

# Нелинейные базовые модели социальных процессов – использование в анализе и управлении

Ю.А.Полунин

Деловой журнал «Эксперт»

Главный аналитик

# Специфика анализа и управления реальных социальных и экономических процессов.

Реальные социальные и экономические процессы являются нелинейными. Основная причина нелинейности – ограниченность ресурсов, определяющих протекание процесса.

Нам придется анализировать и управлять заведомо нелинейные процессы по коротким временным последовательностям. Цели анализа могут быть две: во-первых, понять специфику процесса для выработки управляющих воздействий; во-вторых, оценить эффективность воздействия. Воздействие внешних или управляющих факторов приводит к ситуации, когда на длительных временных интервалах анализируемые процессы нельзя рассматривать как однородные. **Отличие от биологических моделей.**

Методы анализа должны носить междисциплинарный характер. желательно привязать математическую обработку к категориям прикладного анализа, что позволит использовать как количественные так и качественные категории, понятные специалистам в анализируемой области.

Для таких задач целесообразно выбрать в качестве базовой модели модель в виде отображения, в наибольшей степени позволяющего как отразить максимально возможное число вариантов развития процессов, так и точно описать процессы сгенерированные максимально широким классом функций.

В качестве исходной базовой модели рационально применить отображения процессов Ферхюльста.

$$X_{n+1} = X_n + X_n A (K - X_n);$$

где:  $X_{n+1}$  – значение процесса на шаге  $n+1$ ;  $X_n$  – значение процесса на шаге  $n$ ;  $K$  – ограничение процесса;  $A$  – интенсивность процесса;  $n$  – номер измерения значений процесса (дискретное время).

Модель описывает значение процесса  $X_{n+1}$  на шаге  $n+1$  как сумму предыдущего значения процесса  $X_n$  и приращения процесса, в свою очередь зависящего от достигнутого значения на предыдущем шаге -  $X_n$ ; интенсивности процесса –  $A$ , и того, сколь далеко процесс находится от ограничений  $(K - X_n)$ .

Примером, понятия интенсивности в таком процессе может являться «основной закон слуха», сформулированный американскими психологами Г.Олпортом и Л.Постменом: интенсивность образования слухов приблизительно равна произведению важности, значимости сообщения на неясность, неоднозначность имеющихся сведений.

Для определения параметров модели нам понадобятся три первые точки анализируемого реального процесса  $X_0, X_1, X_2$ . Тогда, на основании базовой модели можно записать систему двух уравнений

$$X_1 = X_0 + X_0 A (K - X_0);$$

$$X_2 = X_1 + X_1 A (K - X_1);$$

Неизвестные параметры модели, являются решениями данной системы уравнений и определяются следующими выражениями:

$$A = \frac{X_1^2 - X_0 X_2}{X_0 X_1 (X_1 - X_0)}$$

$$K = \frac{X_1 (X_1 - X_0)^2}{X_1^2 - X_0 X_2} + X_0$$

Аппроксимируя анализируемый реальный процесс предлагаемой базовой моделью, мы получаем через параметры базовой модели ответы на принципиально важные для анализа вопросы: «**Каковы ограничения процесса на анализируемом временном участке?**», «**Каков характер динамики процесса?**» и «**Куда стремиться анализируемый процесс?**».

Кроме того, взаимосвязь значений  $K$  и  $A$  можно представить:

$$K = \frac{X_1 - X_0}{X_0 A} + X_0$$

$$A = \frac{X_1 - X_0}{X_0 (K - X_0)}$$

Характер динамики определяется  $a = A K$   $a = AK = \frac{X_1 - X_0}{X_0} + AX_0$

# Расчетные формулы модели.

|   | <b>A</b>                     | <b>B</b>                               | <b>C</b>                                   | <b>D</b>                            | <b>E</b>                           | <b>F</b> | <b>G</b> | <b>H</b> | <b>I</b>    | <b>J</b>   |
|---|------------------------------|--|--|-------------------------------------|------------------------------------|----------|----------|----------|-------------|------------|
|   | <b>значение</b><br>$X_{n+1}$ | <b>приращение</b><br>$X_n A (K - X_n)$ | <b>свободная часть ниши</b><br>$(K - X_n)$ | <b>интенсивность</b><br>$\ll A \gg$ | <b>Емкость ниши</b><br>$\ll K \gg$ |          |          | <b>K</b> | $X_0$       | <b>A</b>   |
| 2 | <b>=I2</b>                   | <b>=A2*D2*C2</b>                       | <b>=H2-A2</b>                              | <b>=J2</b>                          | <b>=H2</b>                         |          |          | <b>1</b> | <b>0,01</b> | <b>2,5</b> |
| 3 | <b>=A2+B2</b>                | <b>=A3*D3*C3</b>                       | <b>=E3-A3</b>                              | <b>=D2</b>                          | <b>=E2</b>                         |          |          |          |             |            |
| 4 | <b>=A3+B3</b>                | <b>=A4*D4*C4</b>                       | <b>=E4-A4</b>                              | <b>=D3</b>                          | <b>=E3</b>                         |          |          |          |             |            |
| 5 | <b>=A4+B4</b>                | <b>=A5*D5*C5</b>                       | <b>=E5-A5</b>                              | <b>=D4</b>                          | <b>=E4</b>                         |          |          |          |             |            |

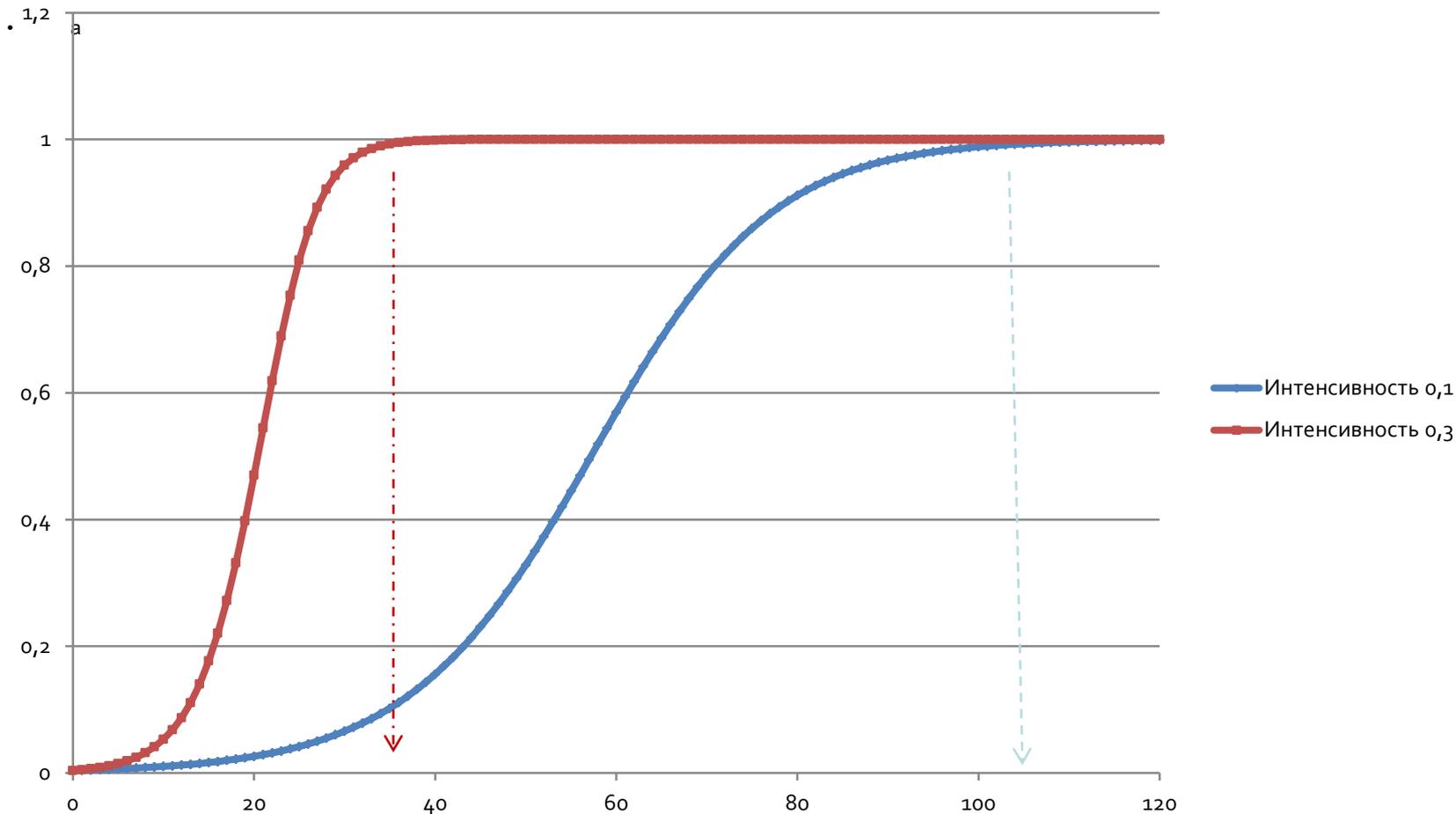
## Б.Пастернак

Есть в творчестве больших поэтов  
Черты естественности той,  
Что невозможно, их изведав,  
Не кончить полной немотой.

В родстве со всем, что есть, уверясь,  
И знаясь с будущим в быту,  
Нельзя не впасть к концу, как в ересь,  
В неслыханную простоту.

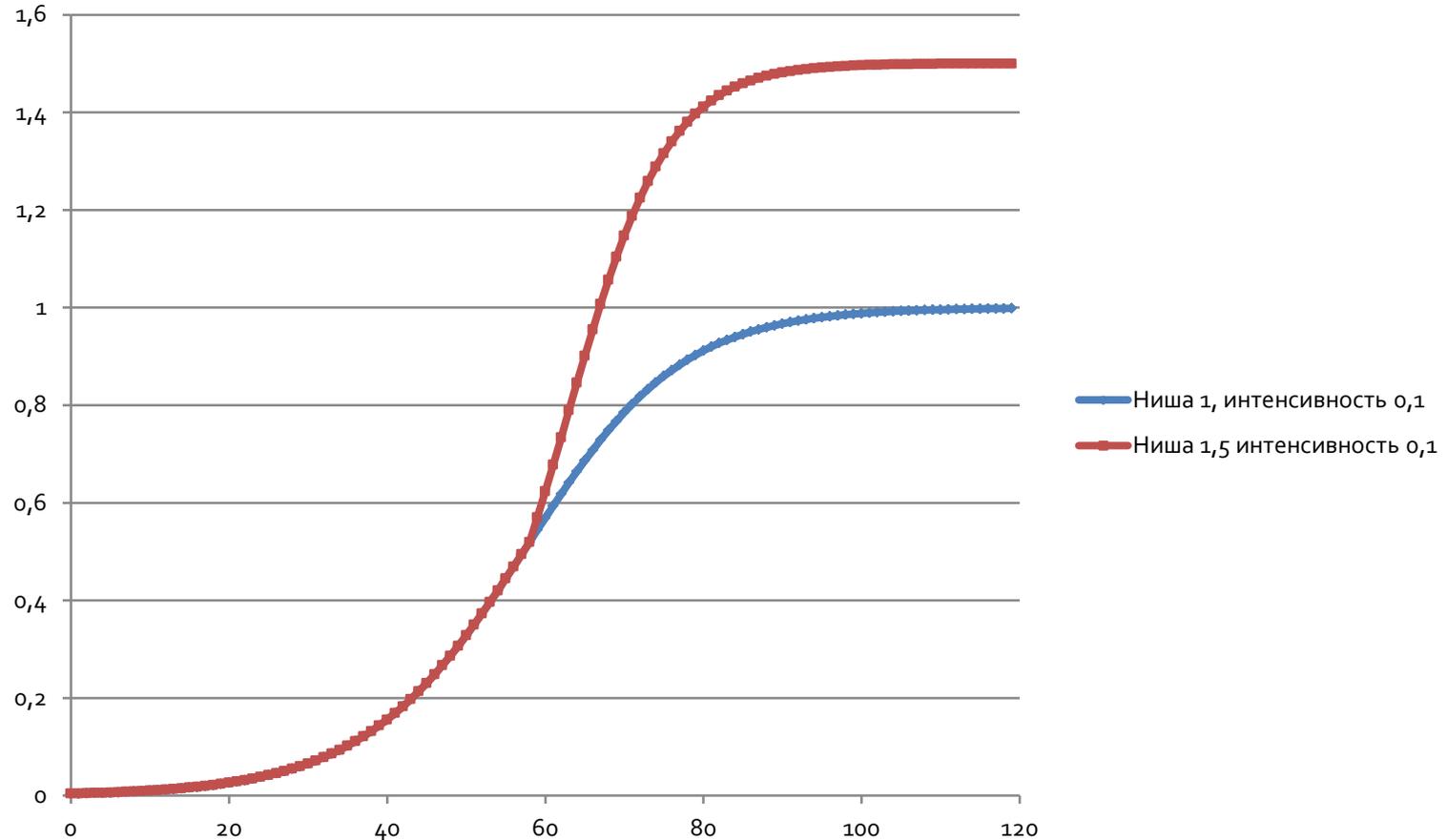
Но мы пощажены не будем,  
Когда её не утаим.  
Она всего нужнее людям,  
Но сложное понятней им.

# Стратегия управления «Зачем ждать? Увеличим усилия роста!» Интенсивность «А» увеличена в три раза (с 0,1 до 0,3)

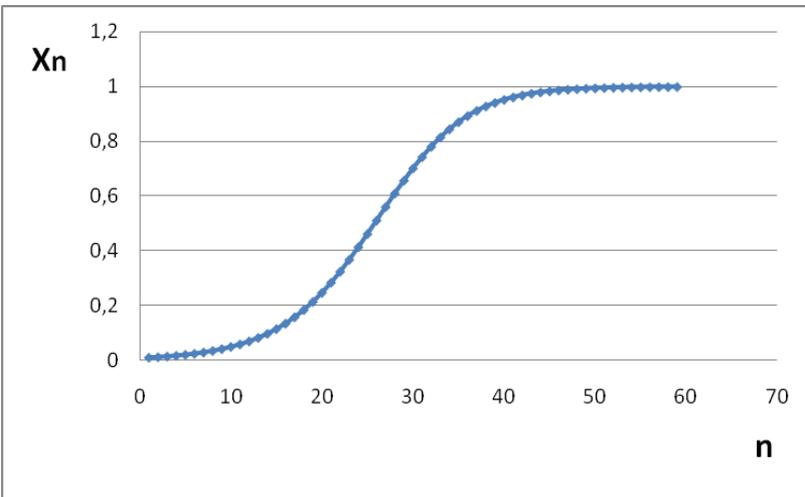


Кроме интенсивности мы можем попробовать изменять ограничения. Отличная стратегия!  
Всегда?

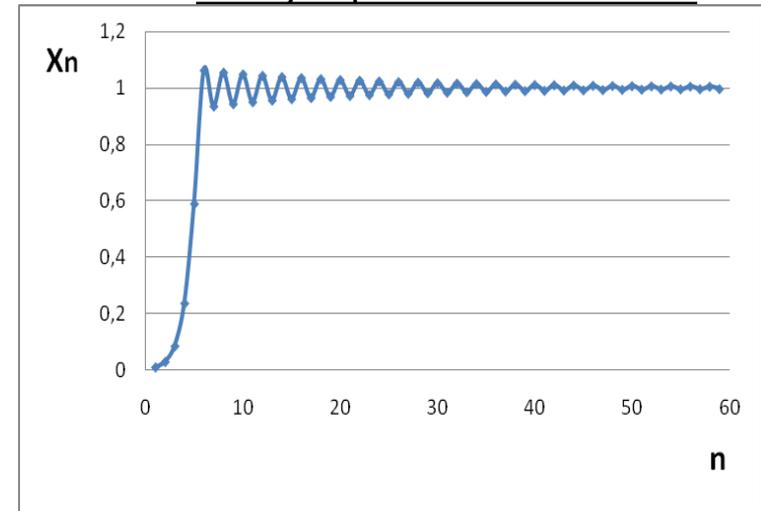
а



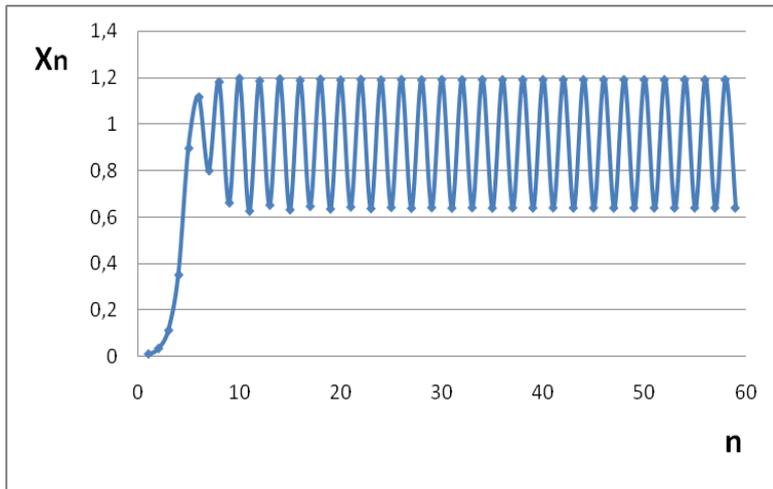
### Ситуация 1. $0 < a \leq 1$



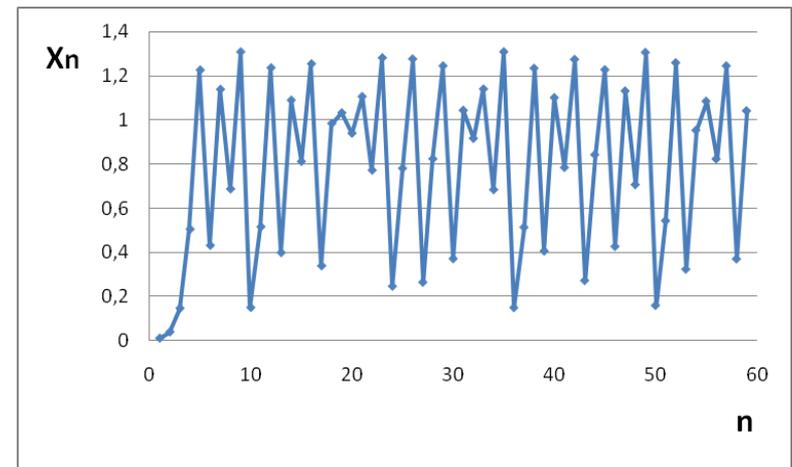
### Ситуация 2. $1 < a \leq 2$



### Ситуация 3. $2 < a \leq 2,57$

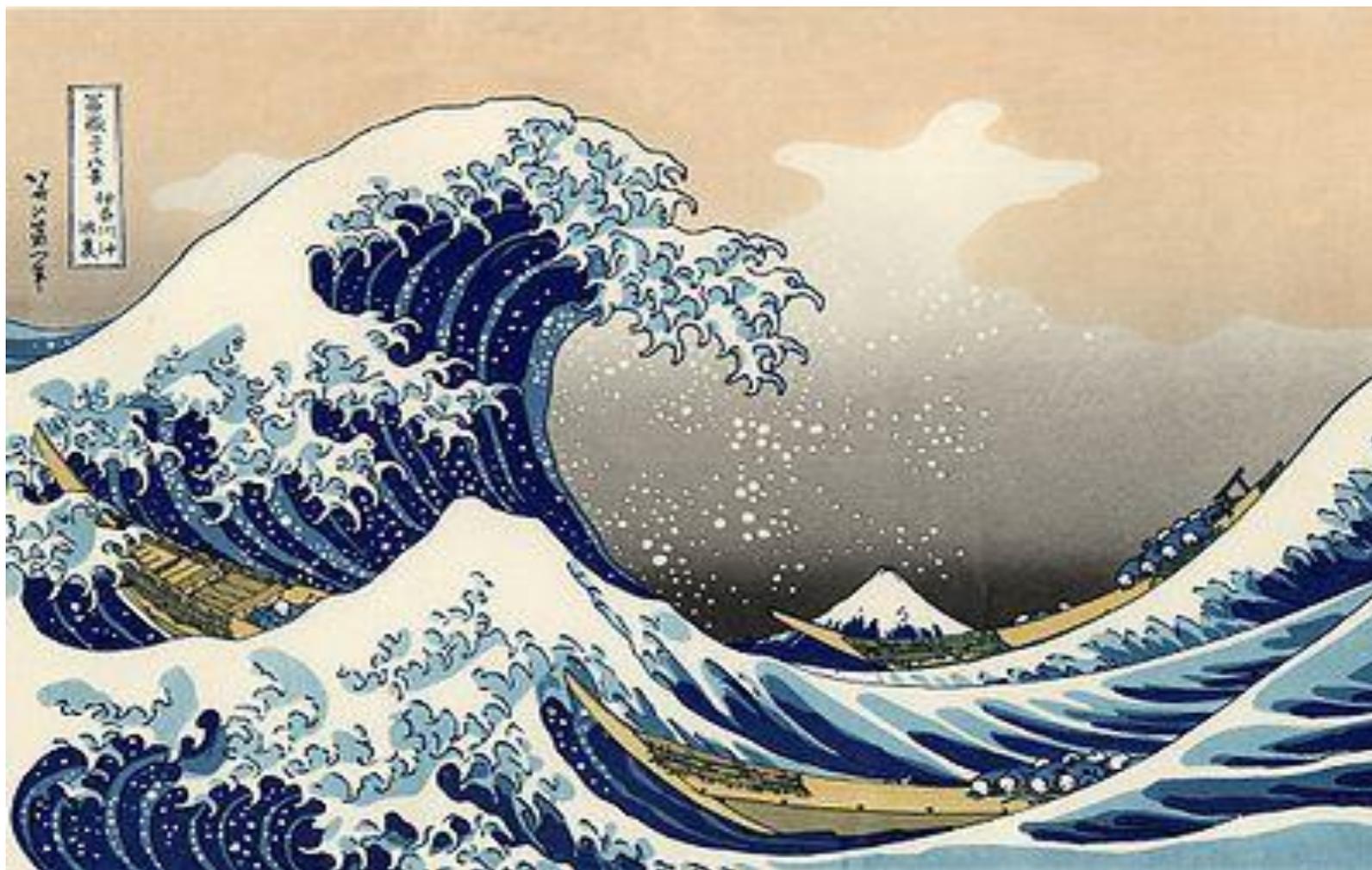


### Ситуация 4. $2,57 < a < 3$ и $0 < X_0 < K$

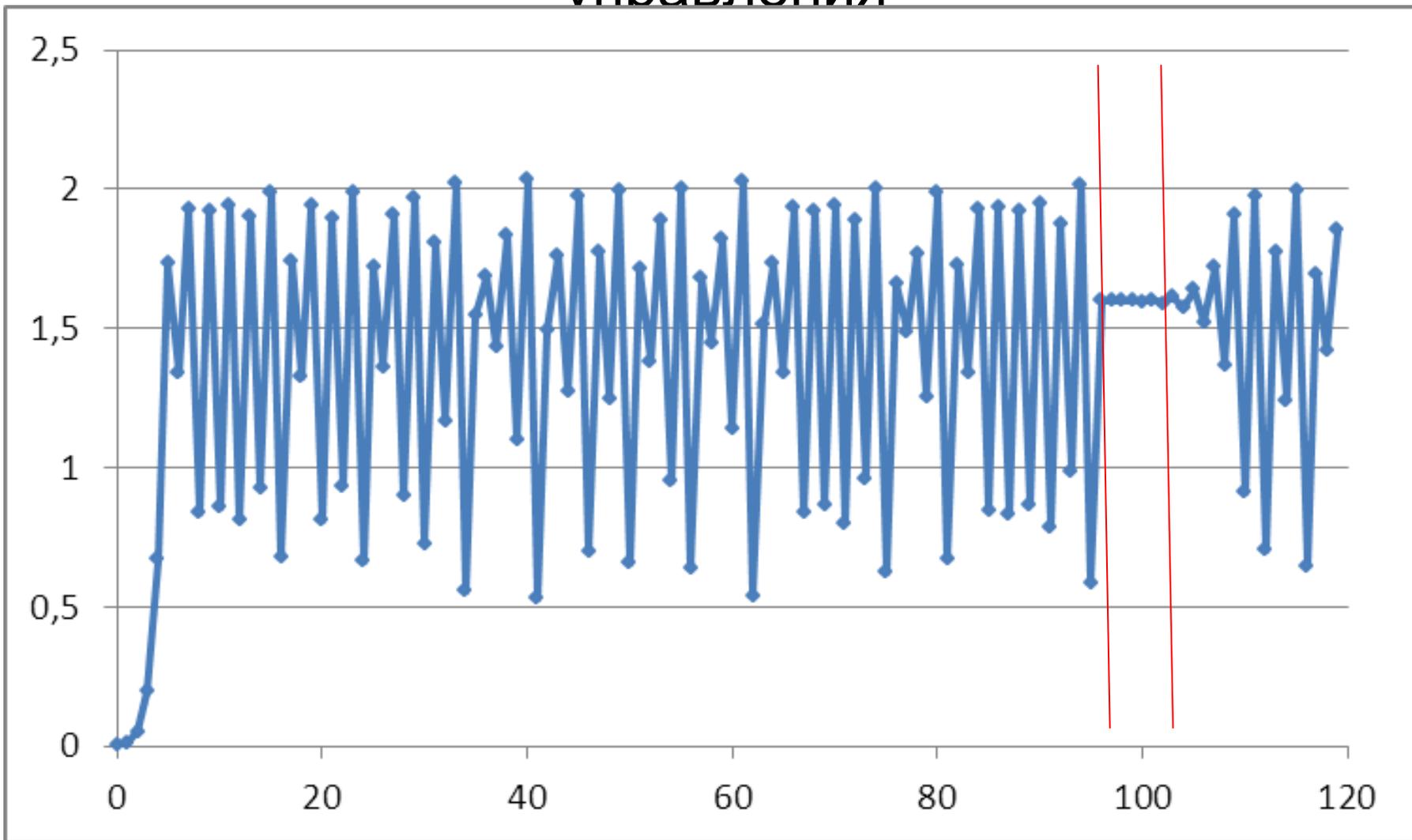


Ситуация 5.  $a > 3$  и  $0 < x_0 < K$  - долго продолжаться не может: процесс уходит в минус бесконечность, но несколько шагов такое может продолжаться. Это оценки в переходном процессе

# Хokusai. Большая волна в Канагаве



# Еще одно неприятное свойство динамического хаоса, маскирующее эффективность управления



## Модификации модели и их взаимосвязь с базовой моделью.

Пусть реальный анализируемый процесс порождается отображением вида

$$X_{n+1} = \lambda X_n + X_n R (F - X_n) \text{ (пример - нетвердые сторонники)}$$

где  $\lambda$  – положительный коэффициент;  $R$  и  $F$ , соответственно интенсивность и ограничение процесса.

$$R = \frac{X_1^2 - X_0 X_2}{X_0 X_1 (X_1 - X_0)} \quad A = R \quad F = \frac{X_1 - \lambda X_0}{X_0 R} + X_0 \quad F = K + \frac{1 - \lambda}{A}$$
$$a = AK = \frac{X_1 - X_0}{X_0} + AX_0 \quad r = RF = \frac{X_1 - \lambda X_0}{X_0} + AX_0 \quad r = a + 1 - \lambda$$

Пусть реальный анализируемый процесс порождается отображением вида

$$X_{n+1} = X_n + X_n T (Q - \nu X_n) \text{ (пример - крикливые сторонники)}$$

где  $\nu$  – положительный коэффициент;  $T$  и  $Q$ , соответственно интенсивность и ограничение процесса.

$$T = \frac{A}{\nu} \quad Q = \nu K \quad TQ = AK = a$$

На основании измерений  $X_n$  невозможно определить параметры  $\lambda$  или  $\nu$ .

Без дополнительной априорной информации мы не сможем сказать какая из ситуаций порождает наблюдаемый временной ряд.

Достоинством предлагаемой для аппроксимации модели является то, что она описывает широко распространенный сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу через каскад удвоения бифуркаций. Как показано в теории универсальности, такой сценарий свойственен широкому классу унимодальных функций, удовлетворяющих условию, что для них производная Шварца  $Sf(x) < 0$ , где

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{2}{3} \frac{(f''(x))^2}{(f'(x))^2}$$

Поскольку, мы крайне редко можем точно знать функцию, порождающую анализируемый процесс, то универсальность нашей аппроксимирующей модели позволяет без искажений аппроксимировать процессы, порождаемые функциями, отвечающими условиям универсальности.

# Сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу через удвоение бифуркаций

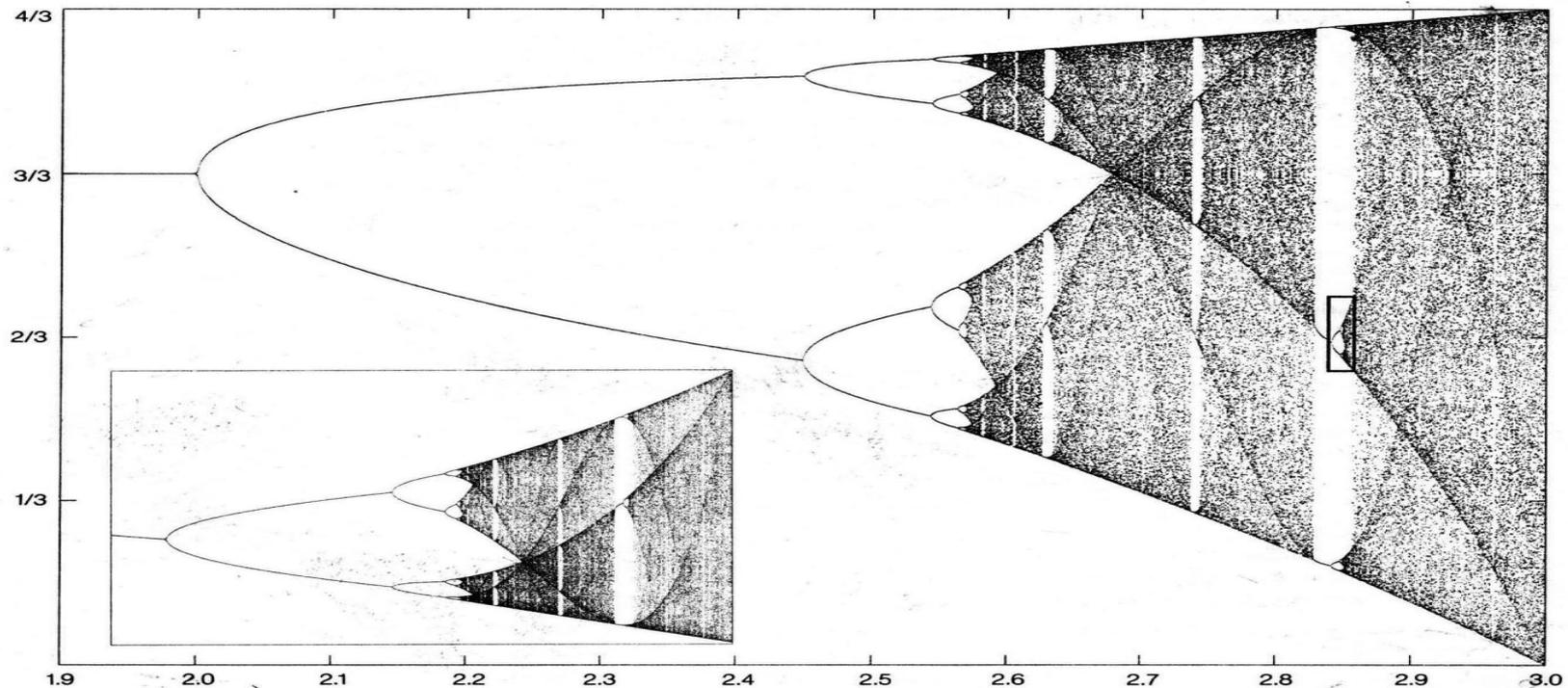


Рисунок из книги Н.-О. Peitgen, Р.Н. Richter The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1986 (русский перевод: Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем: Пер. с англ. – М.: Мир 1993)

1983 г. Октябрь Том 141, вып. 2 УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ  
УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ В ПОВЕДЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ М. Фейгенбаум

Feigenbaum M. J. Universal Behavior in Nonlinear Systems— Los Alamos Science. 1980, v. 1, No. 1, pp. 4—27. Перевод С. Г. Тиходеева.

Нелинейная экономическая динамика. Пер. с англ. Пу Т.

Мы можем провести первичный анализ процесса по трем точкам сразу по нескольким направлениям.

Рассчитать следующее значение процесса, в предположении, что процесс останется неизменным. Это предположение базируется на допущении «на процесс и в дальнейшем будут воздействовать только действующие факторы». Такой подход позволяет получить теоретическую модель процесса, отвечая на вопрос «**Что бы было, если бы далее ничего не менялось?**».

Оценить характер текущей динамики – по полученному значению  $a$ , которое и определяет в большинстве случаев характер динамики. В некоторых случаях нам понадобится дополнительный анализ с учетом соотношения  $a$  и  $x_0$ .

Сравнить несколько процессов по величинам ограничений –  $K_i$ , характеру динамики –  $a_i$ , близости процессов к ограничениям  $K_i, -X_{ni}$ .

Это первый шаг к поиску взаимосвязей анализируемых процессов.

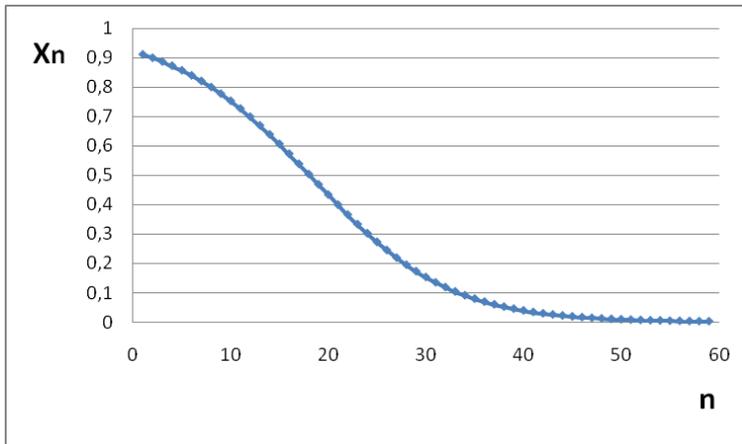
**Особые точки ( $X_n^* = X_{n+1}^*$ ) устойчивы:**

$$X_1^* = 0 \text{ при } -2 < a = AK < 0$$

$$X_2^* = K \text{ при } 0 < a = AK < 2$$

**Отличие от биологических моделей по устойчивости особых точек.**

Ситуация 6.  $-1 < a < 0$  и  $x_0 < 1$ .



Ситуация 7.  $a < -1$  и  $X_0 < K$ . Через некоторое время (это зависит от величины  $x_0$ ) значения процесса могут принимать как положительные, так и отрицательные значения – это будут режимы, либо затухающих ( $-2 < a < -1$  – аналог ситуации 2), либо устойчивых колебаний относительно нуля ( $-2,57 < a < -2$  – аналог ситуации 3), либо хаотический процесс относительно нуля, как неустойчивой неподвижной точки ( $a < -2,57$  – аналог ситуации 4). При  $a < -3$  через некоторое время процесс будет устремляться к бесконечности.

Отрицательные значения процесса в некоторых ситуациях можно интерпретировать, например, в социально – политических моделях это противники. В финансовых ситуациях это могут быть проценты по кредитам или задолженность.

# Группа ситуаций при $x_0 > 1$ (в реальном анализируемом процессе $X_0 > K$ ). Ограничения управления по начальным условиям

Ситуация 8.  $a > 0$  и  $x_0 > 1$ . Такая ситуация долго продолжаться не будет; на следующем шаге :

- либо произойдет переход к ситуациям с 1 по 5, если

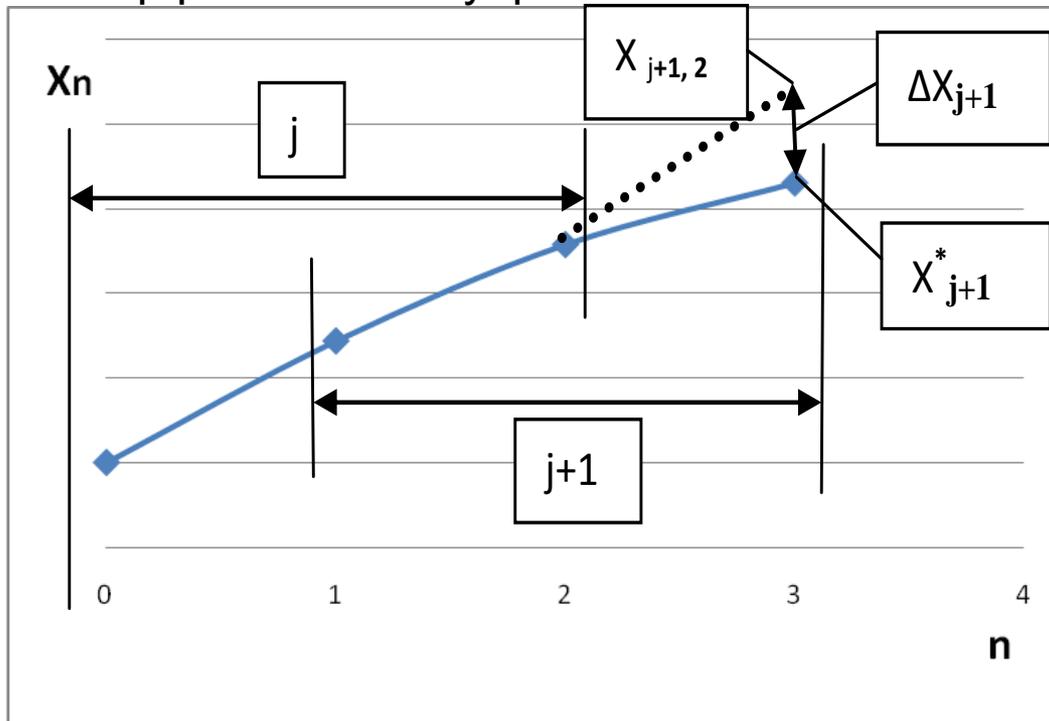
$$a = AK < \frac{1}{X_0 - K}$$

- либо у процесса станут отрицательные значения он начнет стремиться в минус бесконечность (при управлении социальным процессом Вы перестарались демонстрируя первоначально слишком большое число «сторонников»);
- либо процесс попадет в неустойчивую нулевую точку.

Ситуация 9.  $a < 0$  и  $x_0 > 1$ . Значения процесса на каждом шаге только увеличиваются: процесс стремится к плюс бесконечности. Это рост без ограничений. Однако, такая ситуация не может продолжаться долго и она, безусловно сменится параметрами модели, демонстрирующими динамику в условиях ограничений. Это ситуация переходного процесса

# Анализ тенденций одного процесса в разные моменты времени. Оценка эффективности управления

Вместо временной последовательности данных анализируемого процесса, мы получаем временные последовательности оценок аппроксимирующих моделей  $K_j$   $A_j$   $a_j$ , где «j» - номер окна. Мы можем оценить влияние внешних факторов, воздействующих на реальный процесс, в том числе и эффективность управления.



Как соотносятся теперь оценки параметров модели для окон « $j$ » и « $j + 1$ », к каким изменениям параметров исходной аппроксимирующей модели это приведет? Обозначим новое значение процесса для окна « $j + 1$ » как  $X_{j+1,2} = \bar{X}_{j+1,2} + \Delta X_{j+1}$ , то есть, значение в соответствии с тенденцией предыдущего окна, плюс некая добавка от несовпадения тенденций. Новые оценки базовой модели запишем как  $A_{j+1} = A_j + \Delta A_{j+1}$  и  $K_{j+1} = K_j + \Delta K_{j+1}$

Подставив новое значение процесса, получим

$$A_{j+1} = A_j + \Delta A_{j+1} = \frac{X_{j+1,1}^2 - X_{j+1,0}(\bar{X}_{j+1,2} + \Delta X_{j+1})}{X_{j+1,0} X_{j+1,1} (X_{j+1,1} - X_{j+1,0})}$$

откуда, с учетом равенства оценок при сохранении тенденции, следует, что расхождение процесса и тенденции  $\Delta X_{j+1}$  вызовет изменение оценки:

$$\Delta A_{j+1} = \frac{-\Delta X_{j+1}}{X_{j+1,1} (X_{j+1,1} - X_{j+1,0})}$$

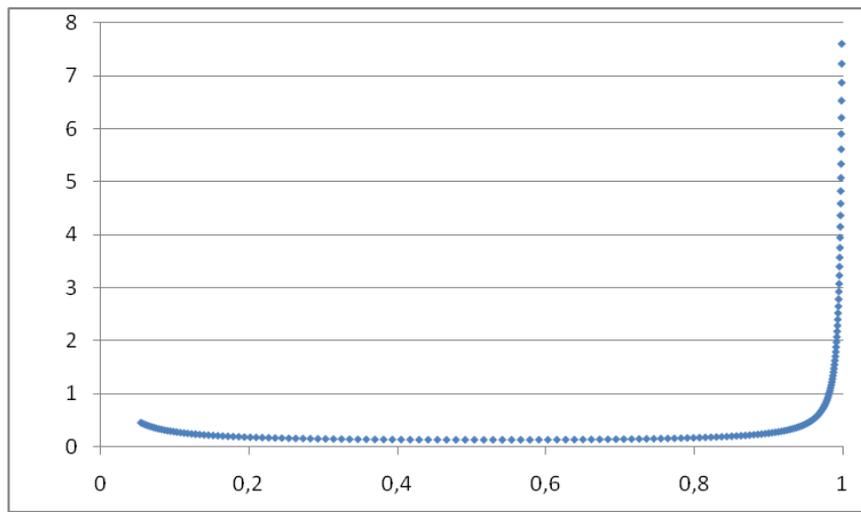
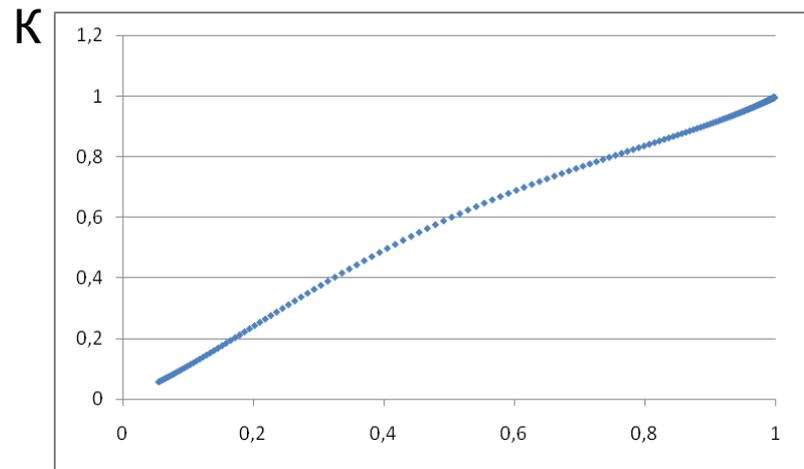
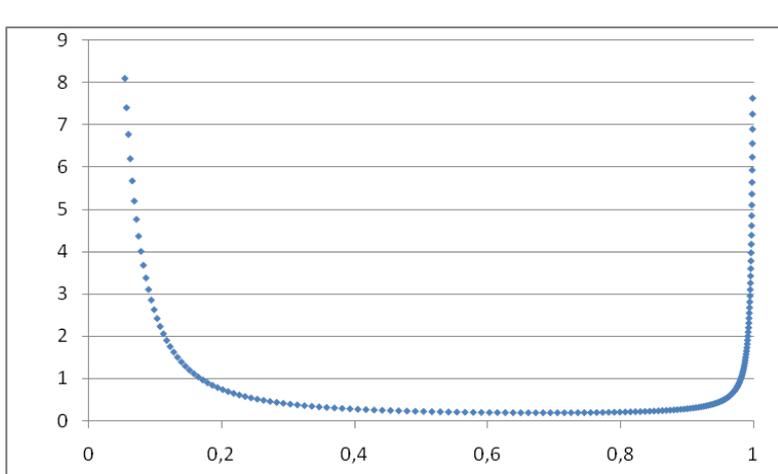
$$K_{j+1} = K_j + \Delta K_{j+1} = \frac{X_{j+1,1} - X_{j+1,0}}{X_{j+1,0} (A_j + \Delta A_{j+1})} + X_{j+1,0}$$

При превышении значения процесса, относительно сформировавшейся тенденции, интенсивность процесса уменьшится ( $A_{j+1} < A_j$ ), причем возможна ситуация, когда  $A_{j+1}$  и  $K_{j+1}$  станут отрицательными.

Сравнивая последовательности  $K_j, A_j, a_j$ , мы можем оценить не только момент воздействия на процесс новых факторов, но и характер их воздействия (увеличивают или уменьшают значения процесса по отношению к сформировавшейся тенденции).

$X_0 = 0,05$ ;  $K = 1$ ;  $A = 0,05$ ; скачок  $\Delta X_{j+1} = -0,001$

Оценки  $A_{j+1}$ ;  $K_{j+1}$ ;  $a_{j+1}$  в зависимости от того, при каком значении процесса произошел отрицательный скачок.



# Индекс потенциала человеческого развития (ИЧР). HDI (Human Development Index)

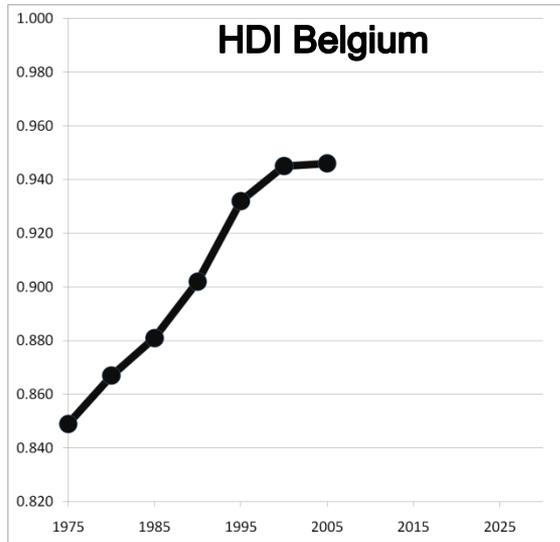
Компонентами индекса являются параметры:

- ожидаемая продолжительность жизни;
- ВВП на душу населения;
- включенность населения в образование и уровень грамотности.

Временной отрезок – 1975-2005 гг. с пятилетним интервалом.

Подробнее см. сайт <http://hdr.undp.org/en/statistics/>.

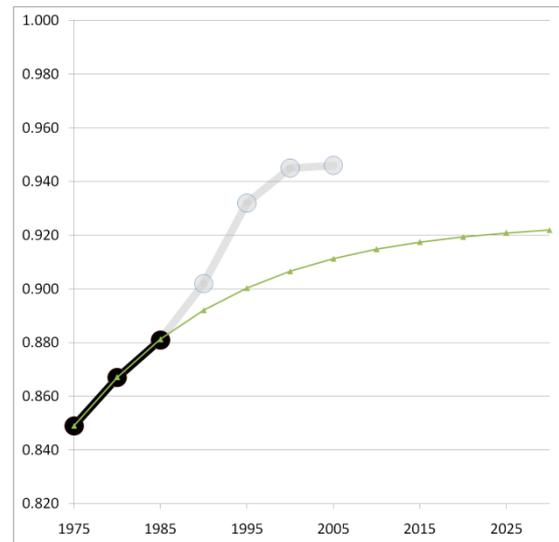
Индекс также описывается в работе: Мельвиль А.Ю., Ильин М.В. Мелешкина Е.Ю., Миронюк М.Г., Полунин Ю.А., Тимофеев И.Н. *Политический атлас современности*. Москва: Росспэн, 2007. – С. 27-30.



Исходный временной ряд

*Initial time series*

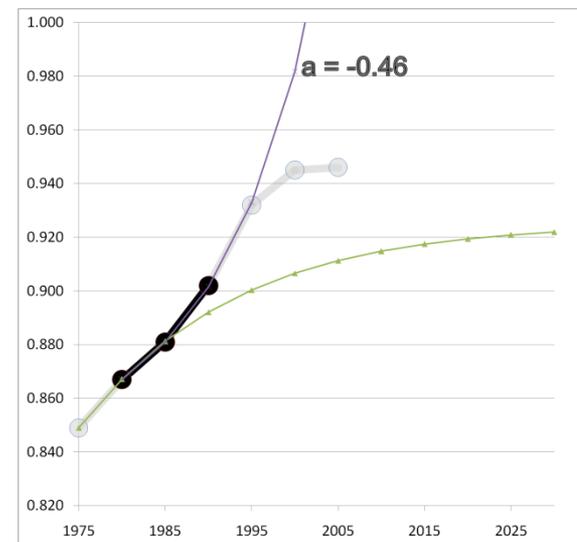
*Пример рассчитан  
А.Ю. Зиновьевым и  
Ю.А.Полуниным по  
данным HDI 2007  
года*



В 1985 г. делается прогноз на основе значений трех лет (1975-1985) о том, что к 2030г. ИЧР выйдет на 0.925 (значение  $K$ ). Однако, уже в 1990 рост ИЧР опережает прогноз (играет роль какой-то внешний фактор)

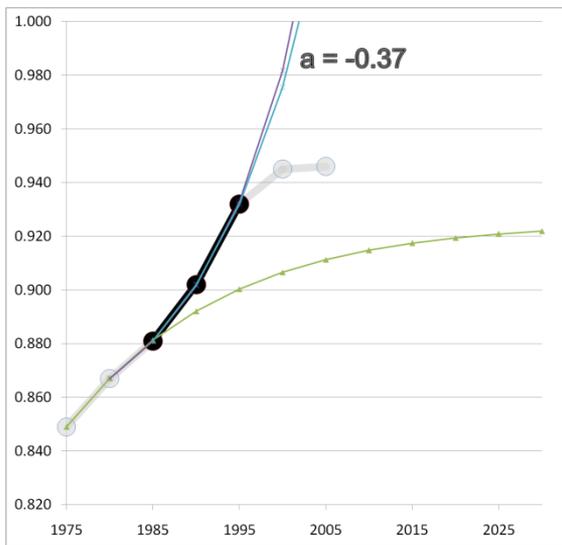
*In 1985 one makes a prognosis based on the HDI values during the last three years (1975-1985) about that towards 2030 HDI will gradually achieve 0.925 ( $K$  value).*

*However, already in 1990 HDI becomes higher than predicted (some external factor plays a role).*



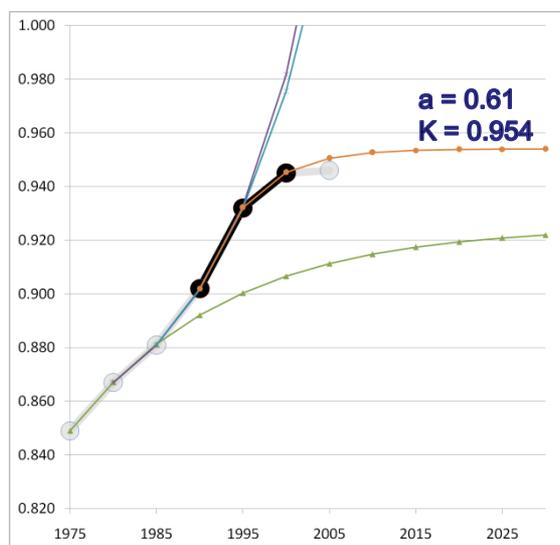
В 1990г. прогноз уточняется с использованием периода 1980-1990. Предсказывается неограниченный экспоненциальный рост ( $a < 0$ ) и в 1995г. прогноз сбывается.

*In 1990 the prognosis is corrected with use of the (1980-1990) period. One predicts unlimited growth ( $a < 0$ ) and in 1995 HDI achieves the predicted value.*



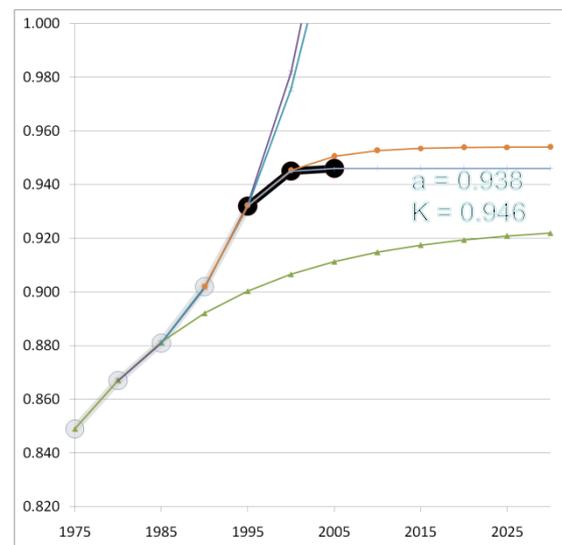
В 1995г. прогноз качественно остается прежним – экспоненциальный рост с чуть меньшими темпами (значение **a**). Однако, в 2000г. этот прогноз оказывается слишком оптимистичен (какой-то внешний фактор резко ограничивает рост).

*In 1995 the prognosis qualitatively remains the same: exponential growth with slightly slower speed (**a** value). However, in 2000 this prognosis happens to be too optimistic (some external factor now limits the growth)*



В 2000г. на основе периода (1990-2000) прогнозируется быстрая (значение **a**) стагнация к значению ИЧР 0.954 (значение **K**). Однако, даже этот прогноз к 2005г. оказывается слишком оптимистичен.

*In 2000 based on the (1990-2000) period one predicts rapid (**a** value) stagnation to the HDI values 0.954 (**K** value). However, even this prognosis happens to be too optimistic towards 2005.*



В 2005г. прогноз корректируется: далее предсказывается полная стагнация со значением ИЧР в 0.946 (достигнут предел роста)

*In 2005 the prognosis is corrected: further one predicts complete stagnation with HDI value 0.946 (growth limit has been reached).*

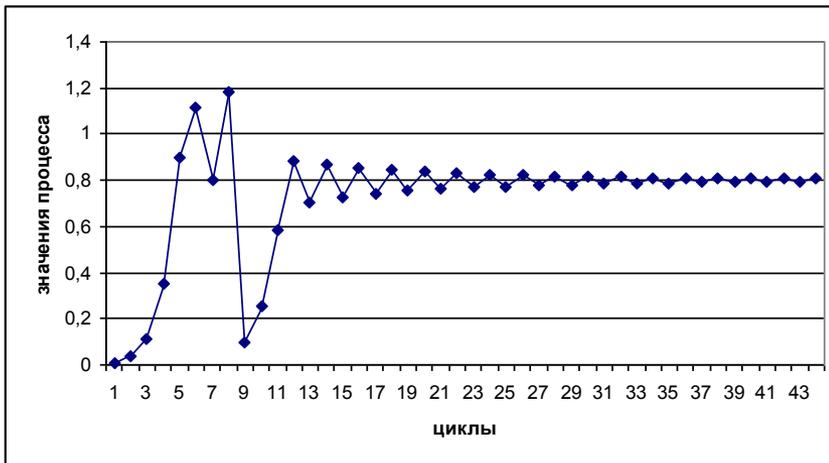
## Динамика ИЧР Бельгии (данные 2012 года)

|      | Belgium | Расчетное<br>ограничени<br>е процесса<br>- К | Расчетная<br>интенсивн<br>ость<br>процесса<br>"А" | Нормирова<br>нная<br>интенсивн<br>ость<br>процесса<br>"а" | Нормирова<br>нное<br>значение<br>процесса |
|------|---------|--|---|---|---|
| 2000 | 0,876   |  |   |   |   |
| 2005 | 0,873   |  |   |   |   |
| 2010 | 0,885   | 0,875  | 7,046   | 6,167   | 1,011                                     |

## Динамика ИЧР Греции (данные 2012 года)

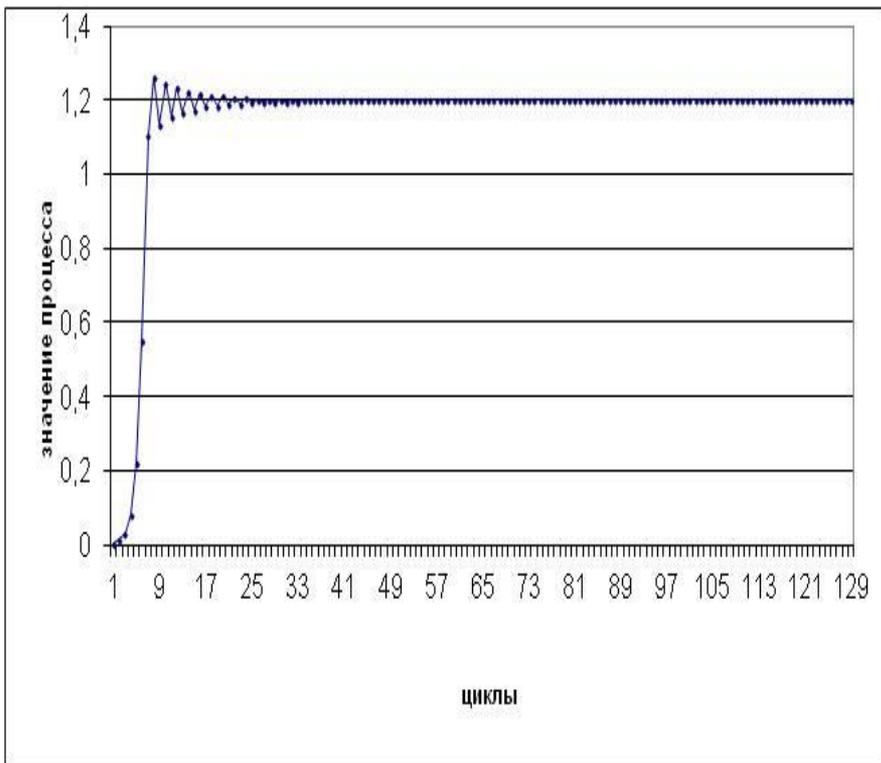
|      | Greece | Расчетное<br>ограничен<br>ие<br>процесса<br>К | Расчетная<br>интенсивн<br>ость<br>процесса<br>"А" | Нормирова<br>нная<br>интенсивн<br>ость<br>процесса<br>"а" | Нормирова<br>нное<br>значение<br>процесса |
|------|--------|---|---|---|---|
| 2000 | 0,802  |   |   |   |   |
| 2005 | 0,856  |   |   |   |   |
| 2010 | 0,862  | 0,862   | 1,109   | 0,956   | 1,000                                     |

# Оценка параметров при скачкообразном изменении ограничений процесса (уменьшение на 20%)



| Реальное ограничение процесса | Расчетное ограничение процесса | Расчетная интенсивность "А" | Нормированная интенсивность "а" |
|-------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| 1                             | 1                              | 2,4                         | 2,4                             |
| 1                             | 1                              | 2,4                         | 2,4                             |
| 1                             | 1                              | 2,4                         | 2,4                             |
| <b>0,8</b>                    | <b>0,93163</b>                 | <b>3,6533</b>               | <b>3,40352</b>                  |
| <b>0,8</b>                    | <b>0,8</b>                     | <b>2,4</b>                  | <b>1,92</b>                     |

# Оценка параметров при скачкообразном изменении ограничений процесса (увеличение на 20%)



| Реальное ограничение процесса | Расчетная ограничение процесса | Расчетная интенсивность "А" | Нормированная интенсивность "а" |
|-------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| 1                             | 1,000                          | 0,850                       | 0,850                           |
| 1                             | 1,000                          | 0,850                       | 0,850                           |
| 1                             | 1,000                          | 0,850                       | 0,850                           |
| 1,2                           | -0,058                         | -11,118                     | 0,647                           |
| 1,2                           | 1,200                          | 0,850                       | 1,020                           |

# Изменение оценки параметров при линейном увеличении ограничений процесса



# Изменение оценки параметров при линейном уменьшении ограничений процесса



# Анализ динамики числа российских компаний.

Эксперт №20 2013 «ХРУПКАЯ СИЛА СРЕДНЕГО БИЗНЕСА» Ю.ПОЛУНИН, А.Юданов



# Анализ динамики числа российских компаний.

| Крупный и средний бизнес (свыше 200 млн. руб.) | Число компаний с выручкой более 200 млн. руб. | Оценка потенциала процесса - К | Оценка интенсивности и процесса "А" | Оценка нормированной интенсивности и процесса "а" | Нормированное значение процесса |
|--|---|--------------------------------|-------------------------------------|---|---------------------------------|
| 2004 г.  | 20099   |                                |                                     |   |                                 |
| 2005 г.  | 24998   |                                |                                     |   |                                 |
| 2006 г.  | 31270   | -146754                        | -0,000001                           | 0,21  | -0,21                           |
| 2007 г.  | 39934   | -35132                         | -0,000004                           | 0,15  | -1,14                           |
| 2008 г.  | 46144   | 51017                          | 0,000014                            | 0,72  | 0,90                            |
| 2009 г.  | 40335   | 43366                          | 0,000045                            | 1,97  | 0,93                            |
| 2010 г.  | 46332   | 43481                          | 0,000047                            | 2,06  | 1,07                            |
| 2011 г.  | 48684   | 49441                          | 0,000016                            | 0,81  | 0,98                            |

# Анализ динамики числа компаний крупного бизнеса

|        | Крупный бизнес | Расчетное ограничение процесса - К | Расчетная интенсивность процесса "А" | Нормированная интенсивность процесса "а" | Нормированное значение процесса |
|--------|----------------|------------------------------------|--------------------------------------|--|---------------------------------|
| 2004 г | 177            |                                    |                                      |  |                                 |
| 2005 г | 222            |                                    |                                      |  |                                 |
| 2006 г | 292            | -10                                | -0,001357                            | 0,01                                     | -28,32                          |
| 2007 г | 392            | -591                               | -0,000388                            | 0,23                                     | -0,66                           |
| 2008 г | 502            | 846                                | 0,000619                             | 0,52                                     | 0,59                            |
| 2009 г | 430            | 465                                | 0,003855                             | 1,79                                     | 0,93                            |
| 2010 г | 535            | 475                                | 0,005384                             | 2,56                                     | 1,13                            |
| 2011 г | 638            | 926                                | 0,000492                             | 0,46                                     | 0,69                            |

# Сравнение параметров моделей динамики числа российских компаний (особенности метода).

| <b>Расчетное<br/>ограничен<br/>ие<br/>процесса<br/>- К<br/>(потенциа<br/>л роста)</b> | <b>Оценка<br/>потенциал<br/>а роста<br/>числа<br/>российски<br/>х компаний</b> | <b>Оценка<br/>потенциал<br/>а роста<br/>среднего<br/>бизнеса</b> | <b>Оценка<br/>потенциал<br/>а роста<br/>крупного<br/>бизнеса</b> | <b>Сумма<br/>отдельных<br/>оценок</b> | <b>Разность<br/>общей и<br/>суммарной<br/>оценки<br/>потенциало<br/>в</b> |
|---|--|--|--|---------------------------------------|---|
| <b>2007 г.</b>  | <b>-35132</b>  | <b>-34635</b>  | <b>-591</b>  | <b>-35226</b>                         | <b>94</b>   |
| <b>2008 г.</b>  | <b>51017</b>   | <b>50354</b>   | <b>846</b>   | <b>51200</b>                          | <b>-183</b>   |
| <b>2009 г.</b>  | <b>43366</b>   | <b>42903</b>   | <b>465</b>   | <b>43368</b>                          | <b>-2</b>   |
| <b>2010 г.</b>  | <b>43481</b>   | <b>43004</b>   | <b>475</b>   | <b>43479</b>                          | <b>2</b>  |
| <b>2011 г.</b>  | <b>49441</b>   | <b>48733</b>   | <b>926</b>   | <b>49659</b>                          | <b>-218</b>   |

# Сравнение параметров моделей динамики числа российских компаний.

| Оценка нормированной интенсивности процесса "а" | Компании с выручкой более 200 млн. руб. | Средний бизнес | Крупный бизнес |
|---|---|----------------|----------------|
| 2007 г.   | 0,15                                    | 0,15           | 0,23           |
| 2008 г.   | 0,72                                    | 0,72           | 0,52           |
| 2009 г.   | 1,97                                    | 1,97           | 1,79           |
| 2010 г.   | 2,06                                    | 2,05           | 2,56           |
| 2011 г.   | 0,81                                    | 0,82           | 0,46           |

# Сравнение параметров моделей динамики числа российских компаний.

| <b>Нормированное значение процесса</b> | <b>Компании с выручкой более 200 млн. руб.</b> | <b>Средний бизнес</b> | <b>Крупный бизнес</b> |
|--|--|-----------------------|-----------------------|
| <b>2007 г.</b>                         | <b>-1,14</b>                                   | <b>-1,14</b>          | <b>-0,66</b>          |
| <b>2008 г.</b>                         | <b>0,9</b>                                     | <b>0,91</b>           | <b>0,59</b>           |
| <b>2009 г.</b>                         | <b>0,93</b>                                    | <b>0,93</b>           | <b>0,93</b>           |
| <b>2010 г.</b>                         | <b>1,07</b>                                    | <b>1,06</b>           | <b>1,13</b>           |
| <b>2011 г.</b>                         | <b>0,98</b>                                    | <b>0,99</b>           | <b>0,69</b>           |

## Динамика выручки типичной российской компании среднего бизнеса (медиана)

| Выручка | Средний бизнес, выручка (млн. руб.) | Расчетное ограничение процесса - K (млн. руб.) | Расчетная интенсивность процесса "А" | Нормированная интенсивность процесса "а" | Нормированное значение процесса |
|---------|-------------------------------------|--|--------------------------------------|--|---------------------------------|
| 2001    | 67,8                                | 128  | 0,004810                             | 0,62                                     | 0,53                            |
| 2002    | 83,7                                | 98   | 0,007803                             | 0,76                                     | 0,86                            |
| 2003    | 103,0                               | 825  | 0,000310                             | 0,26                                     | 0,12                            |
| 2004    | 131,2                               | -16  | -0,002300                            | 0,04                                     | -8,04                           |
| 2005    | 163,5                               | 379  | 0,000994                             | 0,38                                     | 0,43                            |
| 2006    | 210,1                               | -74  | -0,001199                            | 0,09                                     | -2,83                           |
| 2007    | 273,1                               | -740   | -0,000315                            | 0,23                                     | -0,37                           |
| 2008    | 334,3                               | 459  | 0,001203                             | 0,55                                     | 0,73                            |
| 2009    | 298,1                               | 314  | 0,005429                             | 1,71                                     | 0,95                            |
| 2010    | 349,7                               | 320  | 0,007777                             | 2,49                                     | 1,09                            |
| 2011    | 451,2                               | 222  | -0,002280                            | -0,51                                    | 2,03                            |

# Динамика выручки типичной крупной российской компании (медиана)

| Выручка | Крупный бизнес, выручка (млн. руб.) | Расчетное ограничение процесса - K (млн. руб.) | Расчетная интенсивность процесса "А" | Нормированная интенсивность процесса "а" | Нормированное значение процесса |
|---------|-------------------------------------|--|--------------------------------------|--|---------------------------------|
| 2001    | 3859,9                              | 5939   | 0,000124                             | 0,74                                     | 0,65                            |
| 2002    | 4758,6                              | 5449   | 0,000147                             | 0,80                                     | 0,87                            |
| 2003    | 6475,4                              | 2225   | -0,000142                            | -0,32                                    | 2,91                            |
| 2004    | 8666,1                              | 32308  | 0,000013                             | 0,42                                     | 0,27                            |
| 2005    | 11384,1                             | 36509  | 0,000011                             | 0,41                                     | 0,31                            |
| 2006    | 14079,9                             | 19761  | 0,000028                             | 0,56                                     | 0,71                            |
| 2007    | 18245,7                             | 577  | -0,000022                            | -0,01                                    | 31,64                           |
| 2008    | 23486,8                             | 157012   | 0,000002                             | 0,33                                     | 0,15                            |
| 2009    | 22497,8                             | 22817  | 0,000063                             | 1,43                                     | 0,99                            |
| 2010    | 28770,5                             | 23357  | 0,000324                             | 7,58                                     | 1,23                            |
| 2011    | 35598,6                             | 64656  | 0,000007                             | 0,43                                     | 0,55                            |

# Динамика выручки крупных стабильных компаний (медиана)

|      | Медиана<br>выручки<br>крупных<br>компаний (млн.<br>руб.) | Расчетное<br>ограничен<br>ие<br>процесса<br>- К (млн.<br>руб.) | Расчетная<br>интенсивн<br>ость<br>процесса<br>"А" | Нормиров<br>анная<br>интенсивн<br>ость<br>процесса<br>"а" | Нормирова<br>нное<br>значение<br>процесса |
|------|--|--|---|---|---|
| 2005 | 12366,2815   |  |   |   |   |
| 2006 | 16020,1055   |  |   |   |   |
| 2007 | 20449,4810   | 69252  | 0,000005  | 0,36  | 0,30                                      |
| 2008 | 25383,8280   | 50818  | 0,000008  | 0,40  | 0,50                                      |
| 2009 | 24035,2775   | 24493  | 0,000060  | 1,46  | 0,98                                      |
| 2010 | 30095,5655   | 25149  | 0,000226  | 5,69  | 1,20                                      |
| 2011 | 36063,0440   | 52408  | 0,000009  | 0,47  | 0,69                                      |

## Динамика выручки средних стабильных компаний (медиана)

|      | Медиана<br>выручки<br>средних<br>компаний<br>(млн. руб.) | Расчетно<br>е<br>ограниче<br>ние<br>процесса<br>- К | Расчетна<br>я<br>интенсив<br>ность<br>процесса<br>"А" | Нормиро<br>ванная<br>интенсив<br>ность<br>процесса<br>"а" | Нормиров<br>анное<br>значение<br>процесса |
|------|--|---|---|---|---|
| 2005 | 484,1950   |   |   |   |   |
| 2006 | 626,6100   |   |   |   |   |
| 2007 | 787,4650   | 1604  | 0,000263  | 0,42  | 0,49                                      |
| 2008 | 936,7100   | 1241  | 0,000418  | 0,52  | 0,75                                      |
| 2009 | 826,2930   | 879   | 0,002060  | 1,81  | 0,94                                      |
| 2010 | 945,5860   | 887   | 0,002375  | 2,11  | 1,07                                      |
| 2011 | 1057,7170  | 1494  | 0,000216  | 0,32  | 0,71                                      |

# Динамика чистой прибыли крупных стабильных компаний (медиана)

|      | Чистая прибыль, крупный бизнес | Расчетное ограничение процесса - К | Расчетная интенсивность процесса "А" | Нормированная интенсивность процесса "а" | Нормированное значение процесса |
|------|--------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|--|---------------------------------|
| 2001 | 107,3                          | 102                                | 0,038382                             | 3,92                                     | 1,05                            |
| 2002 | 112,1                          | 119                                | 0,003719                             | 0,44                                     | 0,94                            |
| 2003 | 116,1                          | 133                                | 0,001709                             | 0,23                                     | 0,87                            |
| 2004 | 227,3                          | 112                                | -0,226405                            | -25,33                                   | 2,03                            |
| 2005 | 349,4                          | 370                                | 0,003776                             | 1,40                                     | 0,95                            |
| 2006 | 512,2                          | 1146                               | 0,000585                             | 0,67                                     | 0,45                            |
| 2007 | 723,0                          | 1747                               | 0,000333                             | 0,58                                     | 0,41                            |
| 2008 | 723,4                          | 723                                | 0,001950                             | 1,41                                     | 1,00                            |
| 2009 | 722,0                          | 723                                | 0,007243                             | 5,24                                     | 1,00                            |
| 2010 | 1111,6                         | 723                                | 0,396098                             | 286,52                                   | 1,54                            |
| 2011 | 1178,2                         | 1160                               | 0,001231                             | 1,43                                     | 1,02                            |

# Динамика чистой прибыли средних стабильных компаний (медиана)

|      | Чистая прибыль, средний бизнес | Расчетное ограничение процесса - К | Расчетная интенсивность процесса "А" | Нормированная интенсивность процесса "а" | Нормированное значение процесса |
|------|--------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|--|---------------------------------|
| 2001 | 4,1                            | 4                                  | 0,558390                             | 2,17                                     | 1,05                            |
| 2002 | 4,5                            | -2                                 | -0,016927                            | 0,04                                     | -2,04                           |
| 2003 | 4,1                            | 4                                  | 0,452008                             | 1,95                                     | 0,95                            |
| 2004 | 6,1                            | 4                                  | 1,406507                             | 6,26                                     | 1,37                            |
| 2005 | 8,6                            | 19                                 | 0,032234                             | 0,61                                     | 0,45                            |
| 2006 | 12,9                           | -8                                 | -0,030485                            | 0,23                                     | -1,69                           |
| 2007 | 18,9                           | 67                                 | 0,008547                             | 0,57                                     | 0,28                            |
| 2008 | 16,4                           | 18                                 | 0,099705                             | 1,75                                     | 0,93                            |
| 2009 | 12,6                           | 22                                 | -0,039132                            | -0,87                                    | 0,56                            |
| 2010 | 15,4                           | 14                                 | 0,119333                             | 1,72                                     | 1,06                            |
| 2011 | 13,1                           | 14                                 | 0,132552                             | 1,89                                     | 0,92                            |

# Проблема выбора интервалов времени

| значение X | Расчетное ограничение процесса - K | Расчетная интенсивность процесса "A" | Нормированная интенсивность процесса "a" | Нормированное значение процесса | ЧЕРЕЗ одно значение X | Расчетное ограничение процесса - K | Расчетная интенсивность процесса "A" | Нормированная интенсивность процесса "a" | Нормированное значение процесса | ЧЕРЕЗ два значения X | Расчетное ограничение процесса - K | Расчетная интенсивность процесса "A" | Нормированная интенсивность процесса "a" | Нормированное значение процесса |
|------------|------------------------------------|--------------------------------------|--|---------------------------------|-----------------------|------------------------------------|--------------------------------------|--|---------------------------------|----------------------|------------------------------------|--------------------------------------|--|---------------------------------|
| 0,005      |                                    |                                      |  |                                 | 0,005                 |                                    |                                      |  |                                 | 0,005                |                                    |                                      |  |                                 |
| 0,012711   |                                    |                                      |  |                                 | 0,032163              |                                    |                                      |  |                                 | 0,080413             |                                    |                                      |  |                                 |
| 0,032163   | 1,000                              | 1,550                                | 1,550                                    | 0,032                           | 0,19503               | 0,405                              | 13,581                               | 5,501                                    | 0,482                           | 0,819982             | 0,198                              | 78,043                               | 15,473                                   | 4,136                           |
| 0,080413   | 1,000                              | 1,550                                | 1,550                                    | 0,080                           | 0,819982              | 0,476                              | 11,416                               | 5,431                                    | 1,724                           | 1,015341             | 0,840                              | 12,114                               | 10,171                                   | 1,209                           |
| 0,19503    | 1,000                              | 1,550                                | 1,550                                    | 0,195                           | 0,969483              | 0,858                              | 4,836                                | 4,147                                    | 1,130                           | 0,997369             | 1,002                              | 1,310                                | 1,313                                    | 0,996                           |
| 0,43837    | 1,000                              | 1,550                                | 1,550                                    | 0,438                           | 0,991198              | 0,990                              | 1,070                                | 1,059                                    | 1,001                           | 1,000435             | 1,000                              | 1,156                                | 1,156                                    | 1,000                           |
| 0,819982   | 1,000                              | 1,550                                | 1,550                                    | 0,820                           | 0,997369              | 1,000                              | 0,745                                | 0,744                                    | 0,998                           | 0,999928             | 1,000                              | 1,168                                | 1,168                                    | 1,000                           |
| 1,04878    | 1,000                              | 1,550                                | 1,550                                    | 1,049                           | 0,999207              | 1,000                              | 0,710                                | 0,710                                    | 0,999                           | 1,000012             | 1,000                              | 1,166                                | 1,166                                    | 1,000                           |
| 0,969483   | 1,000                              | 1,550                                | 1,550                                    | 0,969                           | 0,99976               | 1,000                              | 0,701                                | 0,701                                    | 1,000                           | 0,999998             | 1,000                              | 1,166                                | 1,166                                    | 1,000                           |

## **Взаимосвязанные процессы** (пример - конкуренции идей).

Имеется совокупность лиц  $S$ , которых потенциально интересует проблема, которая обсуждается двумя конкурирующими группами. В момент времени  $n$  (время дискретно) число приверженцев первой группы  $X_n$ , а второй  $Y_n$ . Соответственно, число неопределившихся  $S - X_n - Y_n$ . Пусть эффективность привлечения новых приверженцев каждой из групп пропорциональна числу имеющихся сторонников  $X_n$  и  $Y_n$  и интенсивности «пропаганды»  $A$  и  $B$ . Пусть число приверженцев групп на следующем временном шаге  $n+1$  будет суммой числа приверженцев на шаге  $n$  и числа новых приверженцев. Тогда динамику числа приверженцев каждой из групп можно описать в виде отображений

$$X_{n+1} = X_n + X_n A (S - X_n - Y_n)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + Y_n B (S - X_n - Y_n)$$

Нормируя отображения, разделив правую и левую части на  $S$ , получим:

$$x_{n+1} = x_n + x_n \alpha (1 - x_n - y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + y_n \beta (1 - x_n - y_n);$$

где:  $x_n = X_n / S$  нормированные значения первого процесса;

$y_n = Y_n / S$  – нормированные значения второго процесса;

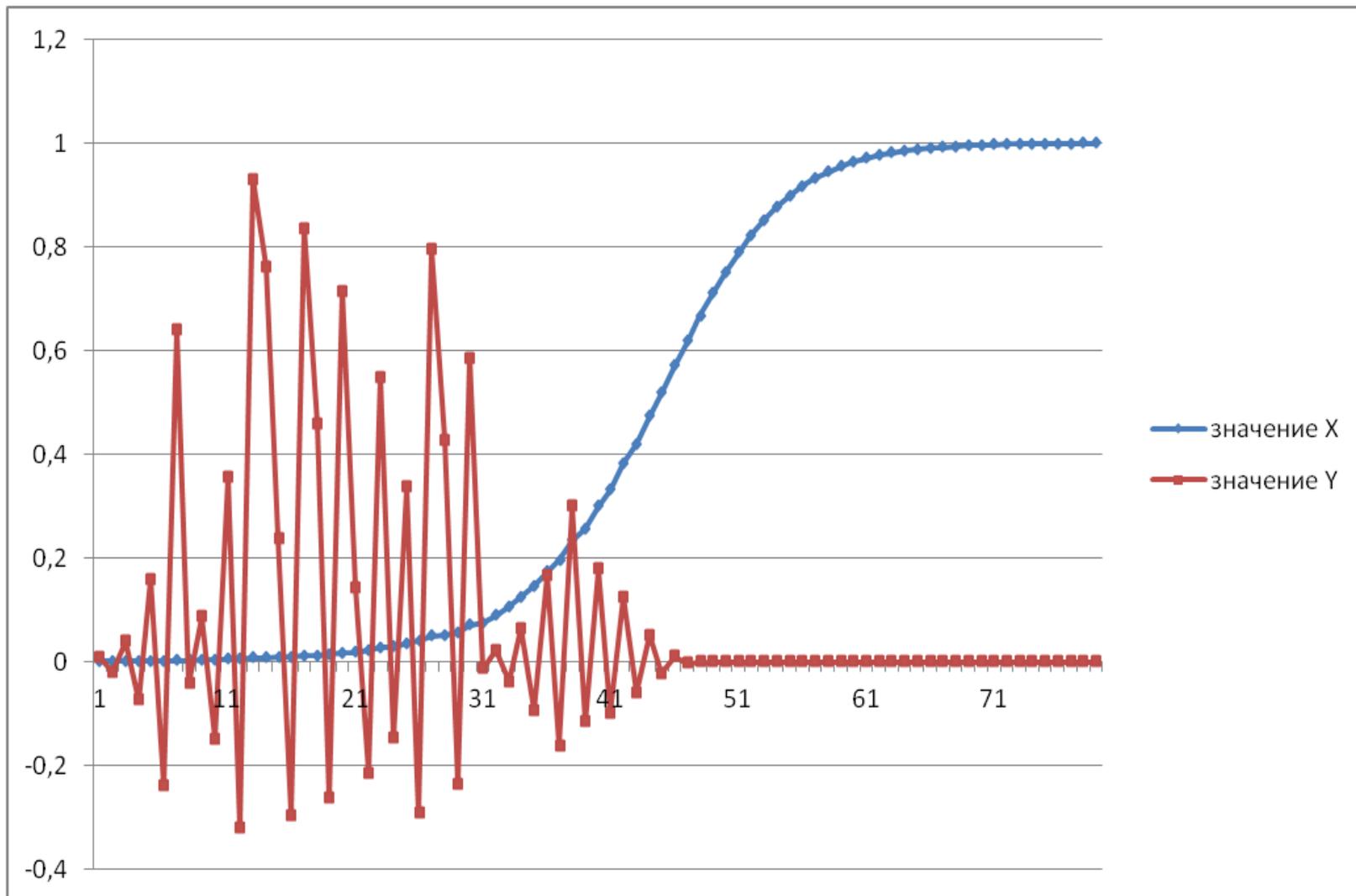
$\alpha = A S$  - нормированная интенсивность первого процесса;

$\beta = B S$  – нормированная интенсивность второго процесса.

Нормированные значения  $x_n$  и  $y_n$  соответствуют долям исходной совокупности  $S$ , которые составляют приверженцы первой и второй групп.

Эксперт №38 2006 г. «Механика хаоса» А.Громов, Т.Гурова, Ю.Полунин

|                |                            |                  |                           |
|----------------|----------------------------|------------------|---------------------------|
| <b>X</b>       |                            |                  |                           |
| <b>нулевое</b> | <b><math>\alpha</math></b> | <b>Y нулевое</b> | <b><math>\beta</math></b> |
| <b>0,001</b>   | <b>0,200</b>               | <b>0,010</b>     | <b>-2,975</b>             |



## Проверка гипотезы взаимосвязанности процессов по данным короткого временного интервала.

Пусть имеются по три значения каждого из анализируемых процессов  $X_0, X_1, X_2$  и  $Y_0, Y_1, Y_2$ . Для построения моделей процессов нам требуется знать пять параметров:  $X_0, Y_0, A, B$  и  $S$ .

Используя первый раз все значения первого процесса  $X_0, X_1, X_2$  и два значения второго процесса  $Y_0, Y_1$  можно получить оценки:  $S_x, A_x, B_x$  (индекс «x» обозначает то, что оценки получены с использованием трех значений первого процесса и двух второго):

$$A_x = \frac{X_1^2 - X_0 X_2}{X_0 X_1 (X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0)} \quad S_x = \frac{X_1 - X_0}{X_0 A_x} + X_0 + Y_0 \quad B_x = A_x \frac{X_0 (Y_1 - Y_0)}{Y_0 (X_1 - X_0)}$$

Используя в другом случае два значения первого процесса  $X_0, X_1$  и три значения второго процесса  $Y_0, Y_1, Y_2$  можно получить оценки  $S_y, A_y, B_y$ .

**Если гипотеза о взаимосвязанности процессов верна, то:**

$$S_x = S_y, \quad A_x = A_y, \quad B_x = B_y.$$

Аналогичный подход можно применить и для проверки гипотез о взаимосвязанности большего числа процессов, включив в дальнейший анализ только взаимосвязанные процессы.

|                | крупных   | средних   | крупных   | средних   | крупных   | средних   |
|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Число компаний | $K_1$     | $K_2$     | $A_1$     | $A_2$     | $B_1$     | $B_2$     |
| 2007 г         | -47842,73 | -35084,02 | -0,000004 | -0,000005 | -0,000003 | -0,000004 |
| 2008 г         | 79240,17  | 50872,59  | 0,000007  | 0,000017  | 0,000006  | 0,000014  |
| 2009 г         | 44043,54  | 43355,87  | 0,000068  | 0,000082  | 0,000038  | 0,000045  |
| 2010 г         | 43994,52  | 43472,79  | 0,000067  | 0,000054  | 0,000058  | 0,000047  |
| 2011 г         | 68680,10  | 49320,56  | 0,000009  | 0,000027  | 0,000005  | 0,000016  |

|      | <b>K<sub>1</sub></b>     | <b>K<sub>2</sub></b> | <b>A<sub>1</sub></b> | <b>A<sub>2</sub></b> | <b>B<sub>1</sub></b> | <b>B<sub>2</sub></b> |
|------|--------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|      | <b>Сумма<br/>выручки</b> |                      | <b>крупных</b>       | <b>средних</b>       | <b>крупных</b>       | <b>средних</b>       |
| 2001 | <b>11745610,93</b>       | <b>5936193,04</b>    | <b>0,000000059</b>   | <b>0,000000039</b>   | <b>0,000000057</b>   | <b>0,000000037</b>   |
| 2002 | <b>7226427,42</b>        | <b>8274416,98</b>    | <b>-0,000000247</b>  | <b>0,000001207</b>   | <b>0,000000093</b>   | <b>-0,000000453</b>  |
| 2003 | <b>4693789,22</b>        | <b>8252865,90</b>    | <b>-0,000000074</b>  | <b>-0,000005518</b>  | <b>-0,000000003</b>  | <b>-0,000000250</b>  |
| 2004 | <b>2382478,80</b>        | <b>733162,38</b>     | <b>-0,000000049</b>  | <b>-0,000000040</b>  | <b>-0,000000038</b>  | <b>-0,000000030</b>  |
| 2005 | <b>-22449520,21</b>      | <b>1458100,37</b>    | <b>-0,000000014</b>  | <b>-0,000000045</b>  | <b>-0,000000010</b>  | <b>-0,000000033</b>  |
| 2006 | <b>38311844,65</b>       | <b>39092972,77</b>   | <b>0,000000025</b>   | <b>0,000000025</b>   | <b>0,000000024</b>   | <b>0,000000023</b>   |
| 2007 | <b>69213110,35</b>       | <b>4224571,02</b>    | <b>0,000000007</b>   | <b>-0,000000015</b>  | <b>0,000000007</b>   | <b>-0,000000014</b>  |
| 2008 | <b>647603989,04</b>      | <b>75011919,47</b>   | <b>0,000000000</b>   | <b>0,000000006</b>   | <b>0,000000001</b>   | <b>0,000000010</b>   |
| 2009 | <b>170066305,62</b>      | <b>56745635,08</b>   | <b>0,000000002</b>   | <b>0,000000022</b>   | <b>0,000000002</b>   | <b>0,000000026</b>   |
| 2010 | <b>45951672,70</b>       | <b>57956589,98</b>   | <b>-0,000000019</b>  | <b>0,000000657</b>   | <b>0,000000002</b>   | <b>-0,000000065</b>  |
| 2011 | <b>142964128,74</b>      | <b>202302594,12</b>  | <b>0,000000004</b>   | <b>0,000000002</b>   | <b>0,000000004</b>   | <b>0,000000003</b>   |

|      | <b>K<sub>1</sub></b> | <b>K<sub>2</sub></b> | <b>A<sub>1</sub></b> | <b>A<sub>2</sub></b> | <b>B<sub>1</sub></b> | <b>B<sub>2</sub></b> |                |
|------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------|
| 2005 | <b>Стоимость ОС</b>  |                      | <b>Медианы</b>       | <b>крупных</b>       | <b>средних</b>       | <b>крупных</b>       | <b>средних</b> |
| 2007 | <b>2356,08</b>       | <b>-12314,09</b>     | <b>0,000570</b>      | <b>-0,000045</b>     | <b>0,000208</b>      | <b>-0,000017</b>     |                |
| 2008 | <b>1524,87</b>       | <b>11545,36</b>      | <b>-0,000342</b>     | <b>0,000019</b>      | <b>-0,000457</b>     | <b>0,000025</b>      |                |
| 2009 | <b>3986,86</b>       | <b>3407,64</b>       | <b>0,000192</b>      | <b>0,000304</b>      | <b>0,000145</b>      | <b>0,000229</b>      |                |
| 2010 | <b>4398,47</b>       | <b>8686,52</b>       | <b>0,000130</b>      | <b>0,000029</b>      | <b>0,000049</b>      | <b>0,000011</b>      |                |
| 2011 | <b>3507,06</b>       | <b>3499,55</b>       | <b>-0,000730</b>     | <b>-0,000691</b>     | <b>-0,000419</b>     | <b>-0,000397</b>     |                |

Для анализа динамики взаимодействующих процессов можно применить следующий подход: будем аппроксимировать по трем точкам «скользящим окном» каждый из процессов, используя базовую модель с известными свойствами. В качестве базовых моделей используем процессы Ферхюльста,. Первый процесс аппроксимируется моделью в виде отображения:

$$X_{j,n+1} = X_{j,n} + X_{j,n} A_j (K_{x,j} - X_{j,n});$$

второй процесс аналогичной моделью:

$$Y_{j,n+1} = Y_{j,n} + Y_{j,n} B_j (K_{y,j} - Y_{j,n});$$

индексы « $x$ » и « $y$ » для  $K$ , соответственно, обозначают, что оценка получена при аппроксимации первого или второго процесса, индекс « $j$ » - номер «скользящего окна».

# Взаимосвязь параметров исходных и аппроксимирующих процессов.

- 1) Утверждение: для любого окна « $j$ » сумма оценок ограничений аппроксимирующих процессов ( в рассматриваемом случае  $K_{x,j}$  и  $K_{y,j}$  ) равна ограничению взаимодействующих процессов –  $S$  для исходных значений, или единице для расчетов по нормированным значениям процессов. Это утверждение справедливо для любого числа взаимодействующих процессов.

Тип динамики исследуемых процессов можно определить, зная нормированные интенсивности аппроксимирующих процессов Ферхюльста:

$$a_j = A_j K_{x,j} \text{ и } b_j = B_j K_{y,j} \text{ или}$$

$$a_j = \alpha (1 - x_{0,j} - y_{0,j}) + A_j x_{0,j}; \quad b_j = \beta (1 - x_{0,j} - y_{0,j}) + B_j y_{0,j}$$

- 2) Утверждение: взаимосвязь нормированных интенсивностей аппроксимирующих и исходных процессов выражается зависимостями

$$a_n = \alpha + y_n (\beta - \alpha)$$

$$b_n = \beta + x_n (\alpha - \beta)$$

## Проверка гипотезы взаимосвязанности процессов по данным большого временного интервала.

Взаимосвязь параметров аппроксимирующих и исходных моделей для строгого взаимодействия процессов

$$\begin{aligned} a_j &= \alpha + y_{j,0} (\beta - \alpha) \\ b_j &= \beta + x_{j,0} (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

После преобразования, получим:

$$\begin{aligned} a_j &= \alpha + Y_{j,0} (B - A) \\ b_j &= \beta + X_{j,0} (A - B) \end{aligned}$$

На основании данных большого временного интервала можно получить модель регрессионного анализа в виде:

$$a_j = q Y_j + \text{Const} + \xi_j,$$

величина  $R^2$  будет являться статистической оценкой гипотезы о взаимосвязанности процессов. Если  $R^2$  достаточно велико, то статистическими оценками параметров взаимодействующих процессов будут являться:

$$\alpha = \text{Const}; \quad (B - A) = q$$

Анализ изменения  $\xi_j$  во времени позволит выделить временные интервалы, когда процессы наиболее взаимосвязаны. Аналогичные расчеты можно провести и по  $b_j$

В особых точках процессы прекращаются ( $x_{n+1}^* = x_n^*$  и  $y_{n+1}^* = y_n^*$ ). Для двух взаимодействующих процессов существуют три группы особых точек. Для нормированных отображений взаимодействующих процессов  $x_m^*$  и  $y_m^*$ : это:

$$\begin{aligned}x_1^* &= 0 & y_1^* &= 0 \\x_2^* &= 0 & y_2^* &= 1 \text{ или } x_2^* = 1 & y_2^* &= 0 \\x_3^* + y_3^* &= 1 \text{ (при ненулевых } x_3^* \text{ и } y_3^*)\end{aligned}$$

**Отличие от биологических моделей по устойчивости особых точек.**

## Первая группа особых точек

$$x_1^* = 0 \text{ и } y_1^* = 0$$

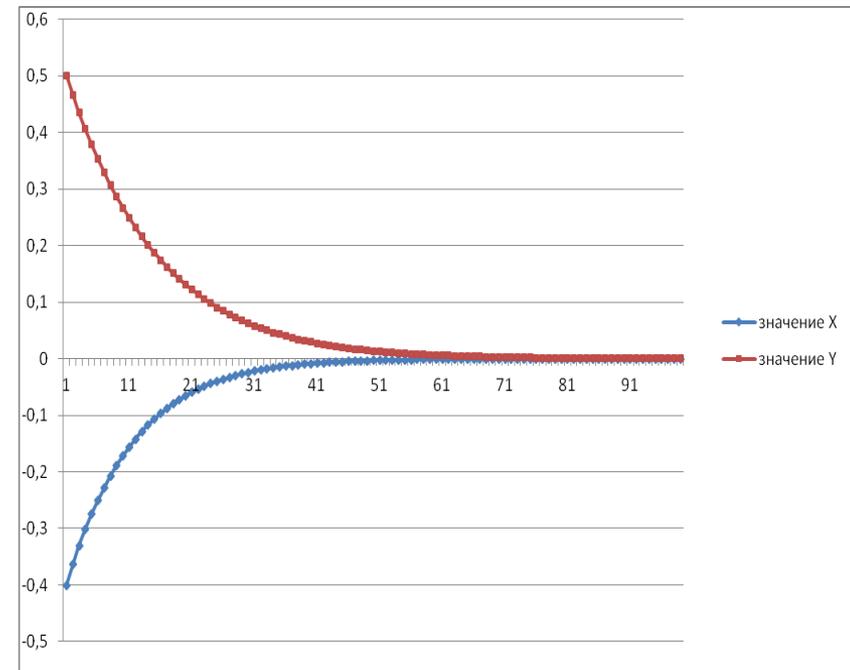
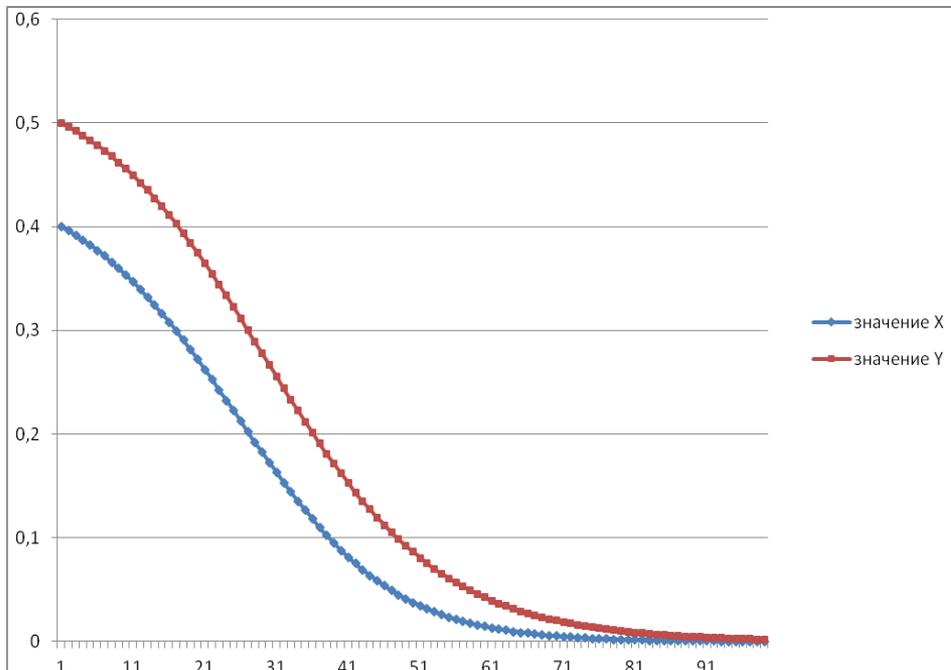
$$a_1^* = \alpha - \alpha y_1^* + \beta y_1^*$$

$$b_1^* = \beta - \beta x_1^* + \alpha x_1^*$$

$$a_1^* = \alpha \text{ и } b_1^* = \beta$$

*Условие устойчивости:  $-2 < \alpha < 0$  и  $-2 < \beta < 0$ .*

**Отрицательные значения  $\alpha$  и  $\beta$  соответствуют безальтернативной контрпропаганде идеи. В этом случае происходит полное исчезновение как сторонников, так и противников.**



## Вторая группа особых точек (полная победа)

$$x_{2a}^* = 0 \quad y_{2a}^* = 1 \quad \text{или} \quad x_{2b}^* = 1 \quad y_{2b}^* = 0,$$

$$a_2^* = \alpha - \alpha y_2^* + \beta y_2^*$$

$$b_2^* = \beta - \beta x_2^* + \alpha x_2^*$$

$$a_{2a}^* = b_{2a}^* = \beta$$

**3. Утверждение:** Если можно представить  $y^* = 1 - x^*$ , то всегда выполняется условие  $a^* = b^*$ . (заменяя  $y^*$  получим  $a^* = \beta - \beta x^* + \alpha x^*$ ). **Это условие справедливо для любого числа взаимодействующих процессов, если в особой точке сумма нормированных значений процессов равна единице.**

Из свойств отображения Ферхюльста известно, что нулевая особая точка устойчива при  $-2 < a < 0$ , а особая точка, равная единице, устойчива при  $0 < b < 2$ . Таким образом, мы получаем два противоречивых требования для устойчивости особых точек в рассматриваемом случае, следовательно, особые точки являются неустойчивыми.

**Из этого следует невозможность полной победы сторонников одной из идей при любой тактике противников.**

## Третья группа особых точек

$$x_3^* + y_3^* = 1$$

$$a_3^* = \alpha - \alpha y_3^* + \beta y_3^*$$

$$b_3^* = \beta - \beta x_3^* + \alpha x_3^*$$

В этом случае исследуются области существования точечных аттракторов.

### Условие существования точечных аттракторов

$$0 < a_3^* = b_3^* < 2.$$

$$0 < \beta + (\alpha - \beta) x_3^* < 2.$$

а) пусть  $\alpha - \beta > 0$  или  $\alpha > \beta$ , тогда:

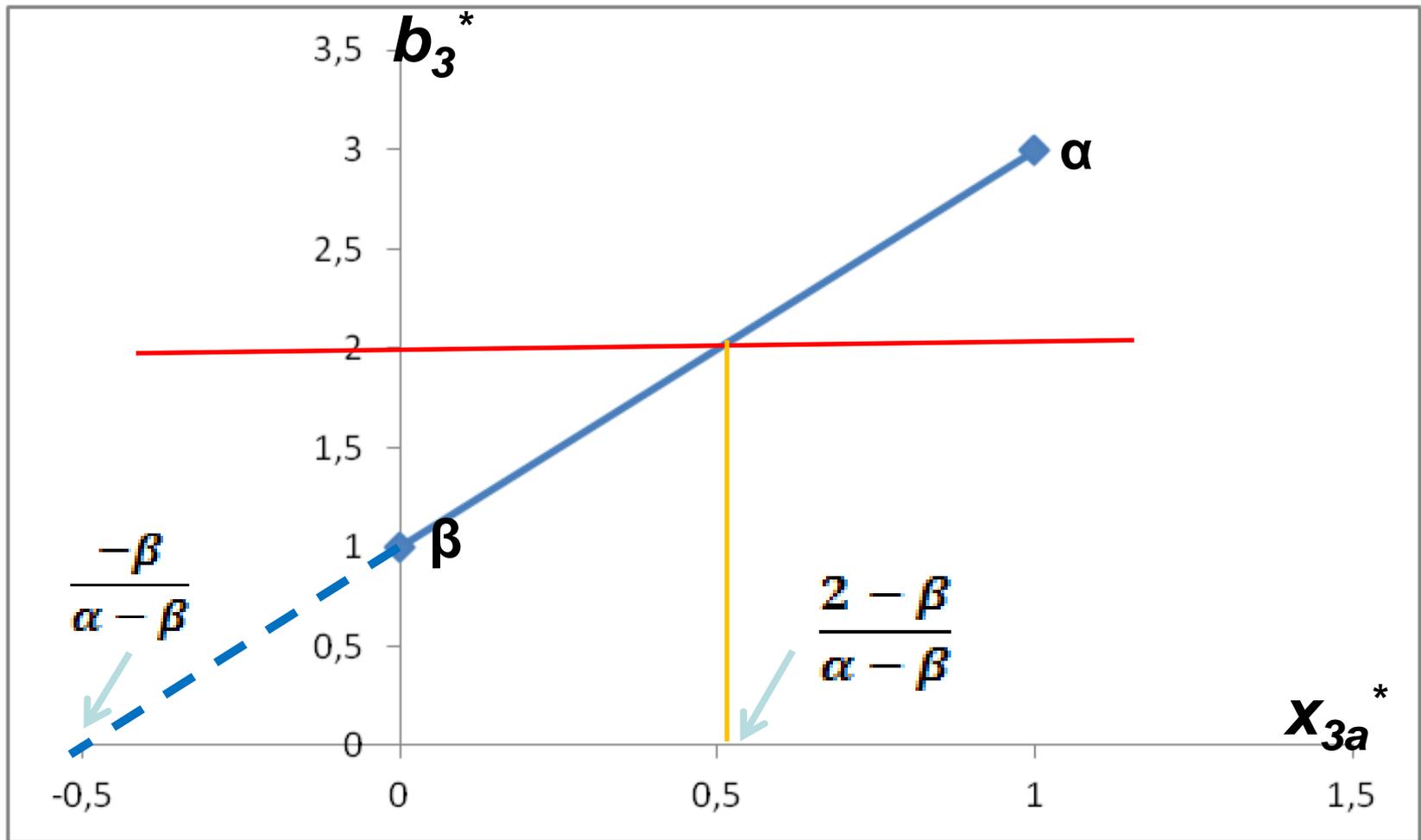
$$\frac{-\beta}{\alpha - \beta} < x_{3a}^* < \frac{2 - \beta}{\alpha - \beta}$$

$$\frac{2 - \alpha}{\alpha - \beta} < y_{3a}^* < \frac{-\alpha}{\alpha - \beta}$$

Такие условия для  $a_3^*$  и  $b_3^*$  могут выполняться в широком диапазоне параметров: как при положительных  $\alpha$  и  $\beta$ , так и при одном отрицательном параметре.

Значения  $x_3^*$  и  $y_3^*$  определяются как параметрами процессов, так и начальными условиями.

Существование отрицательной особой точки соответствует устойчивому существованию группы противников конкурирующей идеи.



## Третья группа особых точек с точки зрения управления процессом.

Пусть один из процессов  $x_n$  будет рассматриваться как управляемый, а другой процесс  $y_n$  как управляющий (мы можем менять его параметры).

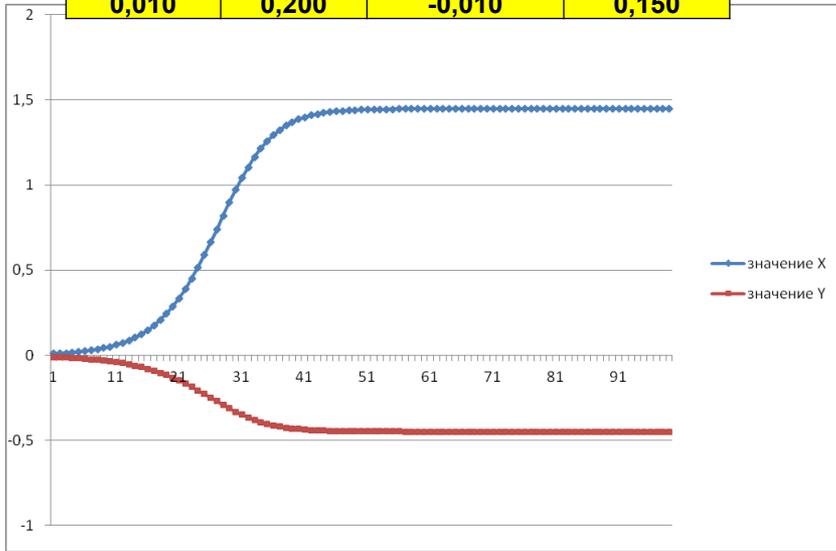
Цели управления могут совершенно разные, например, можно поставить цель добиться некоего характера динамики первого процесса (в определенное время), либо целью может быть определенный тип аттрактора (стратегическая цель), либо целью может быть определенное соотношение значений первого и второго процесса (ситуация «голосования», в самом широком смысле этого слова).

Возможно два подхода к управлению первым процессом (будем считать, что второй процесс управляющий). Во-первых, можно выдвинуть контридею и пытаться достичь цели, демонстрируя ее преимущества,. Во-вторых, можно построить управление лишь на отрицании целей первого процесса, без выдвижения конструктивных контридей. В любом случае встает вопрос «Можно ли достичь конкретную цель такими методами?».

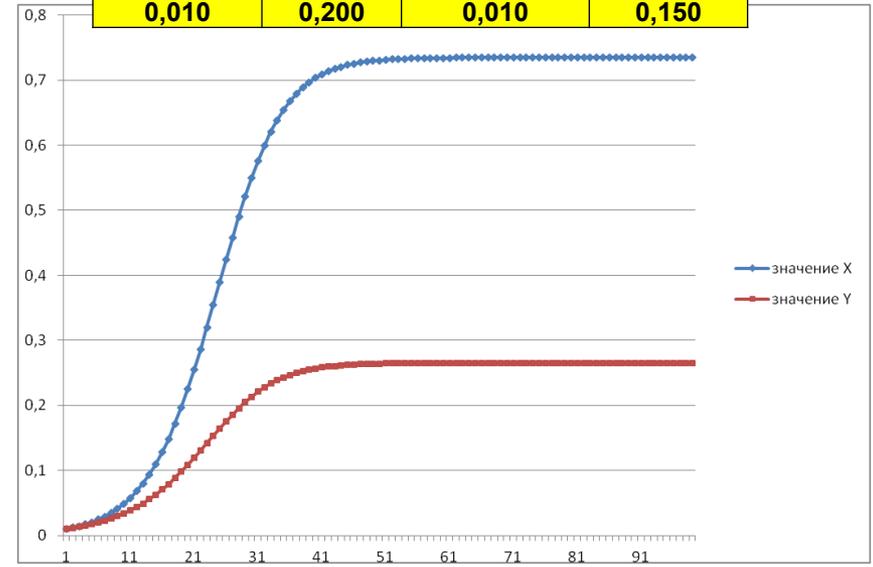
Если речь идет о стратегических целях, то мы можем оценивать эффективность управления, основываясь на устойчивости особых точек, используя в качестве достижимых целей аттракторы.

Для оценки эффективности достижения других целей управления надо использовать моделирование.

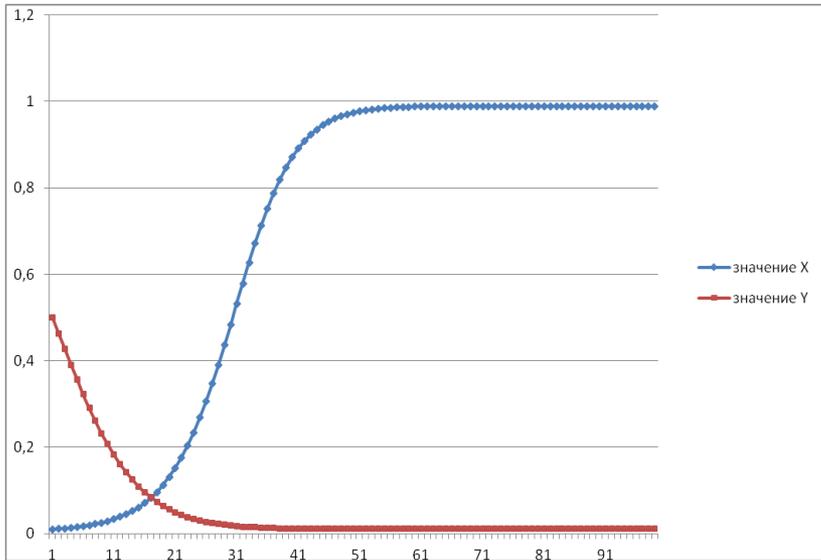
| X нулевое | $\alpha$ | Y нулевое | $\beta$ |
|-----------|----------|-----------|---------|
| 0,010     | 0,200    | -0,010    | 0,150   |



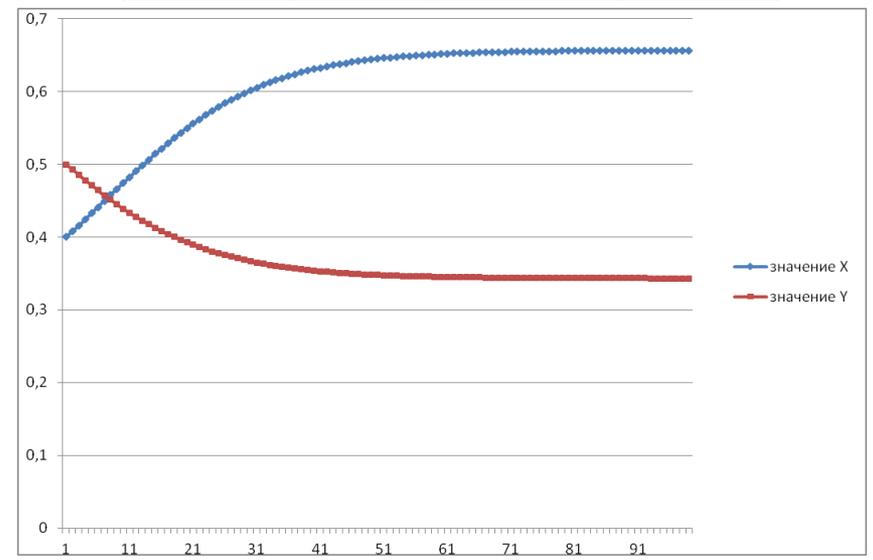
| X нулевое | $\alpha$ | Y нулевое | $\beta$ |
|-----------|----------|-----------|---------|
| 0,010     | 0,200    | 0,010     | 0,150   |



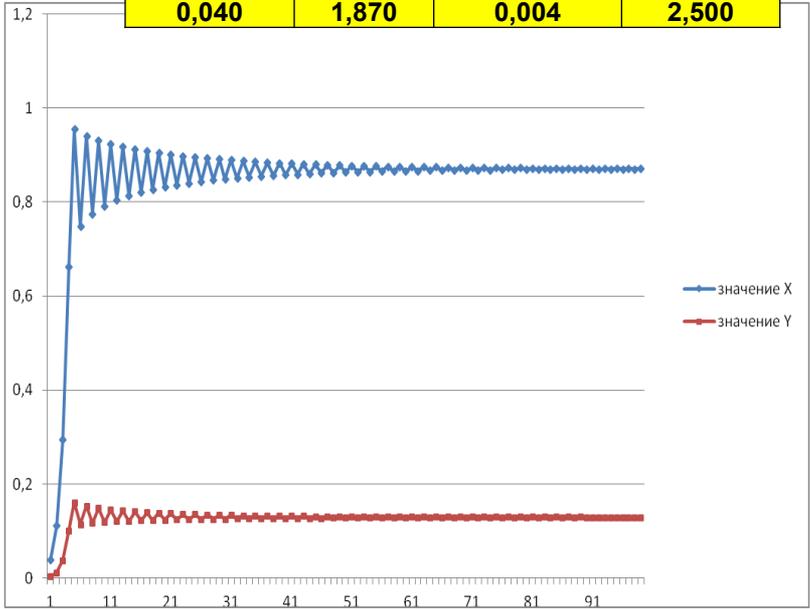
| X нулевое | $\alpha$ | Y нулевое | $\beta$ |
|-----------|----------|-----------|---------|
| 0,010     | 0,200    | 0,500     | -0,150  |



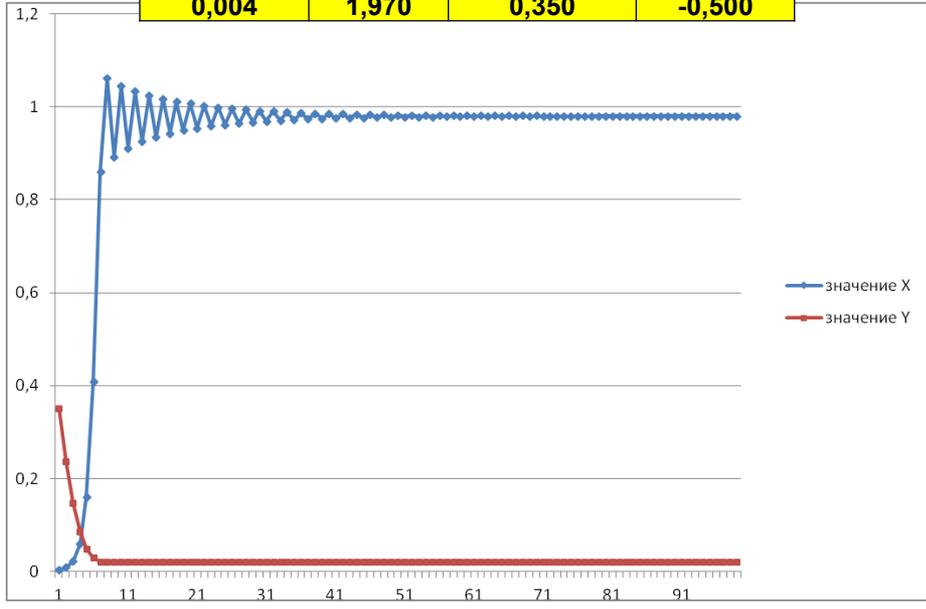
| X нулевое | $\alpha$ | Y нулевое | $\beta$ |
|-----------|----------|-----------|---------|
| 0,400     | 0,200    | 0,500     | -0,150  |



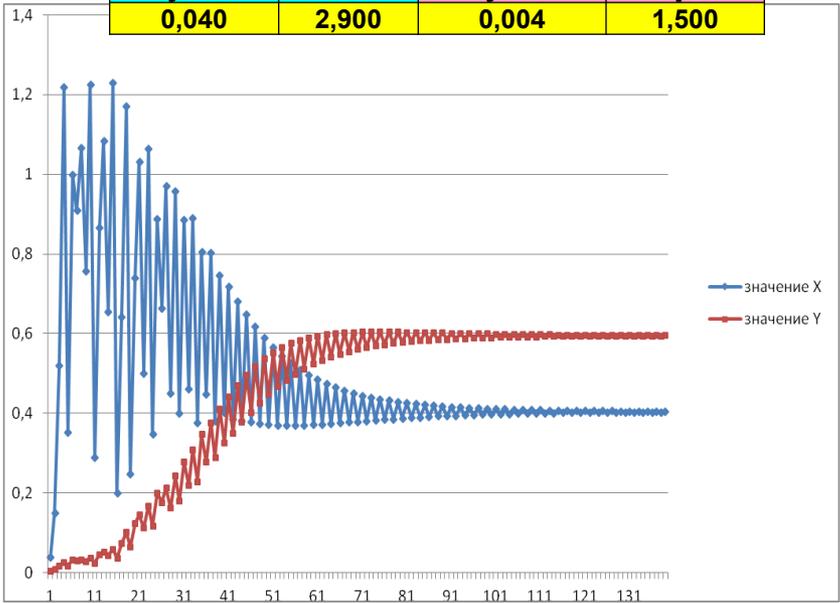
| X нулевое | $\alpha$ | Y нулевое | $\beta$ |
|-----------|----------|-----------|---------|
| 0,040     | 1,870    | 0,004     | 2,500   |



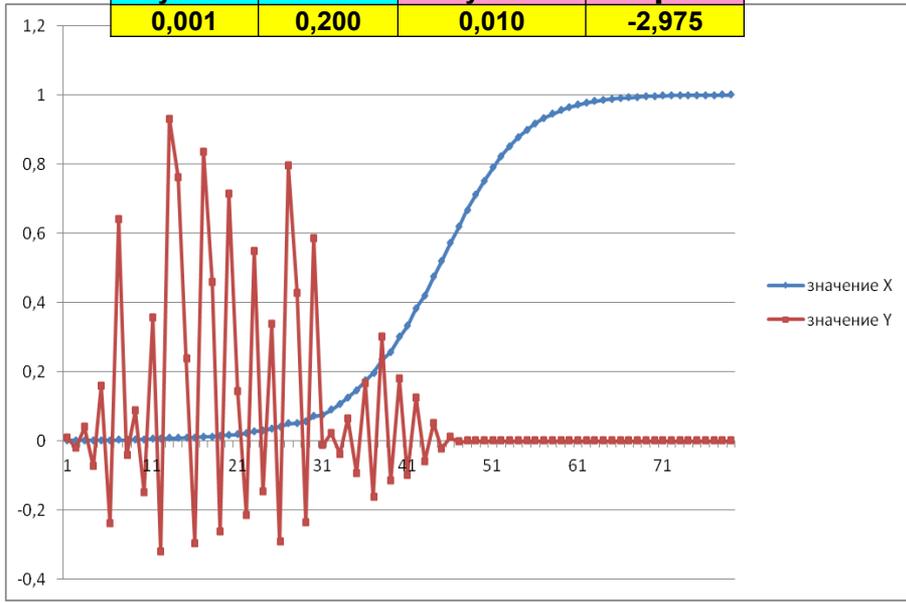
| X нулевое | $\alpha$ | Y нулевое | $\beta$ |
|-----------|----------|-----------|---------|
| 0,004     | 1,970    | 0,350     | -0,500  |



| X нулевое | $\alpha$ | Y нулевое | $\beta$ |
|-----------|----------|-----------|---------|
| 0,040     | 2,900    | 0,004     | 1,500   |



| X нулевое | $\alpha$ | Y нулевое | $\beta$ |
|-----------|----------|-----------|---------|
| 0,001     | 0,200    | 0,010     | -2,975  |



К-емкость  
ниши

X нулевое -  
первый  
процесс

a - усилие  
первого  
процесса

Y нулевое - второй  
процесс

b - усилие  
второго  
процесса

1,05

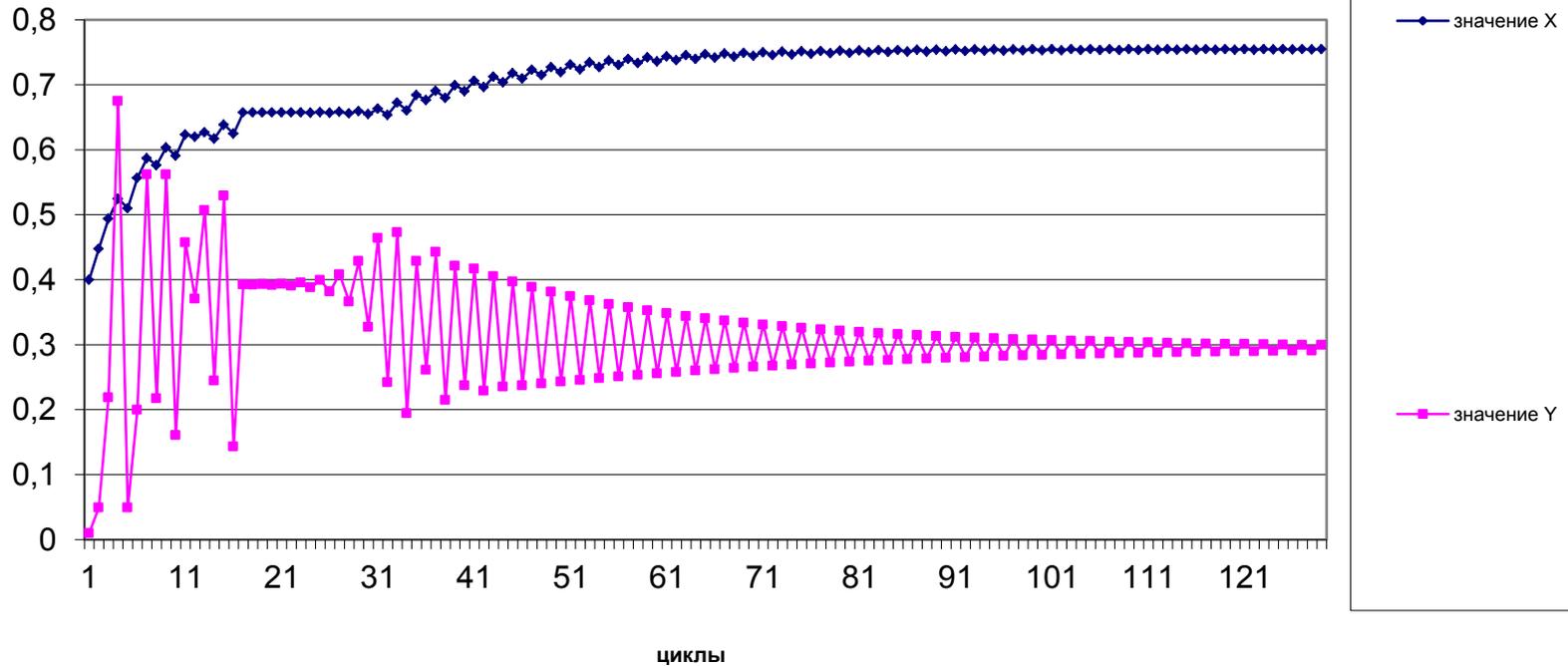
0,400

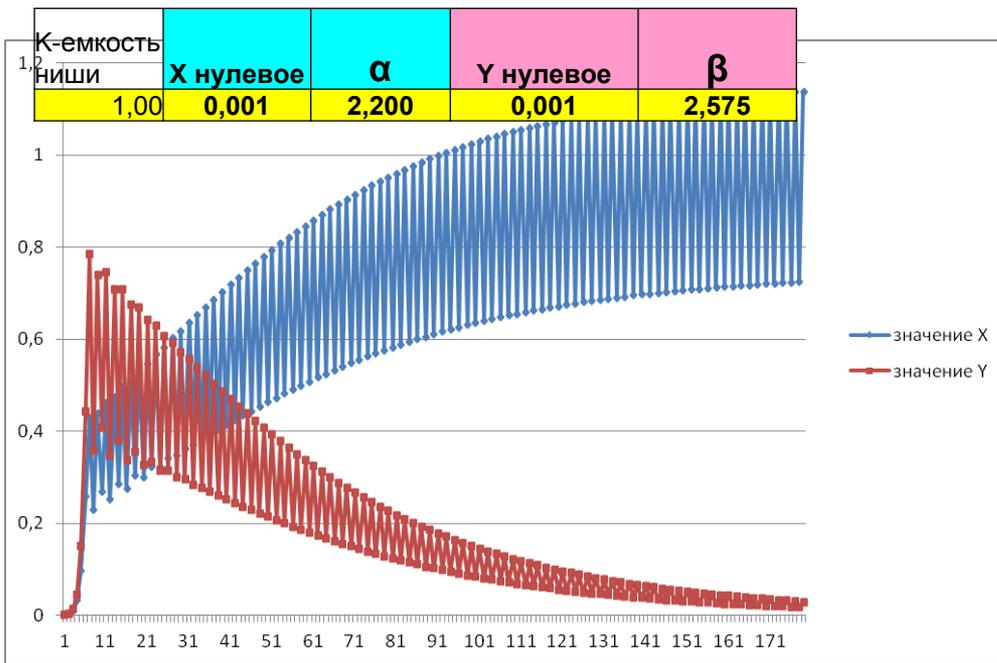
0,186

0,010

6,180

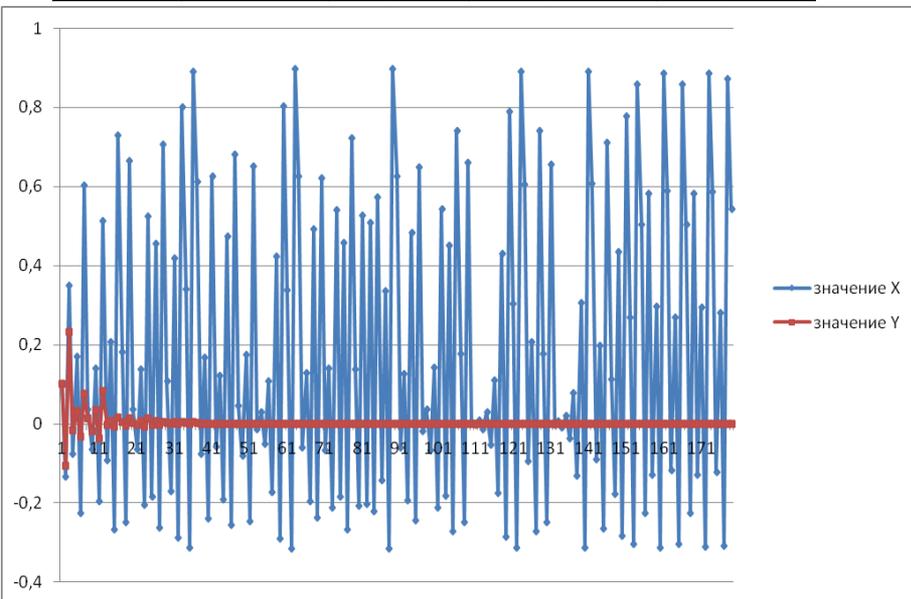
Развитие процессов



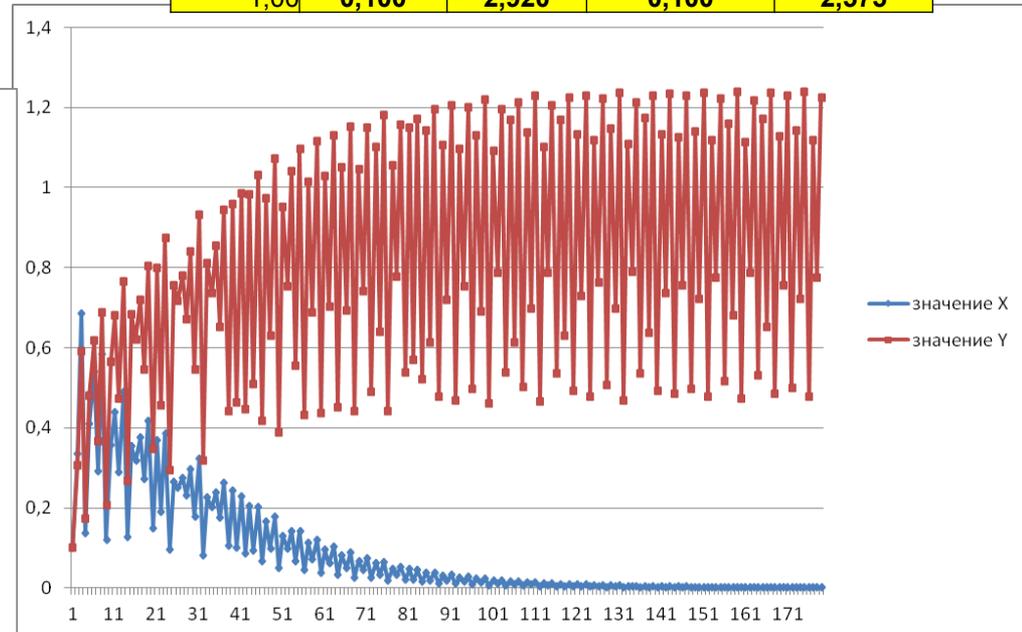


## Примеры неустойчивости: циклические и хаотичные аттракторы

| К-емкость<br>ниши | X нулевое | $\alpha$ | Y нулевое | $\beta$ |
|-------------------|-----------|----------|-----------|---------|
| 1,00              | 0,100     | -2,920   | 0,100     | -2,575  |



| К-емкость<br>ниши | X нулевое | $\alpha$ | Y нулевое | $\beta$ |
|-------------------|-----------|----------|-----------|---------|
| 1,00              | 0,100     | 2,920    | 0,100     | 2,575   |



# От общего к частному. Что делать, если объектов исследования много? И исходных гипотез о воздействующих факторах много!

1. Описывать все траектории единой моделью взаимодействующих процессов.
2. По параметрам модели находить группы реально взаимодействующих процессов. Это классификация траекторий (объектов) по динамике и, как следствие, определение допустимых исходных гипотез.
3. Рассматривать модель взаимодействия для каждого выявленного класса. Уточнять исходные гипотезы о воздействующих факторах для каждого класса.
4. Если необходимо, то дополнять анализ единичными моделями, интерпретируя их в пределах соответствующих исходных гипотез.
5. Возможно имитационное моделирование по принципу «А что бы было, если бы параметры были бы такими..». Знание реальных параметров позволяет далеко не убегать в фантазиях.

# Три процесса. Оценки по разным процессам

$$X_{n+1} = X_n + X_n A (K - X_n - Y_n - Z_n)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + Y_n B (K - X_n - Y_n - Z_n)$$

$$Z_{n+1} = Z_n + Z_n C (K - X_n - Y_n - Z_n)$$

$$A = \frac{X_1^2 - X_0 X_2}{X_0 X_1 (X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0 + Z_1 - Z_0)}$$

$$B = \frac{Y_1^2 - Y_0 Y_2}{Y_0 Y_1 (X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0 + Z_1 - Z_0)}$$

$$K_1 = \frac{X_1 - X_0}{X_0 A} + X_0 + Y_0 + Z_0$$

$$K_2 = \frac{Y_1 - Y_0}{Y_0 B} + X_0 + Y_0 + Z_0$$

$$B_1 = A \frac{X_0 (Y_1 - Y_0)}{Y_0 (X_1 - X_0)}$$

$$A_2 = B \frac{Y_0 (X_1 - X_0)}{X_0 (Y_1 - Y_0)}$$

$$C_1 = A \frac{X_0 (Z_1 - Z_0)}{Z_0 (X_1 - X_0)}$$

$$C_2 = B \frac{Y_0 (Z_1 - Z_0)}{Z_0 (Y_1 - Y_0)}$$

Если процессы взаимосвязанные, то

$$K_1 = K_2 = K_3$$

$$A = A_2 = A_3 \quad B = B_1 = B_3 \quad C = C_1 = C_2$$

К-емкость  
ниши

X нулевое -  
первый  
процесс

a - усилие  
первого  
процесса

Y нулевое -  
второй  
процесс

b - усилие  
второго  
процесса

Z нулевое -  
третий  
процесс

c - усилие  
третьего  
процесса

1

0,0005

2,915

0,0005

0,0815

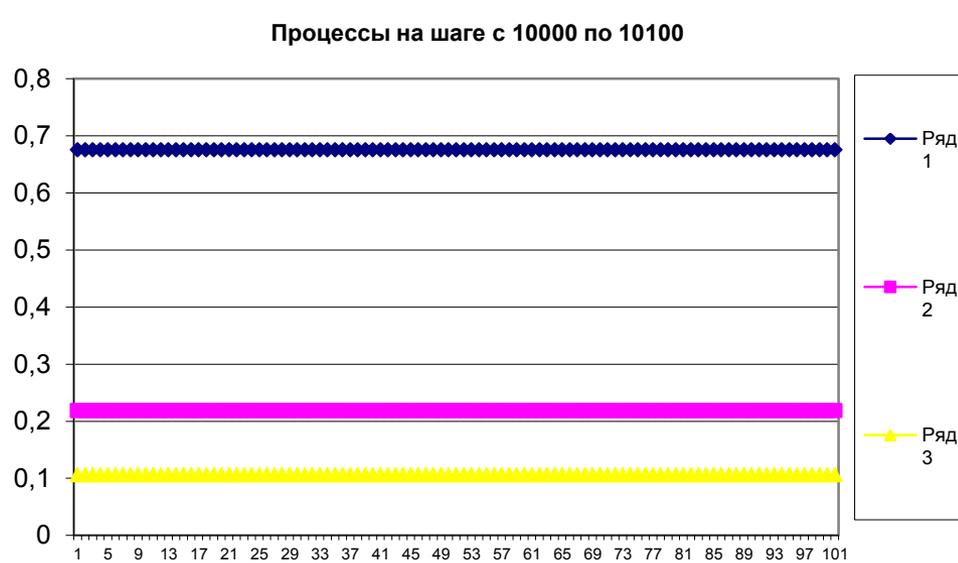
0,0005

0,0715

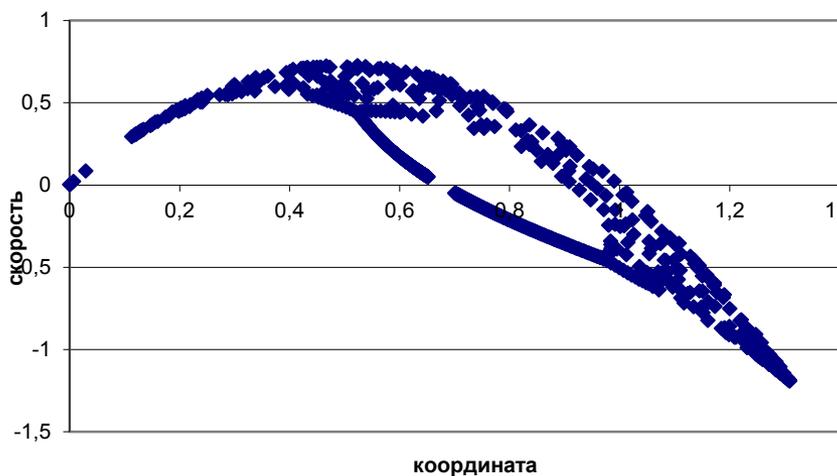
Развитие процессов



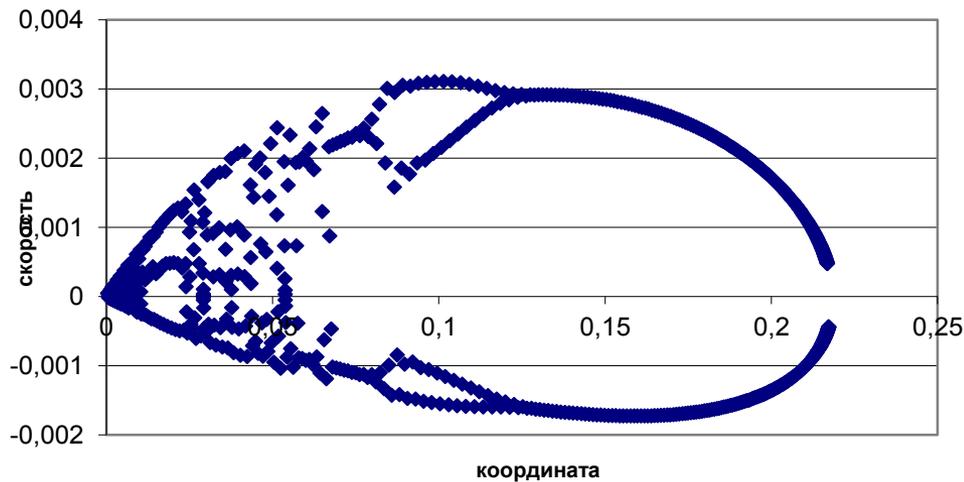
Процессы на шаге с 10000 по 10100



Первый процесс



Второй процесс



# Динамика ИЧР России, Украины, Казахстана

|      | Russian Federation | Ukraine | Kazakhstan |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------|--------------------|---------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1990 | 0,818              | 0,800   | 0,768      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 1995 | 0,771              | 0,748   | 0,723      | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
| 2000 | 0,785              | 0,755   | 0,736      | 2,28  | 2,26  | 2,28  | 0,53  | 0,46  | 0,52  | 0,59  | 0,52  | 0,59  | 0,54  | 0,47  | 0,53  |
| 2005 | 0,802              | 0,788   | 0,794      | 2,07  | 2,23  | 2,23  | -0,10 | -1,96 | -1,81 | -0,05 | -1,01 | -0,93 | -0,10 | -1,94 | -1,79 |

# Альтернативные аппроксимирующие модели

Несмотря на то, что модели процессов Ферхюльста хорошо аппроксимируют широкий класс отображений, есть процессы, где использование моделей Ферхюльста не дает удовлетворительного результата.

Например, при бифуркациях Андронова - Хопфа. Тогда в качестве альтернативной модели можно аналогично использовать модель вида

$$X_{n+1} = A X_n (K - X_{n-1})$$

Но для анализа динамики, например, HDI такая модель не нужна. Она дает худшую аппроксимацию, чем модель Ферхюльста.

# Общая модель

$$X_{i,k,n+1} = X_{i,k,n} + A_{i,k} X_{i,k,n} (R - \sum_{i,k} X_{i,k,n}), \quad \text{где:}$$

$X_{i,k,n+1}$  – число избирателей, выбравших идею на шаге «n+1», которую пропагандируют члены партии «i», принадлежащие к фракции «k»;

$R$  – емкость электоральной ниши потенциальных сторонников конкурирующих идей;

$\sum_{i,k} X_{i,k,n}$  – число определившихся с выбором идей избирателей (сумма сторонников всех идей на шаге «n» - суммирование по «i» - партиям и по «k» - фракциям);

$A_{i,k}$  – коэффициент, характеризующий эффективность привлечения новых сторонников идеи фракции «k» за счет ресурсов партии «i».

Коэффициент  $A_{i,k}$  определяется соотношением  $A_{i,k} = Q_i F_i(\lambda_{k,m})$ , где:

$Q_i$  – ресурсы партии «i»;

$F_i(\lambda_{k,m})$  – функция, описывающая принцип распределения ресурсов в партии «i» между фракциями «k» в зависимости от числа членов фракции на шаге «m».

Для каждой партии динамику выбора членами партии фракционной принадлежности (выбора конкурирующих внутри партии идей) можно описать следующим отображением

$$\lambda_{i,k,m+1} = \lambda_{i,k,m} + \lambda_{i,k,m} B_{i,k} (D_i - \sum \lambda_{i,k,m}), \quad \text{где:}$$

$\lambda_{i,k,m+1}$  – число членов партии «i», разделяющих идею фракции «k» на шаге «m+1»;

$B_{i,k}$  – коэффициент, характеризующий интенсивность привлечения новых членов в партии «i» во фракцию «k»;

$D_i$  – число членов партии «i»;

$\sum \lambda_{i,k,m}$  – суммарное число членов партии «i», принадлежащих к любой фракции на шаге «m».

# Модели для двух партий, в каждой из которых по две фракции (это и группы в Интернете)

**Отображения для моделирования электоральной и внутрипартийной динамики.**

В наиболее простом случае конкурируют две партии, состоящие каждая из двух фракций. Эту ситуацию можно записать в виде отображений (1):

$$X_{1,1,n+1} = X_{1,1,n} + A_{1,1} X_{1,1,n} (R - X_{1,1,n} - X_{1,2,n} - X_{2,1,n} - X_{2,2,n})$$

$$X_{1,2,n+1} = X_{1,2,n} + A_{1,2} X_{1,2,n} (R - X_{1,1,n} - X_{1,2,n} - X_{2,1,n} - X_{2,2,n})$$

$$X_{2,1,n+1} = X_{2,1,n} + A_{2,1} X_{2,1,n} (R - X_{1,1,n} - X_{1,2,n} - X_{2,1,n} - X_{2,2,n})$$

$$X_{2,2,n+1} = X_{2,2,n} + A_{2,2} X_{2,2,n} (R - X_{1,1,n} - X_{1,2,n} - X_{2,1,n} - X_{2,2,n})$$

Для деления партийных ресурсов пропорционально числу членов фракции можно записать (2):

$$A_{1,1} = Q_1 F_1(\lambda_{1,m}) = Q_1 \lambda_{1,1,m}$$

$$A_{1,2} = Q_1 F_1(\lambda_{2,m}) = Q_1 \lambda_{1,2,m}$$

$$A_{2,1} = Q_2 F_2(\lambda_{1,m}) = Q_2 \lambda_{2,1,m}$$

$$A_{2,2} = Q_2 F_2(\lambda_{2,m}) = Q_2 \lambda_{2,2,m}$$

Число членов фракции в каждой партии можно представить в виде отображений (3):

$$\lambda_{1,1,m+1} = \lambda_{1,1,m} + \lambda_{1,1,m} B_{1,1} (D_1 - \lambda_{1,1,m} - \lambda_{1,2,m})$$

$$\lambda_{1,2,m+1} = \lambda_{1,2,m} + \lambda_{1,2,m} B_{1,2} (D_1 - \lambda_{1,1,m} - \lambda_{1,2,m})$$

$$\lambda_{2,1,m+1} + \lambda_{2,1,m} + \lambda_{2,1,m} B_{2,1} (D_2 - \lambda_{2,1,m} - \lambda_{2,2,m})$$

$$\lambda_{2,2,m+1} + \lambda_{2,2,m} + \lambda_{2,2,m} B_{2,2} (D_2 - \lambda_{2,1,m} - \lambda_{2,2,m})$$

При условии равенства временных циклов для электоральных процессов и процессов внутрипартийной дискуссии ( $n=m$ ), и с учетом (1), (2), (3) получим:

$$X_{1,1,n+1} = X_{1,1,n} + Q_1 \lambda_{1,1,n} X_{1,1,n} (R - X_{1,1,n} - X_{1,2,n} - X_{2,1,n} - X_{2,2,n})$$

$$X_{1,2,n+1} = X_{1,2,n} + Q_1 \lambda_{1,2,n} X_{1,2,n} (R - X_{1,1,n} - X_{1,2,n} - X_{2,1,n} - X_{2,2,n})$$

$$X_{2,1,n+1} = X_{2,1,n} + Q_2 \lambda_{2,1,n} X_{2,1,n} (R - X_{1,1,n} - X_{1,2,n} - X_{2,1,n} - X_{2,2,n})$$

$$X_{2,2,n+1} = X_{2,2,n} + Q_2 \lambda_{2,2,n} X_{2,2,n} (R - X_{1,1,n} - X_{1,2,n} - X_{2,1,n} - X_{2,2,n})$$

Эти отображения являются базовыми моделями конкуренции политических партий за сторонников идей, пропагандируемыми партийными фракциями.

# Переходные процессы динамики разделения партий на фракции и конкуренции на электоральном / интернетовском поле.

## Партия 1.

|                                   |                                 |   |   |   |   |
|-----------------------------------|---------------------------------|---|---|---|---|
| Коэффициент ресурсов партии $Q_1$ | $D_1$ – число членов партии «1» | $\Lambda_{1,1,0}$ – число членов партии "1", разделяющих идею фракции «1» на нулевом шаге | $V_{1,1}$ – интенсивность привлечения новых членов во фракцию "1" | $\Lambda_{1,2,0}$ – число членов партии "1", разделяющих идею фракции «2» на нулевом шаге | $V_{1,2}$ – интенсивность привлечения новых членов во фракцию "2" |
| 0,85                              | 1,00                            | 0,001   | 2,15  | 0,001   | 0,95  |

## Партия 2.

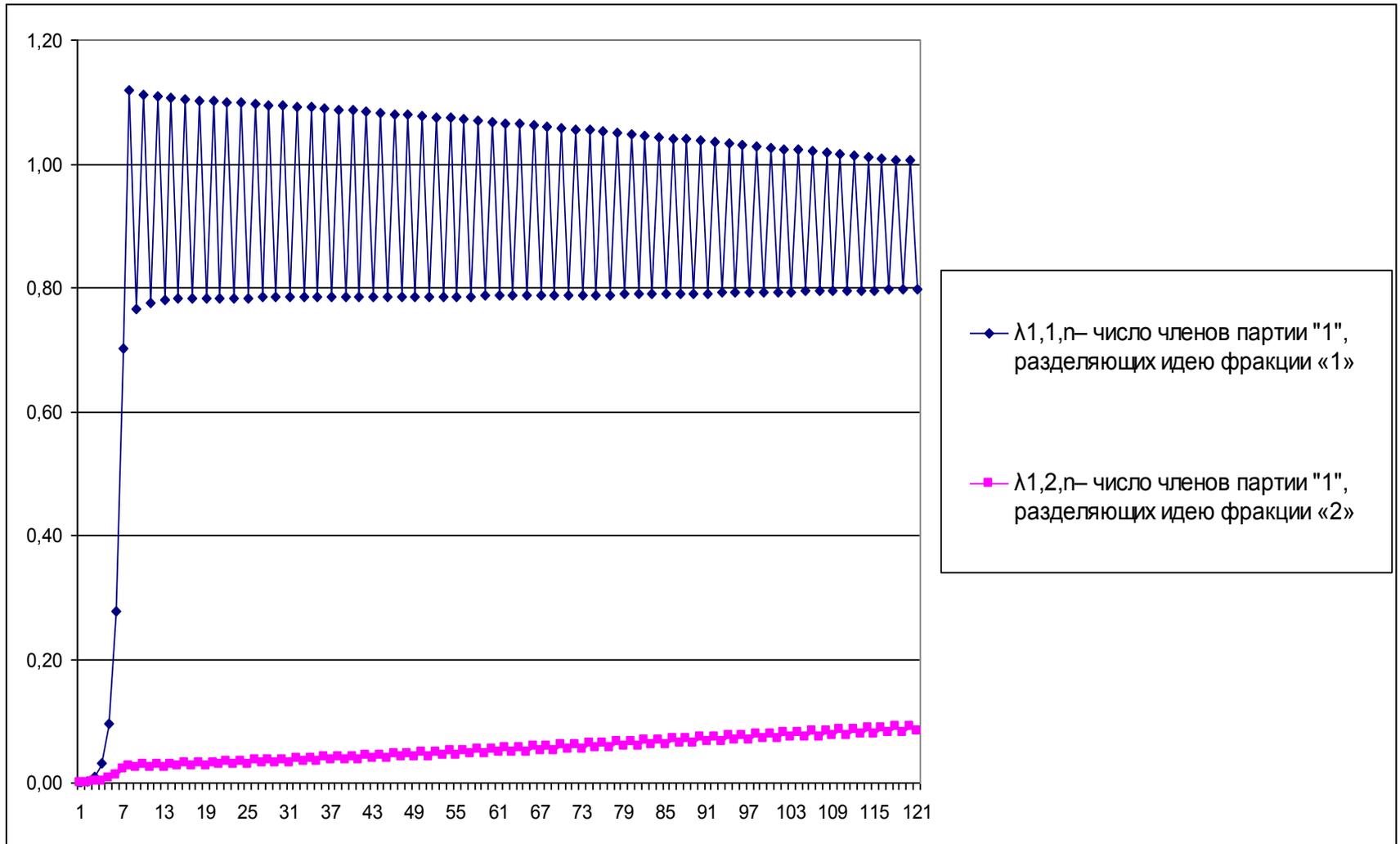
|                                   |                                 |   |   |   |   |
|-----------------------------------|---------------------------------|---|---|---|---|
| Коэффициент ресурсов партии $Q_2$ | $D_2$ – число членов партии «2» | $\Lambda_{2,1,0}$ – число членов партии "2", разделяющих идею фракции «1» на нулевом шаге | $V_{2,1}$ – интенсивность привлечения новых членов во фракцию "1" | $\Lambda_{2,2,0}$ – число членов партии "2", разделяющих идею фракции «2» на нулевом шаге | $V_{2,2}$ – интенсивность привлечения новых членов во фракцию "2" |
| 1,00                              | 1,00                            | 0,001   | 1,05  | 0,005   | 0,55  |

Ресурсы партии 2 в привлечении избирателей на электоральном поле немного больше, чем у партии 1. Зато интенсивность фракционной конкуренции в партии 1 гораздо выше, чем в партии 2.

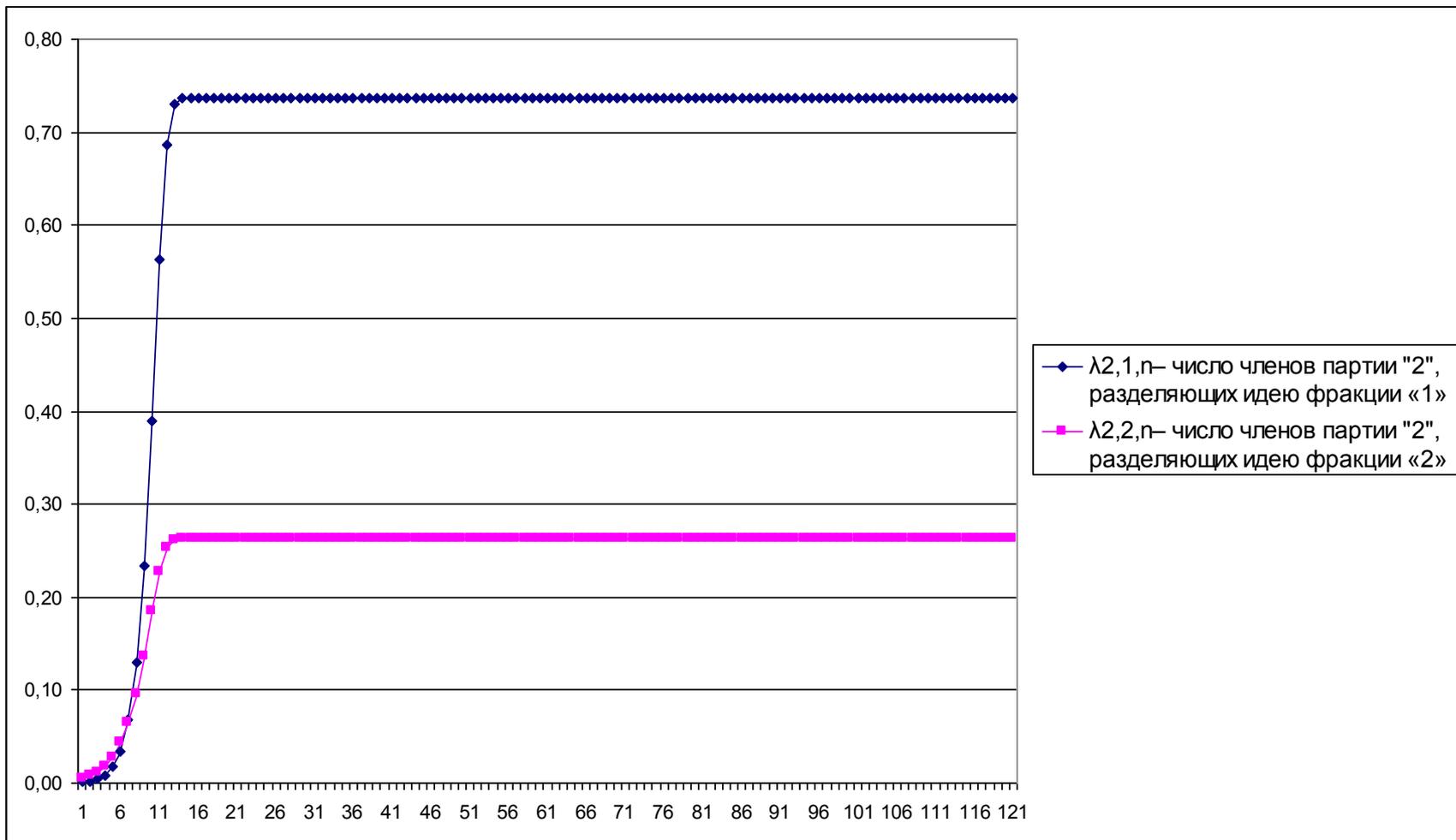
## Электоральное поле.

|                                  |  |  |  |  |
|----------------------------------|--|--|--|--|
| $R$ – емкость электоральной ниши | $X_{1,1,0}$ – число избирателей, выбравших на нулевом шаге идею, которую пропагандируют члены партии «1», принадлежащие к фракции «1»; | $X_{1,2,0}$ – число избирателей, выбравших на нулевом шаге идею, которую пропагандируют члены партии «1», принадлежащие к фракции «2»; | $X_{2,1,0}$ – число избирателей, выбравших на нулевом шаге идею, которую пропагандируют члены партии «2», принадлежащие к фракции «1»; | $X_{2,2,0}$ – число избирателей, выбравших на нулевом шаге идею, которую пропагандируют члены партии «2», принадлежащие к фракции «2»; |
| 1                                | 0,01   | 0,01   | 0,01   | 0,05   |

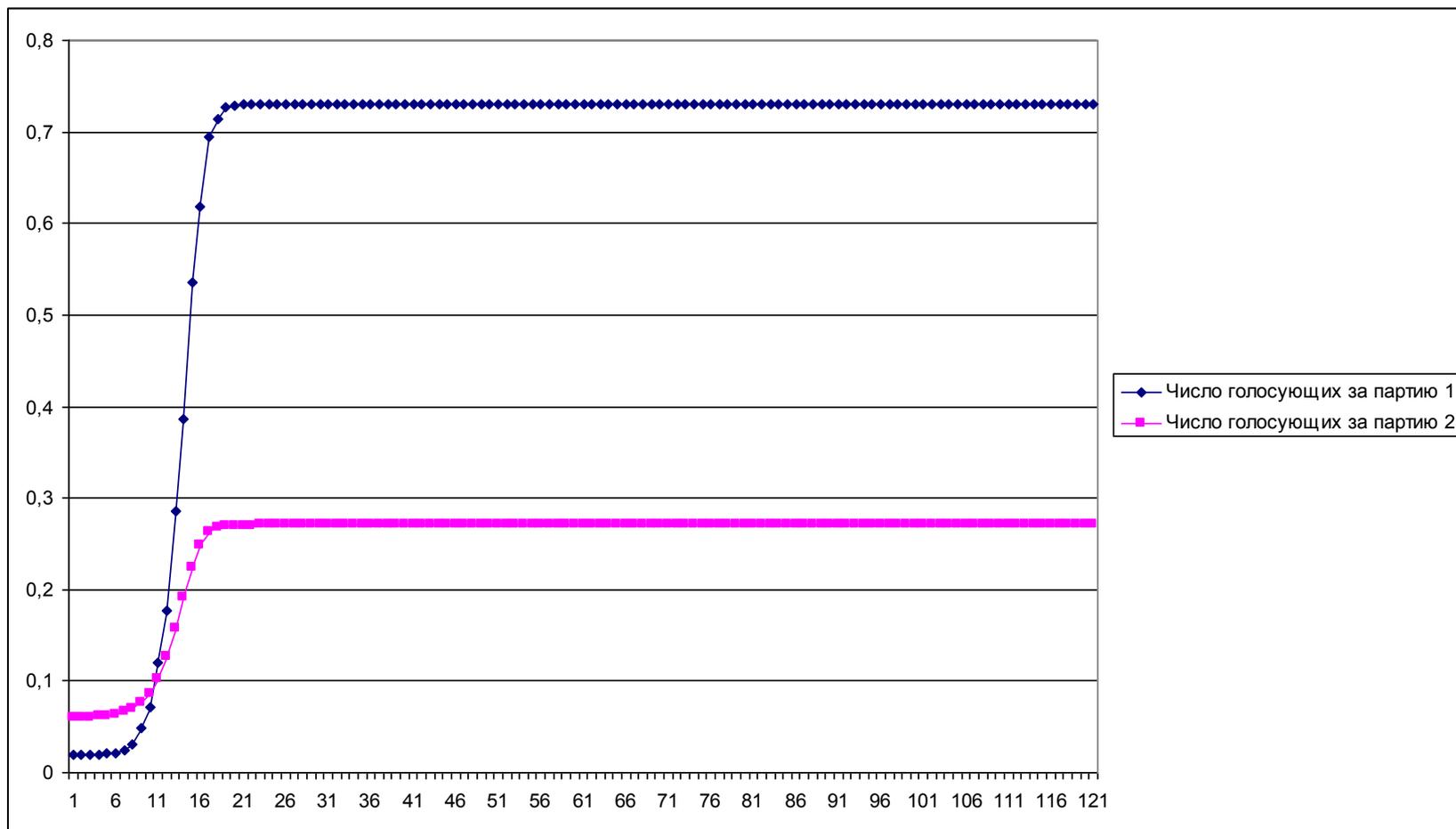
# Партия 1



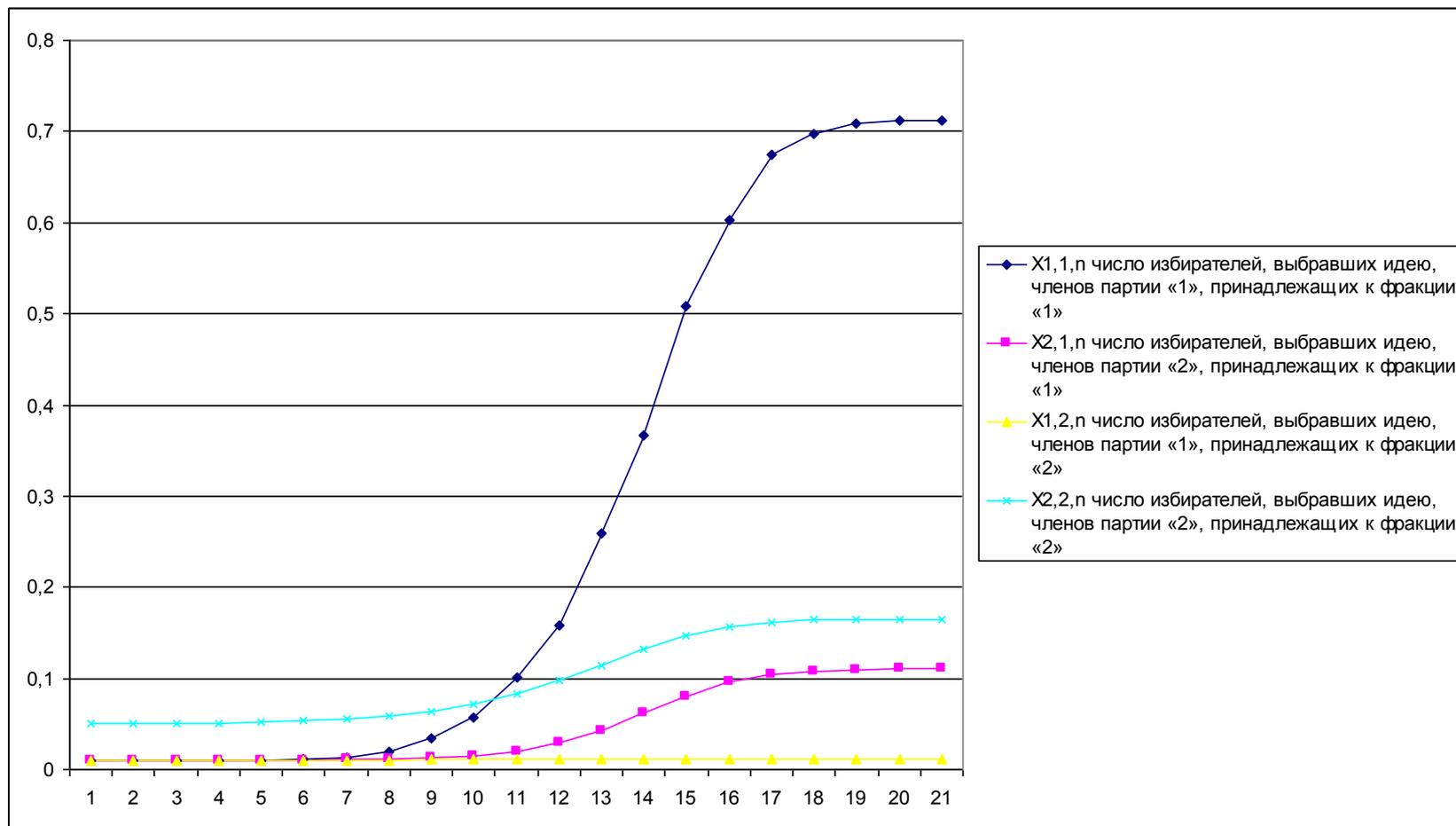
# Партия 2



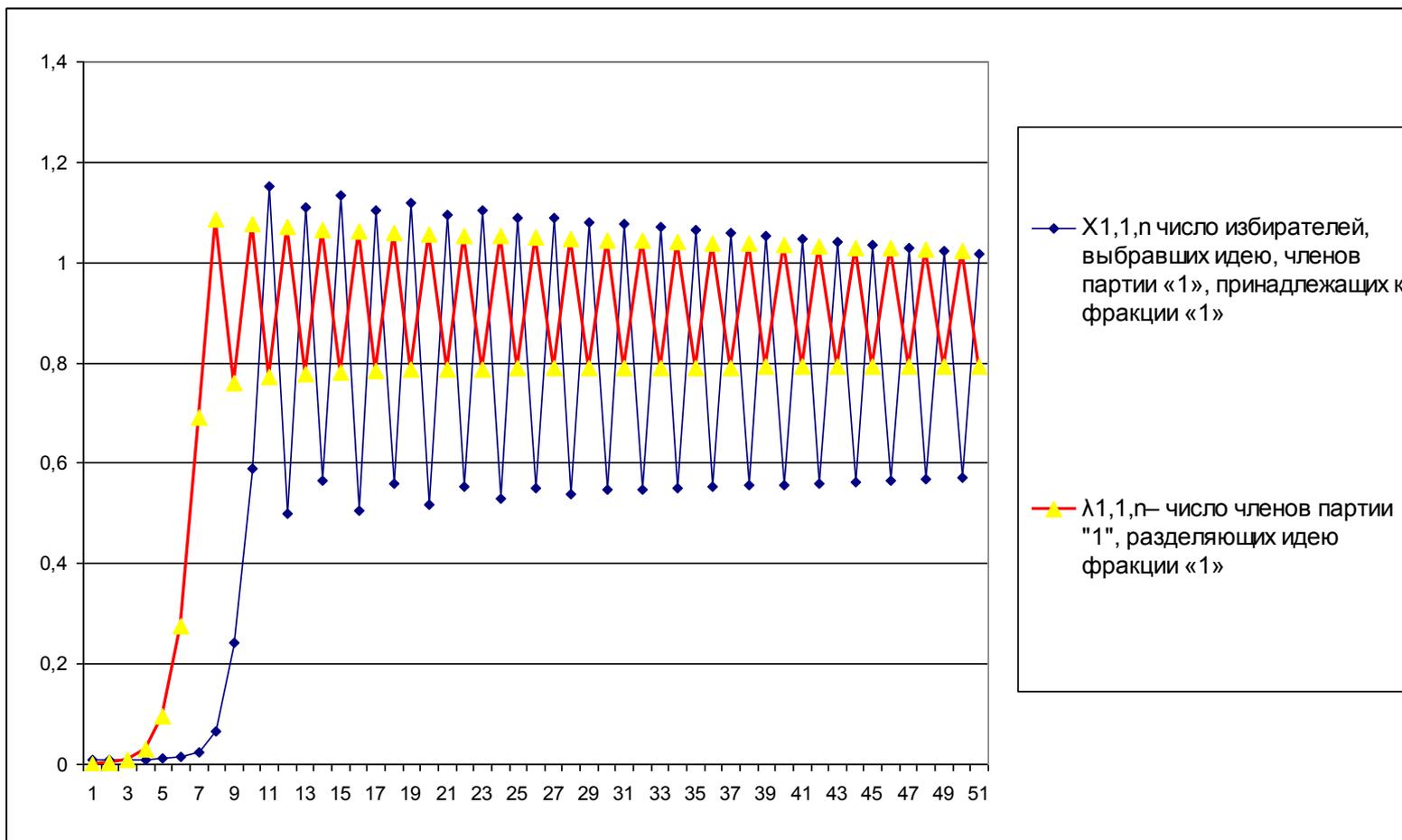
# Число голосующих за партии избирателей



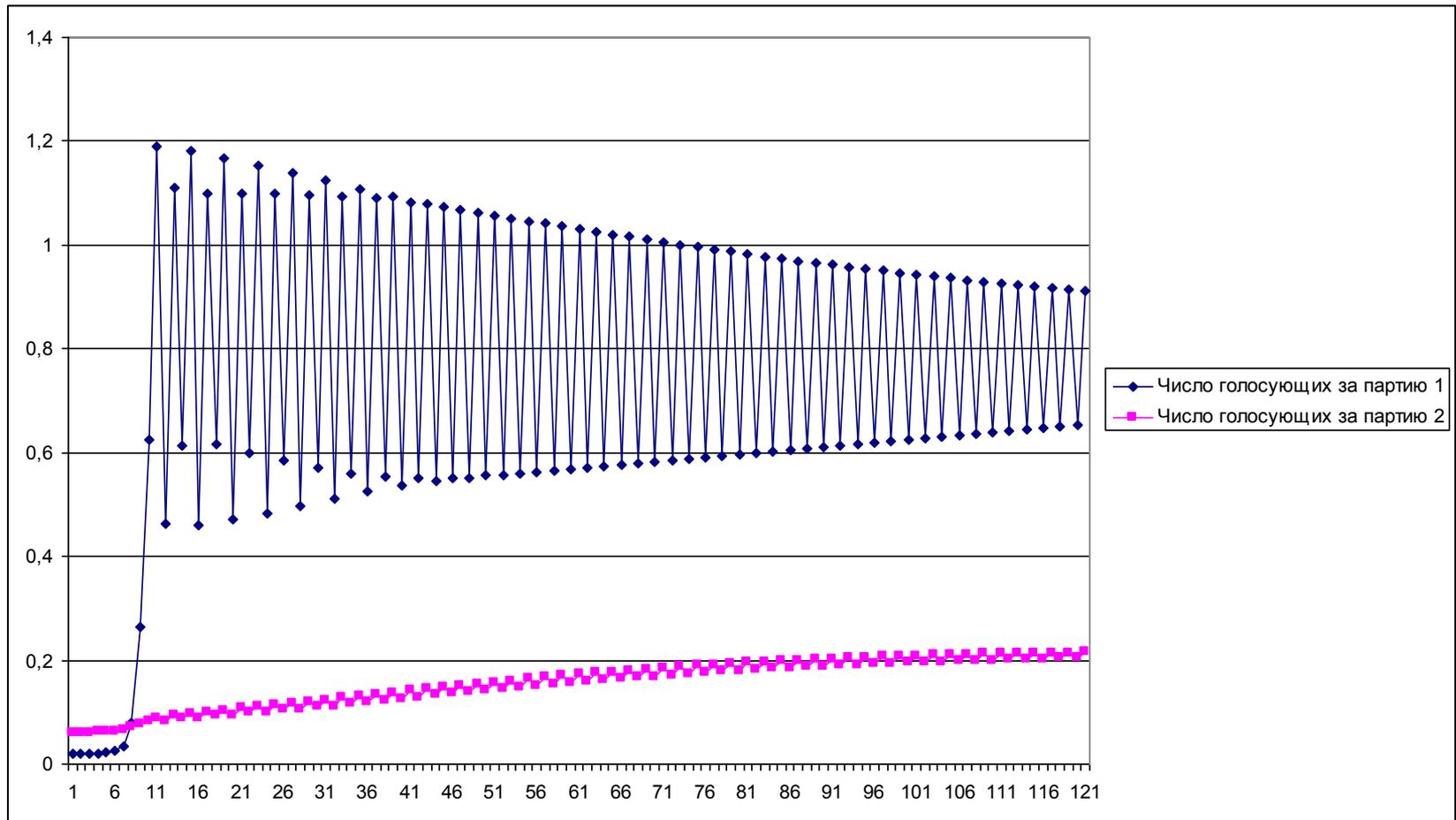
# Число избирателей, поддерживающих идеи фракций



# Усиление конкурентной борьбы, коэффициент ресурсов партии $Q_1 = 2,85$ . Ситуация в партии 1, фракция 1.



# Число избирателей по партиям



# Ситуация очень больших ресурсов у одной партии и ярко выраженных начальных фракционных и электоральных предпочтений.

## Партия 1.

|                                   |                                 |   |   |   |   |
|-----------------------------------|---------------------------------|---|---|---|---|
| Коэффициент ресурсов партии $Q_1$ | $D_1$ – число членов партии «1» | $\Lambda_{1,1,0}$ – число членов партии "1", разделяющих идею фракции «1» на нулевом шаге | $B_{1,1}$ – интенсивность привлечения новых членов во фракцию "1" | $\Lambda_{1,2,0}$ – число членов партии "1", разделяющих идею фракции «2» на нулевом шаге | $B_{1,2}$ – интенсивность привлечения новых членов во фракцию "2" |
| <b>3,85</b>                       | <b>1,00</b>                     | <b>0,60</b>   | <b>3,05</b>   | <b>0,15</b>   | <b>0,95</b>   |

## Партия 2.

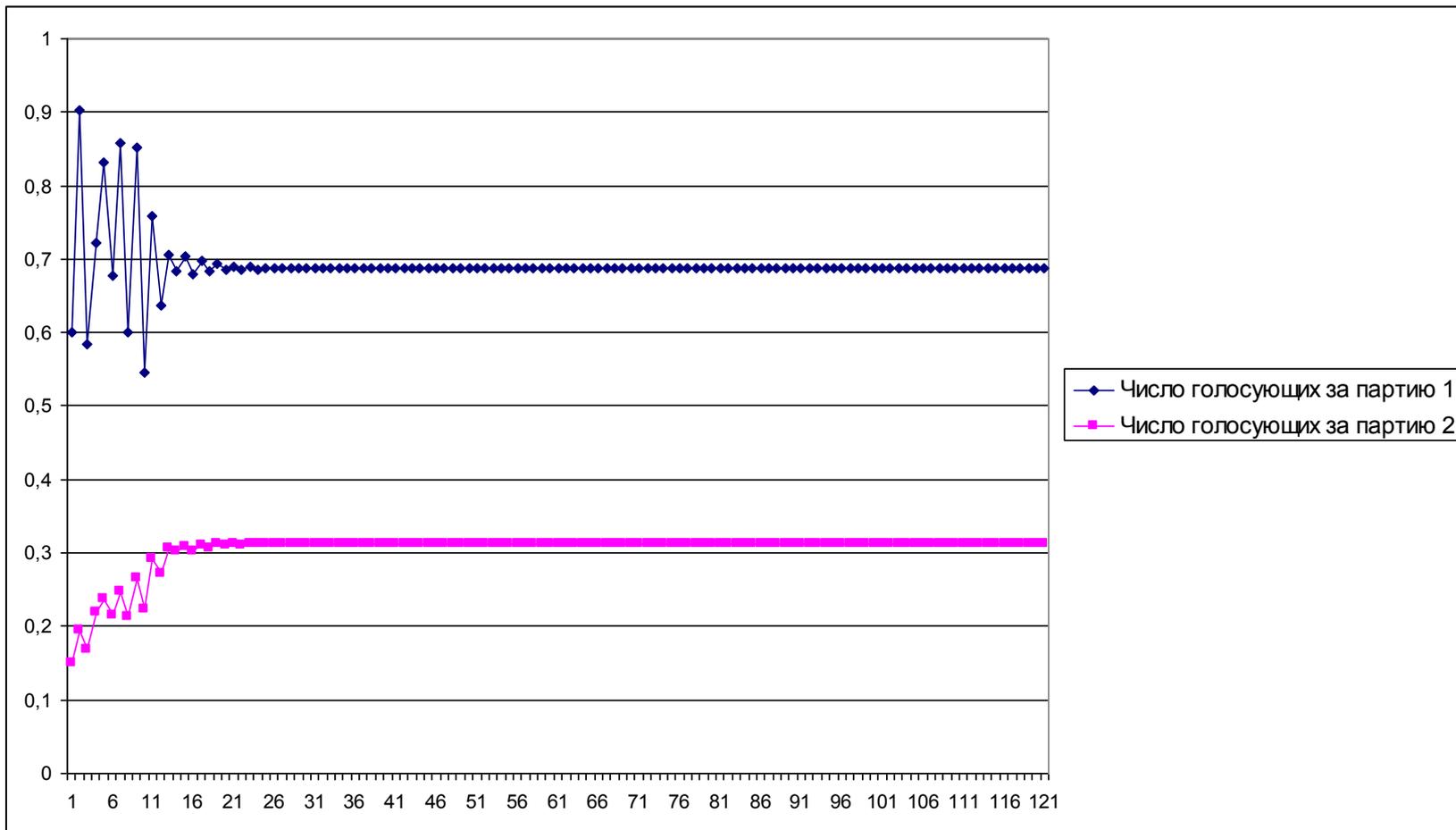
|                                   |                                 |   |   |   |   |
|-----------------------------------|---------------------------------|---|---|---|---|
| Коэффициент ресурсов партии $Q_2$ | $D_2$ – число членов партии «2» | $\Lambda_{2,1,0}$ – число членов партии "2", разделяющих идею фракции «1» на нулевом шаге | $B_{2,1}$ – интенсивность привлечения новых членов во фракцию "1" | $\Lambda_{2,2,0}$ – число членов партии "2", разделяющих идею фракции «2» на нулевом шаге | $B_{2,2}$ – интенсивность привлечения новых членов во фракцию "2" |
| <b>2,00</b>                       | <b>1,00</b>                     | <b>0,80</b>   | <b>2,05</b>   | <b>0,15</b>   | <b>0,55</b>   |

Здесь сильнее конкуренция внутри партий и первоначальная концентрация ресурсов у фракций выше, а, кроме того у партии 1 очень много ресурсов.

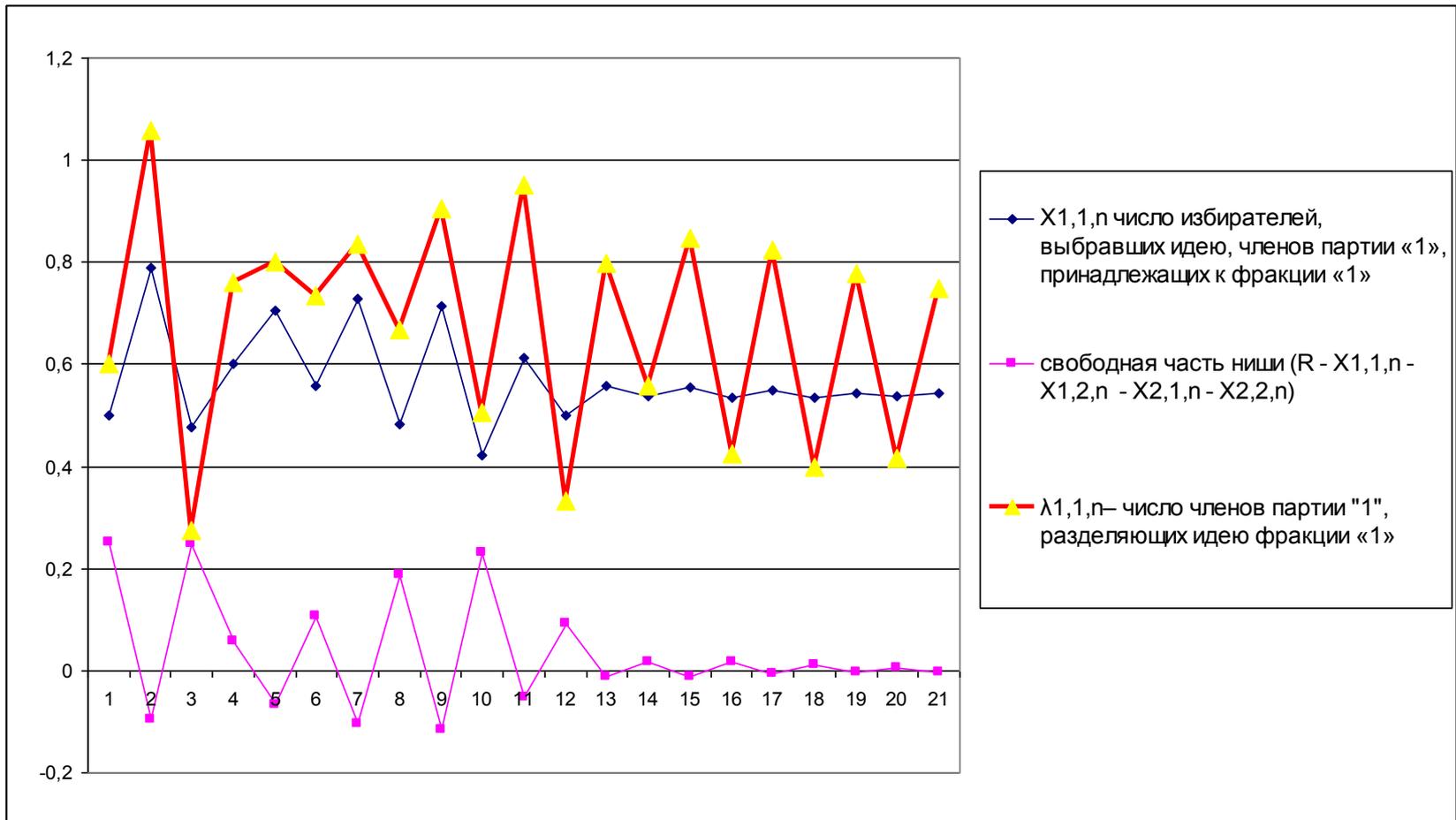
## Электоральное поле.

|                                  |  |  |  |  |
|----------------------------------|--|--|--|--|
| $R$ – емкость электоральной ниши | $X_{1,1,0}$ – число избирателей, выбравших на нулевом шаге идею, которую пропагандируют члены партии «1», принадлежащие к фракции «1»; | $X_{1,2,0}$ – число избирателей, выбравших на нулевом шаге идею, которую пропагандируют члены партии «1», принадлежащие к фракции «2»; | $X_{2,1,0}$ – число избирателей, выбравших на нулевом шаге идею, которую пропагандируют члены партии «2», принадлежащие к фракции «1»; | $X_{2,2,0}$ – число избирателей, выбравших на нулевом шаге идею, которую пропагандируют члены партии «2», принадлежащие к фракции «2»; |
| <b>1</b>                         | <b>0,5</b>   | <b>0,1</b>   | <b>0,1</b>   | <b>0,05</b>  |

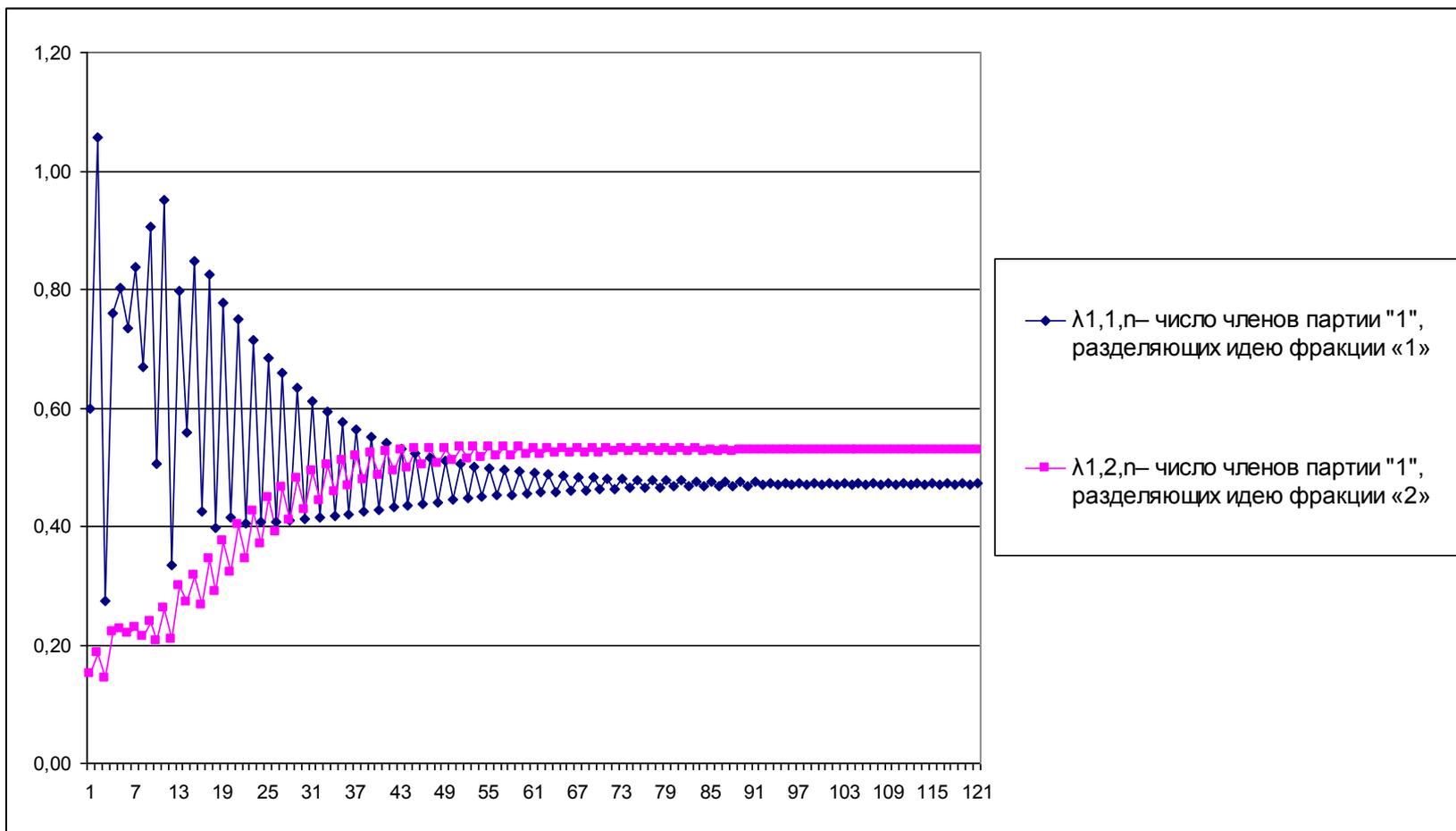
# Число избирателей, голосующих за партию



# Стабилизация процессов в партии и на электоральном поле

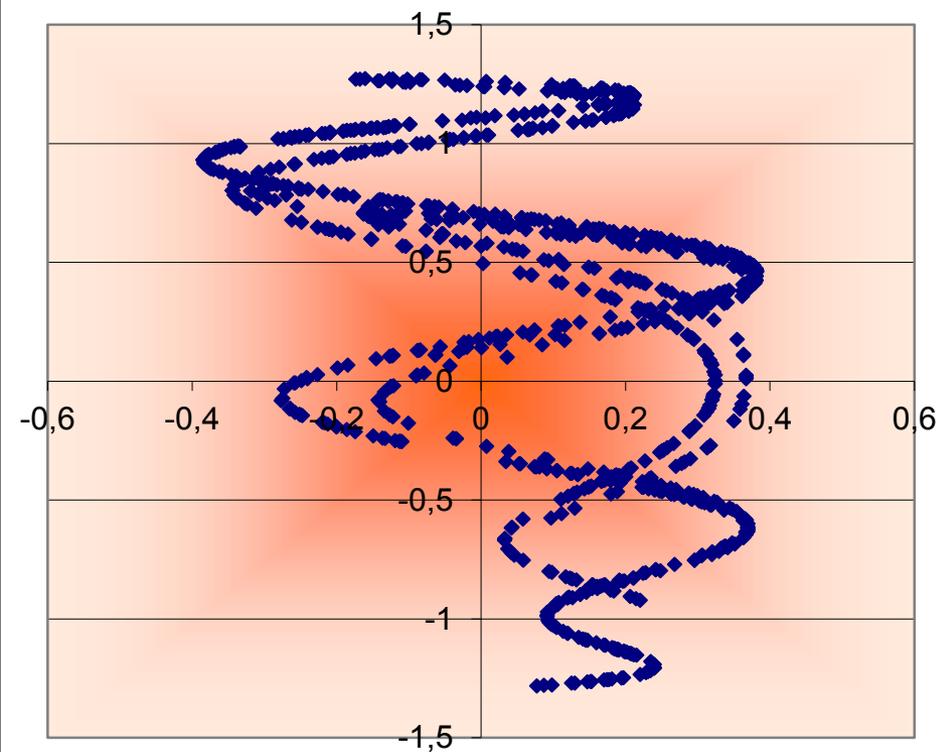


# Ситуация в партии-победителе



# Фазовые портреты при сдвиге значений координаты и скорости

скорость-координата, четыре шага



скорость-координата, пять шагов

