Отношения предпочтения и неразличимости

Бинарное отношение $\wp$ на множестве A_0 – это подмножество $\wp \subseteq A_0 \times A_0$, где $A_0 \times A_0$ – множество всех упорядоченных пар (a,b), $a, b \in A_0$.

Если $(a, b) \in \wp$, говорят, что отношение $\wp$ *выполнено* (или *имеет место*) для (a, b) и пишут $a \wp b$.

Если бинарное отношение $\wp$ не имеет места для a, b, этот факт обозначается $a \wp^c b$.

Отношение предпочтения $\succ$ – это бинарное отношение, определяемое свойством: $a \succ b$ тогда и только тогда, когда a предпочтительнее (лучше) для лица, принимающего решение (ЛПР), чем b.

Отношение неразличимости $\approx$ имеет место для пары a, b тогда и только тогда, когда $a \succ^c b$ и $b \succ^c a$.

Отношение $\wp$ называется *рефлексивным*, если для всех $a \in A_0$ выполнено $a \wp a$, *антирефлексивным*, если для всех $a \in A_0$ выполнено $a \wp^c a$.

Отношение $\wp$ называется *антисимметричым*, если из $a \wp b$ и $b \wp a$ следует $a = b$, *асимметричным*, если из $a \wp b$ следует $b \wp^c a$.

Далее рассматривается отношение *строгого* предпочтения $\succ$, для которого выполнено условие асимметричности.

Отношение $\wp$ называется *транзитивным*, если для всех $a, b, c \in A_0$ из $a \wp b$ и $b \wp c$ следует $a \wp c$.

Отношение $\wp$ называется *полным*, если для всех $a, b \in A_0$ выполнено $a \wp b$ или $b \wp a$.

Пусть на множестве исходов A_0 задано предпочтение ЛПР, то есть отношение типа $\succ$, которое для пары a, b исходов из A_0 выполняется, если a лучше b с точки зрения лица, принимающего решение. Определим также множество действий A. Это множество содержит все возможные действия ЛПР и состоит из элементов вида «Сделать то-то», «Приказать то-то», «Купить то-то…» и пр.

Задача принятия решения

Задача принятия решения – это задача выбора ЛПР действия из множества A, которое приводит к наилучшему с точки зрения предпочтения ЛПР результату из A_0. Чтобы решить эту задачу, необходимо тем или иным образом из отношения предпочтения на множестве исходов A_0 вывести отношение предпочтения на множестве действий A, а затем выбрать наиболее предпочтительное действие.

Детерминированная задача принятия решения

Пусть имеется некоторая функция w: $A \to A_0$ – детерминированное (однозначное) соответствие между выбранным действием и его результатом. В этом случае выбор действия равнозначен выбору результата. Задача, таким образом, состоит лишь в нахождении *реализуемого исхода* (то есть исхода, для которого есть действие, его реализующее), предпочтительного по отношению ко всем остальным реализуемым исходам. Выбранное действие будет принадлежать множеству:

$$\{a \in A \mid \overline{\exists}\, b \in A : w(b) \succ w(a)\}\,.$$

Все действия, принадлежащие решению, приводят к исходам, равнозначным с точки зрения отношения $\approx$.

Задача принятия решения в условиях вероятностной неопределенности

Результат z действия y зависит не только от самого действия ЛПР, но и от некоторых внешних по отношению к ЛПР факторов, то есть зависимость результата от действия имеет вид $z = w(y, \theta, u)$, где θ и u – факторы, не зависящие от ЛПР. Множества возможных значений этих параметров обозначим Θ и U соответственно. Если эти факторы известны на момент принятия решения, задача сводится к предыдущему случаю. Если же они не известны, возникает неопределенность.

Теперь уже выбор ЛПР некоторого действия y^* не приводит к единственному возможному результату. В зависимости от реализации не зависящих от ЛПР факторов θ и u может реализоваться любой результат из множества $R(y^*) = \{w(y^*, \theta, u) \mid \theta \in \Theta, u \in U\}$. Чтобы сделать выбор, ЛПР необходимо научиться сравнивать эти множества. Однако отношение предпочтения на системе множеств $R(\cdot)$ не задано условиями задачи. Его необходимо получать (возможно, используя некоторые дополнительные предположения) из отношения предпочтения на множестве результатов A_0.

Так, если известно распределение вероятностей реализации событий из Θ и U, то можно определить вероятности появления различных результатов при выборе определенного действия.

Полезность и функция полезности

Соответствие между отношением предпочтения $\succ$ и функцией полезности $f : A_0 \to \Re^1$ определяется условием $\forall a, b \in A_0$

$$f(a) > f(b) \Leftrightarrow a \succ b.$$

Введем следующие аксиомы полезности:

1. Если $\succ$ – отношение предпочтения (асимметричное), $\approx$ – отношение неразличимости, то для любых исходов x и y имеет место одно из событий: либо $x \succ y$, либо $y \succ x$, либо $x \approx y$, то есть для любой пары исходов либо первый исход предпочтительнее второго, либо второй предпочтительнее первого, либо же исходы равнозначны. Если $a \approx b \Leftrightarrow a \succ^c b$ и $b \succ^c a$, то эта аксиома выполняется всегда.
2. $x \approx x$, для любого исхода x, то есть исход всегда неотличим от себя самого, что также очевидным образом следует из определения отношения безразличия.
3. Если $x \approx y$, $y \approx z$, то $x \approx z$. Это – условие транзитивности отношения неразличимости, оно уже не столь очевидно. Существуют примеры достаточно логичных с точки здравого смысла предпочтений, когда эта аксиома не выполняется.
4. Если $x \succ y$, $y \succ z$, то $x \succ z$ (условие транзитивности отношения предпочтения).
5. Если $x \succ y$, $y \approx z$, то $x \succ z$, то есть если x лучше y и y равнозначно z, то x лучше z. На самом деле, эта аксиома вводит предположение о произвольно глубокой разрешающей способности агента – о том, что последний всегда может различить сколь угодно близкие ситуации.
6. Если $x \approx y$, $y \succ z$, то $x \succ z$ (аналогично аксиоме 5).

Этих предположений хватает, чтобы ввести функцию $f(\bullet)$. Однако, их недостаточно, чтобы определить эту функцию однозначно.

Полезность и функция полезности II

Чтобы от отношения предпочтения перейти к определенной с точностью до линейного преобразования функции полезности, требуются дополнительные аксиомы (так называемые, *аксиомы комбинирования*), определяющие модель поведения в условиях неопределенности.

Пусть x и y – любые исходы из A_0 и $0 < r, s < 1$. Тогда выражение $r\,x + (1 - r)\,y$ будет обозначать исход, представляющий собой лотерею, которая реализует два исхода x и y с вероятностями r и $(1 - r)$ соответственно. Тогда от этой лотереи потребуем выполнения следующих условий:

7. $rx + (1 - r)\,y = (1 - r)\,y + r\,x$ для любой лотереи r на x, y. Это свойство *коммутативности лотереи*, имеющее лишь техническое значение. Оно, по сути, не ограничивает предпочтения.

8. $r\,x + (1 - r)\,(s\,y + (1 - s)\,z) = r\,x + (1 - r)\,s\,y + (1 - r)\,(1 - s)\,z$ для любых лотерей s и r на исходах $x, y, z \in A_0$. Это свойство вводит предположение о том, что для ЛПР порядок лотерей не важен.

9. $r\,x + (1 - r)\,x = x$ (*рефлексивность лотереи*).

10. Если $x \approx z$, то для любых y, r имеем

$$(r\,x + (1 - r)\,y) \approx (r\,z + (1 - r)\,y).$$

11. Если $x \succ z$, то для любых $r > 0$ и y имеем

$$(r\,x + (1 - r)\,y) \succ (r\,z + (1 - r)\,y).$$

12. Пусть $x \succ z \succ y$. Тогда существует $0 \le r \le 1$, такое, что $(r\,x + (1 - r)\,y) \approx z$. Эта очень важная аксиома имеет отдельное название – *аксиома непрерывности*.

Теорема 1 (Неймана-Моргенштерна).

Если для отношения предпочтения $\succ$ выполнены аксиомы 1-12, то существует функция $f\colon A_0 \to R$, что для любых x, y из A_0 и любого $r \in [0, 1]$

(1) $f(x) > f(y) \Leftrightarrow x \succ y$,

(2) $f(rx + (1-r)y) = r\,f(x) + (1-r)f(y)$.

Эта функция единственна *с точностью до положительного линейного преобразования*, то есть если некоторая функция $F(\cdot)$ удовлетворяет условиям (1), (2), то

$$F(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta,$$

где $\alpha > 0$ и β – некоторые константы.

Трансферабельная полезность и трансферабельный ресурс

$$F_i(x_i, c_i) = g_i(x_i) + \lambda_i c_i, \quad i \in \{d, a\}$$

Классификация и примеры игр

Количество сторон (*игроков*), участвующих в конфликте (*игре*). *игры двух лиц* и *игры многих лиц*.

Ограничения на выигрыши среди игр двух лиц - игры *с нулевой суммой* (*антагонистические* игры), в которых сумма выигрышей игроков при каждом исходе равна нулю, и игры *с произвольной суммой*, в которых сумма выигрышей игроков может отличаться от нуля для всех или некоторых исходов игры.

Информированность сторон - игры *с полной информированностью* и игры *с неполной информированностью* о различных параметрах игры. Полная информированность не означает, что рассматривается *задача принятия решения с полной информированностью*, а лишь то, что в задаче имеется только игровая неопределенность, а остальные типы неопределенности отсутствуют.

Количеству повторений - *однократные* и *динамические* игры.

Динамические игры с дискретным временем называются *повторяющимися* играми.

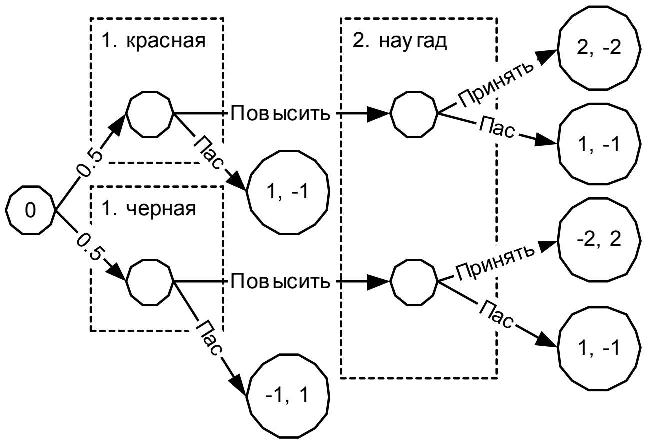
Динамические игры, в которых динамика описывается дифференциальными или разностными уравнениями, называются *дифференциальными* играми.

Мощность множества исходов и/или стратегий - *дискретные* и *непрерывные* игры (в отличие от непрерывных игр, в дискретных играх множество исходов конечно).

Возможности совместных действий среди игр многих (т.е. более двух) лиц различают *некооперативные* и *кооперативные* игры.

Последовательности ходов позволяет выделить *иерархические игры*.

<u>Пример 1. «Минипокер», *игра в развернутой форме.*</u>



Два игрока кладут по доллару на кон. Первый игрок наугад выбирает карту из перетасованной колоды, замечая ее цвет (красный – червы или бубны, черный – пики или трефы). Второй игрок не знает цвета карты. После этого первый игрок имеет две альтернативы: А) повысить ставку Б) спасовать.

Если он пасует, то забирает все деньги (2 доллара), если выбрана красная карта и, наоборот, все деньги забирает второй игрок, если карта черная, и игра заканчивается. Если первый игрок повышает ставку, то он кладет еще один доллар на кон и игра продолжается следующим образом. Второй игрок выбирает свое действие: принять кон и доложить свой доллар на кон или спасовать. При пасе второго игрока все деньги забирает первый игрок. При принятии ставки, все деньги получает первый игрок, если выбрана красная карта, и второй игрок – если выбрана черная карта.

По введенной выше классификации, эта задача – дискретная некооперативная однократная игра двух лиц с неполной информированностью одного из игроков относительно внешних (природных) факторов.

Пример 2. «Два начальника», *биматричная игра.*

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} \textit{сотр.} & \textit{эгоист.} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \textit{сотр.} \\ \textit{эгоист} \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 10,10 & -5,15 \\ 15,-5 & 0,0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Этот пример является частным случаем примера 3. Имеются два игрока-начальника. У них есть один подчиненный. Каждый из начальников дает подчиненному задание и может как разрешить выполнять свое задание совместно с заданием противника (другого начальника), так и потребовать выполнения своего задания в первую очередь. Назовем первый выбор «сотрудничество», а второй – «эгоистическое поведение». Если задания выполняются совместно, то каждый из начальников получает по 10 единиц выигрыша. Если только один из начальников потребовал первоочередного выполнения своего задания, он получает 15 единиц выигрыша, времени на выполнение задания второго начальника у подчиненного не остается и второй начальник несет убытки в размере 5 единиц. Если оба начальника потребовали выполнения своего задания в первую очередь, подчиненный отказывается работать вообще, и начальники получают нулевые выигрыши. Выигрыши игроков можно представить в виде следующей матрицы: (игра является *биматричной*).

Эта классическая игра широко известна под другим названием – «*дилемма заключенного*».

По рассмотренной классификации – дискретная однократная некооперативная игра двух лиц с полной информированностью.

Также можно заметить, что, в отличие от предыдущей игры, при любых стратегиях игроков сумма их выигрышей в результате не равна нулю, то есть это – игра с непротивоположными интересами.

Пример 3. «Фермеры на общем поле».

Два фермера пасут коров на общем поле.

Количество молока x, которое приносит корова, зависит от общего числа коров на поле,

$$x = 120 - n \text{ (литров)},$$

где $n = n_1 + n_2$ – общее количество коров на поле.

Доход фермера определяется количеством молока, приносимым его коровами:

$$\Pi_1 = n_1 (120 - n_1 - n_2),$$

$$\Pi_2 = n_2 (120 - n_1 - n_2).$$

Сколько коров выпустят на поле фермеры? В этой игре действия игроков – n_1 и n_2, а выигрыши – Π_1 и Π_2. Это также дискретная однократная некооперативная игра двух лиц с полной информированностью.

Если предположить, что фермер может выпускать коров не на полный день, то полученная игра будет уже непрерывной, множество действий каждого фермера будет представлять собой отрезок действительной оси.

Пример 4. «Аукцион», *игра с неполной информированностью*.

На аукционе на продажу выставлен предмет. Есть один продавец и один покупатель.

Цена предмета для продавца (минимальная цена, по которой продавец готов продать предмет) r_s, цена для покупателя (максимальная цена, по которой покупатель готов купить предмет) – r_b.

Оба игрока знают свою цену, но не знают цену противника. Они делают заявки p_s и p_b.

Если заявка покупателя выше заявки продавца, то предмет продается по средней стоимости

$$p = (p_s + p_b) / 2.$$

Если заявка продавца выше заявки покупателя, то сделка не состоится.

Это также непрерывная игра двух лиц с непротивоположными интересами, причем имеется неопределенность относительно параметров (*предпочтений*), характеризующих противника. Для завершения описания этой игры необходимо определить *вид неопределенности*, то есть вид информации, которую могут иметь игроки о предпочтениях друг друга. В зависимости от вида этой неопределенности можно ставить различные вопросы, например, каковы рациональные ставки игроков в случаях, если:

- продавец знает лишь, что цена покупателя лежит в диапазоне от b до B, а покупатель знает, что цена продавца лежит в диапазоне от s до S?

- продавец знает вероятность $P_1(b')$, $b' \in [b; B]$ того, что цена покупателя равна b', а покупатель знает вероятность $P_2(s')$, $s' \in [s; S]$, того, что цена продавца равна s'?

Пример 5. «Дележ в оркестре», *кооперативная игра в форме характеристической функции.*

Директор клуба обещает 100 руб. певцу S, пианисту P и ударнику D за совместное выступление.
Дуэт певца и пианиста он оценивает в 80 руб.,
Дуэт ударника и пианиста – в 65 руб.,
Один пианиста – в 30 руб.
Другие дуэты и солисты им не рассматриваются (присутствие пианиста он считает обязательным).
В других местах дуэт ударник-певец зарабатывает 50 руб.,
певец – 20 руб.
Ударник один ничего не может заработать.
Как должны быть поделены деньги от выступления оркестра, чтобы никто не был обижен?