\right]$$

Экспоненциальная оценка времени выхода с неоднородным возмущением

Оценка времени выхода выражается через потенциал детерминированной динамической системы

Соответственно этот потенциал можно записать в виде

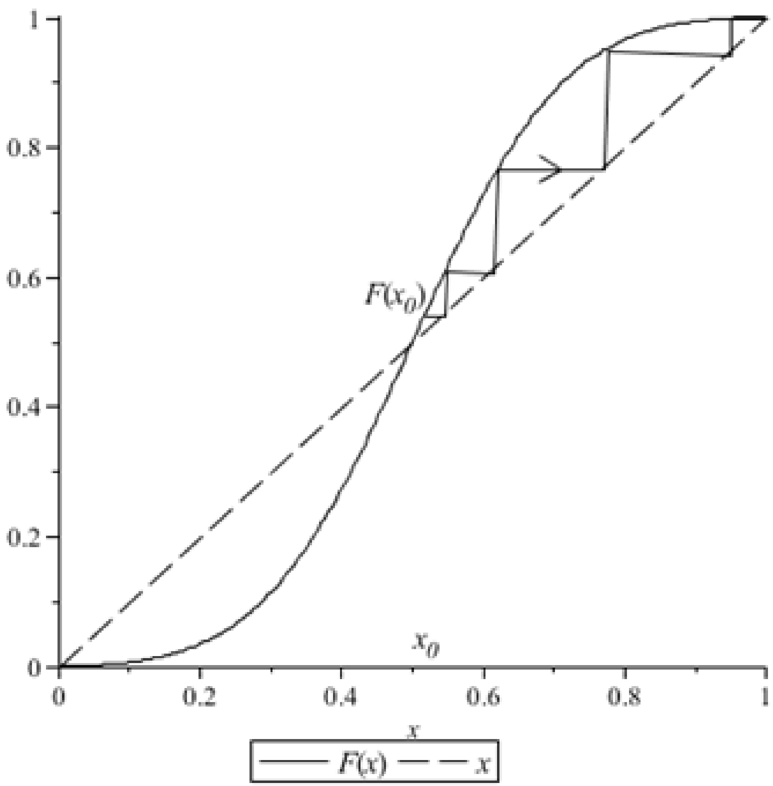
$$x_{k+1} - x_k = F(x_k) - x_k + \frac{\sigma(x_k)}{\sqrt{n}} \xi_{k+1} \text{, где } \sigma(x_k) = \sqrt{F(x_k)(1 - F(x_k))}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} ln(E\tau_e) = V(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(u - F(u))}{F(u)(1 - F(u))} du$$

$$E\tau_e \sim e^{n\int_{x_0}^{x} \frac{(u-F(u))}{F(u)(1-F(u))} du}$$

Флуктуации пороговой модели.



$$x_{k+1} - x_k = F\left(x_k\right) - x_k + \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_{k+1}$$

$$E\tau_n \approx \exp\left[2n\int_0^h \left(y - F\left(y\right)\right)dy\right]$$

$$E\tau_n \leq \exp\left[nh^2\right]$$

Условие стационарного состояния

Для дальнейшего изложения примем следующее условие:

Стационарные состояния характеризуются наиболее беспорядочным распределением $\nu^{(n)}$ – ***минимизирующим*** относительную к равномерному распределению $\rho^{(n)}$ энтропию:

(11)
$$I_{\rho}\left(\nu^{(n)}\right)=\sum_{\omega^{(n)}\in\{0,1\}^n}\nu^{(n)}\left(\omega^{(n)}\right)\ln\frac{\nu^{(n)}\left(\omega^{(n)}\right)}{\rho^{(n)}\left(\omega^{(n)}\right)}$$

Относительная энтропия характеризует близость распределения $\nu^{(n)}$ к $\rho^{(n)}$.

«Гамильтониан» социальной сети

Конформное пороговое поведение агента $i \in N$ можно записать в виде следующей целевой функции:

(12) $$u_i\left(\omega^{(n)}\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_j - \theta_i\right)\omega_i \quad .$$

Утилитарная ценность социальной сети:

(13) $$U\left(\omega^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i\left(\omega^{(n)}\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\omega_j\omega_i - \sum_{i=1}^{n}\theta_i\omega_i\right).$$

Математическое ожидание утилитарной ценности по распределению вероятностей (пока неизвестному) обозначим через $E_{\nu^{(n)}}U$.

Зафиксируем эту величину $\nu^{(n)}$

(14) $$E_{\nu^{(n)}}U = U_0 \quad .$$

Распределение Гиббса социальной сети

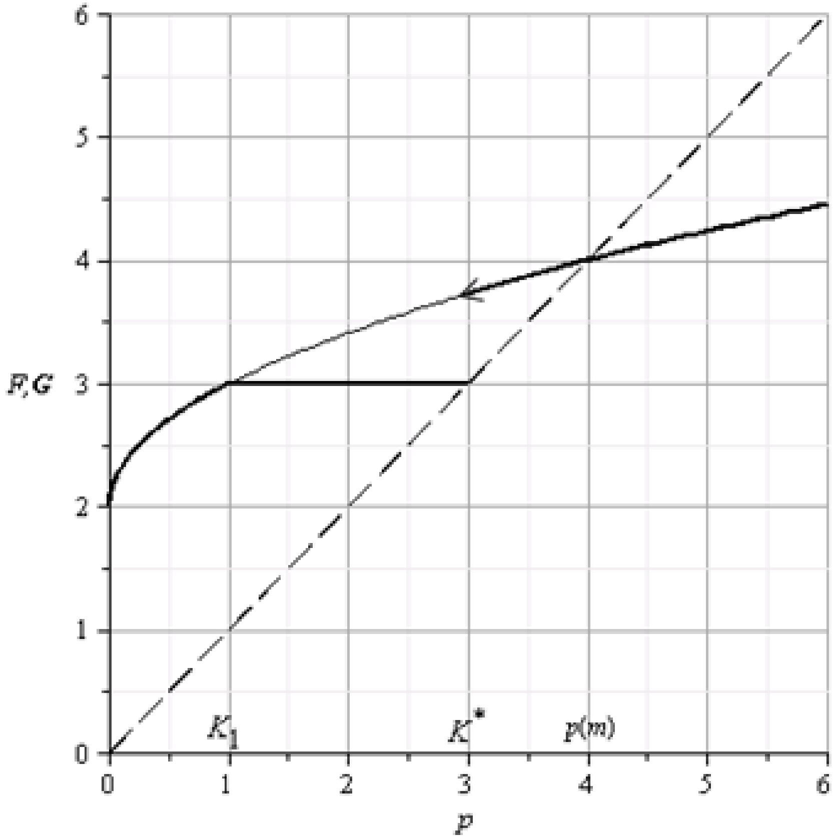
Можно показать, что единственным распределением, удовлетворяющим условию (14) и минимизирующим относительную энтропию (11) (выполнение условия стационарного состояния), является мера Гиббса с показателем $\beta = \beta\left(U_0\right)$:

(15) $$\nu_G^{(n)}\left\{\omega^{(n)}\right\} = \frac{1}{Z_n(\beta)} \exp\left[-\beta U\left(\omega^{(n)}\right)\right] \rho^{(n)}\left\{\omega^{(n)}\right\},$$

где

(16) $$Z_n(\beta) = \sum_{\omega^{(n)} \in 2^{\{0,1\}^n}} \exp\left[-\beta U\left(\omega^{(n)}\right)\right] \rho^{(n)}\left\{\omega^{(n)}\right\}.$$

Модель управления толпой. [Бреер В.В. Новиков Д.А. 2012]



Затраты на изменение порогов:

$$C\left(m,m^0\right)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(m_i,m_i^0\right)=\sum_{i=1}^{n}g\left(\left|m_i-m_i^0\right|\right)$$

Минимальные затраты перехода в K^*:

$$\int_{F^{-1}\left(K^*\right)}^{K^*} g\left(K^*-t\right)dF\left(t\right)$$

Структура сети с пороговой моделью поведения.

Пусть на агента i влияет множество $D_i : i \notin D_i \subset N$ других агентов – его соседей. Обозначим количество соседей агента i через $d_i = |D_i|$.

Будем считать, что влияние каждого из соседей агента i одинаково в следующем смысле. Все агенты характеризуются *единым* показателем $0 < \theta \le 1$. Этот показатель означает, что, если доля θ влияющих на данного агента соседей действует, то он тоже действует. Такое поведение описывается, например, следующим **наилучшим ответом**:

$$x_i = BR_i\left(x_{-i}\right) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{j \in D_i} x_j > \theta d_i, \\ 0, & \sum\limits_{j \in D_i} x_j \le \theta d_i. \end{cases}, \quad i \in N.$$

Структура сети с пороговой моделью поведения. Стохастичность

Будем считать, что количество соседей агента $i \in N$ – это целое случайное число $d_i : 1 \le d_i \le n-1$. Пусть $M_n(d)$ вероятность того, что произвольно взятый агент имеет ровно d связей.

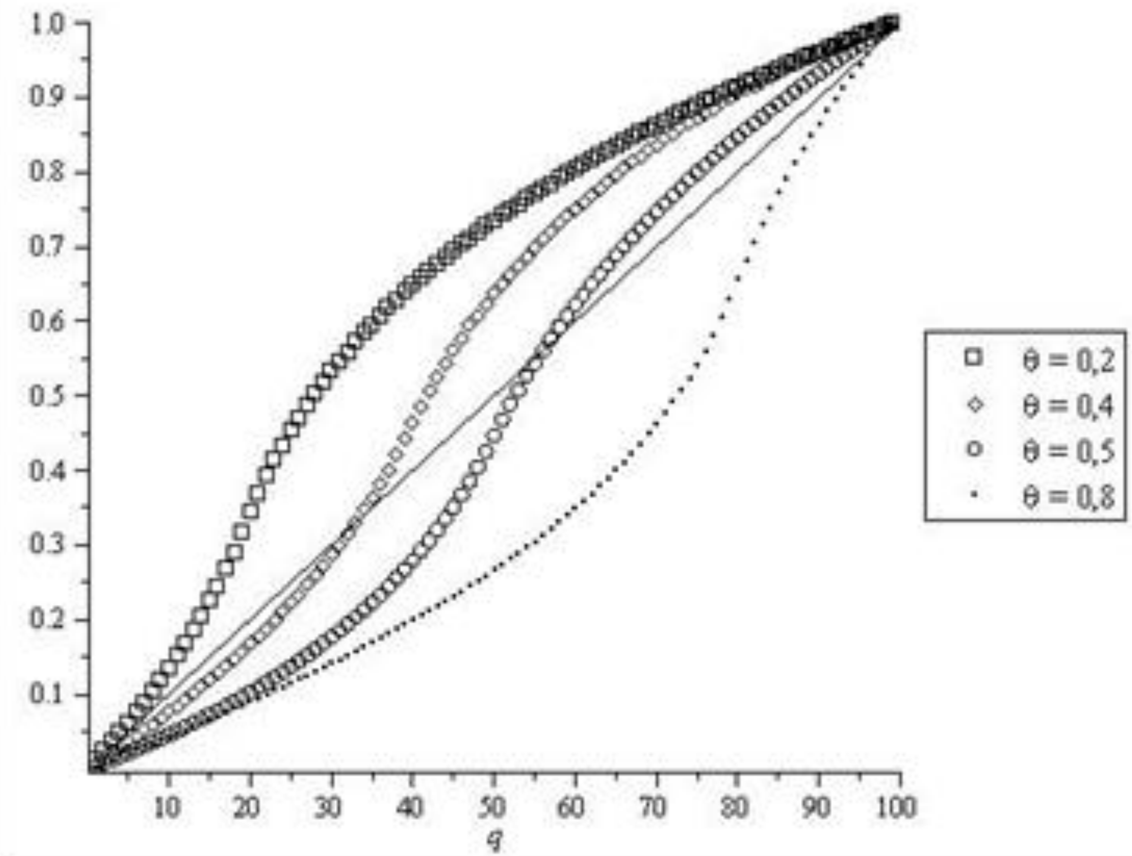
Вычислим вероятность P_n того, что агент i *будет действовать* под влиянием q действующих агентов. Для того, чтобы агент i действовал, необходимо, чтобы более чем θd_i его соседей действовало

$$P_n(q, d_i, \theta) = 1 - \sum_{k=0}^{[\theta d_i]} \frac{C_q^k C_{n-1-q}^{d_i-k}}{C_{n-1}^{d_i}}.$$

Значит, после усреднения по переменной d_i, от q действующих агентов на следующем шаге возбудится следующая доля агентов:

$$F_n(q, \theta) = \sum_{d=1}^{n-1} P_n(q, d, \theta) M_n(d).$$

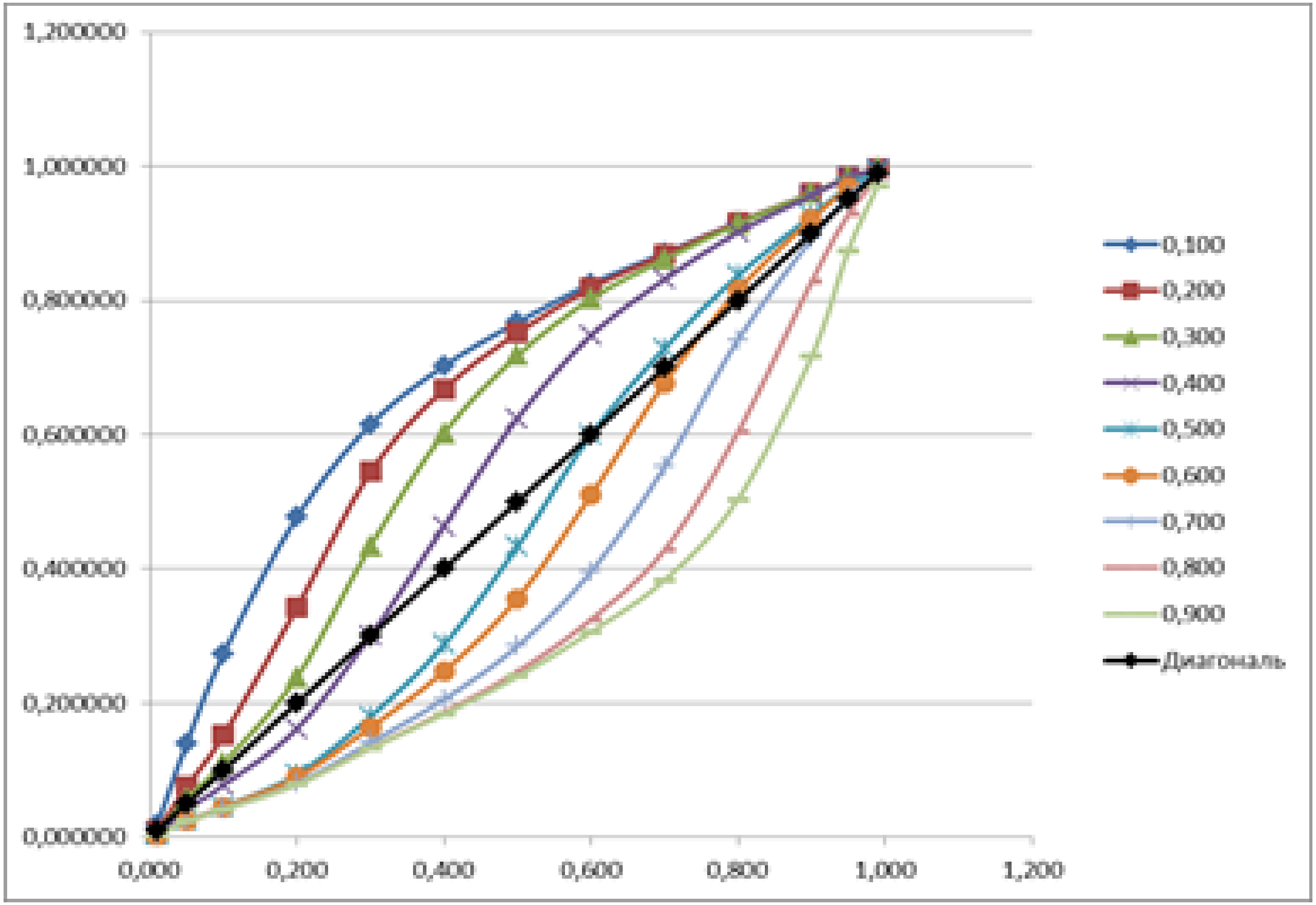
Структура с пороговой моделью поведения. Графики



Для сетей в интернете в работе [ALBERT R., BARABASI A.] выведена эмпирическая степенная зависимость с показателем -2.3.

$$M_n(d) \approx d^{-1,5}$$

Структура с пороговой моделью поведения. Идентификация в ЖЖ



- БРЕЕР В.В. *Теоретико-игровые модели конформного поведения* // Автоматика и телемеханика. 2012, № 10 С 111-126
- БРЕЕР В.В. *Обзор моделей конформного поведения* // Проблемы управления. – 2013. в печати.
- БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А. *Модели управлении толпой* // Проблемы управления. – 2012. – № 2. – С. 38 – 44.
- БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А. *Пороговые модели взаимного страхования* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2011. – Том 3. – № 4. С. 3 – 22.
- БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А. *Пороговая модель коррупционного поведения* // Системы управления и информационные технологии. – 2011. – № 3. – С. 73 – 75.
- БСЭ *Большая Советская Энциклопедия:* http://bse.sci-lib.com/
- КАНТ И. *Антропология с прагматической точки зрения*. *Собрание сочинений в 8 томах. Том 7* – М.: Чоро, 1994.
- КОН И.С. *Социологическая психология.* Москва. Институт практической психологии. Воронеж: МОДЭК, 1999. – 560 с.
- ЛЕБОН Г. *Психология народов и масс* – М.: Макет, 1995.
- НИЦШЕ Ф. *Веселая наука*. – СПб.: Азбука-классика, 2006.
- ЮНГ К. Г. *Психологические типы*. СПб.: Азбука, 2001.
- ЭЛИАДЕ М. *Миф о вечном возвращении*. – М.:Ладомир, 2000.

- AKERLOF, G. A. *The Market for "Lemons": Quality Uncertainty and the Market Mechanism*, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 84, No. 3. (Aug., 1970), pp. 488-500.
- ALBERT R., BARABASI A. Statistical mechanics of complex networks // Reviews of Modern Physics, Vol. 74, 2002.
- ASCH S. E. *Opinions and social pressure*. Scientific American, 193, 31-35. 1955.
- ASCH S. E. *Studies of independence and conformity: A minority of one against a unanimous majority.* Psychological Monographs, 70 (whole no. 416). 1956.
- BERNHEIM D. *A Theory of Conformity*, Journal of Political Economy, 1994, vol. 102, no. 5.
- BECKER, G. and K.M. MURPHY, Social Markets: Market Behavior in a Social Environment. Belknap-Harvard University Press, Cambridge 2001.
- CHWE M. *Structure and Strategy in Collective Action.* American Journal of Sociology, 105(1), 128- 157, 1999.
- DURLAUF S.N. A Framework for the Study of Individual Behavior and Social Interactions, Sociological Methodology, Volume 31, Issue 1, pp. 47-87, 2001.
- ELLISON G., D. FUDEMBERG *Rules of thumb for social learning*, J. Polit. Economy 101, 612–644. 1993.

- FOLLMER H., U. HORST and A. KIRMAN, Equilibria in financial markets with heterogeneous agents: A probabilistic perspective, J. Math. Econ., 41 (1-2), 123–155. 2004.
- GLAESER E., B. SACERDOTE, SCHEINKMAN J., Crime and social interactions, Quart. J. Econ., CXI, 507–548. 1996.
- GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior*, AJS Volume 83 Number 6, pp 1420-1443, 1978.
- HORST U., *Financial price fluctuations in a stock market model with many interacting agents*, Econ. Theory, 25 (4), 917-932. 2005.
- JONES, S. *The Economics of Conformism*. Oxford: Blackwell, 1984.
- SCHELLING T., *A process of residential segregation: Neighborhood tipping, in Racial Discrimination*, in: A. Pascal (Eds.), Economic Life, Lexington, MA: Lexington Books. 1972.
- SCHELLING T., *Hockey Helmets, Concealed Weapons, and Daylight Saving: A Study of Binary Choices with Externalities*. The Journal of Conflict Resolution, Vol. 17, No. 3 (Sep., 1973), pp. 381-428.
- SCHELLING T., *Dynamic models of segregation* J. Math. Sociology, 1, 143–186. 1971
- SCHELLING T., *Micromotives and Macrobehavior*. WW NORTON & CO, 1978.
- SHERIF M. *The psychology of social norms*. New York: Harper Collins. 1936