Вероятностные модели порогового поведения

Андрей Рогаткин

19.11.2014.

Социальное поведение с бинарным действием

- забастовки и стачки
- выборы
- уход с просмотра фильма
- эпидемии
- распространение инноваций
- распространение слухов
- иммиграция
- смена профессии

...

Модель Грановеттера порогового коллективного поведения

Сеть состоит из n агентов.

Агент i описывается порогом сопротивления социальному давлению $\theta_i \in [0,1]$.

На каждом шаге k каждый агент выбирает своё действие

$$\omega_{ik} \in \{0,1\}.$$

Действие агента зависит только от среднего действия других агентов.

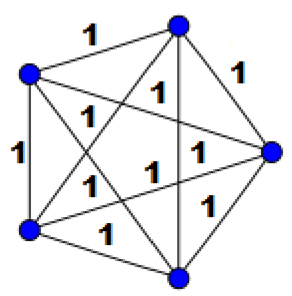
$$\omega_{i(k+1)} = \begin{cases} 1, & \dfrac{1}{n}\sum_j \omega_{jk} - \theta_i \geq 0, \\ 0, & \dfrac{1}{n}\sum_j \omega_{jk} - \theta_i < 0. \end{cases}$$

Связь модели Грановеттера с LTM

Модель Грановеттера является частным случаем LTM (Linear Threshold Model)

$$\omega_{i(k+1)} = \begin{cases} 1, & \dfrac{1}{n}\sum_j a_{ij}\omega_{jk} - \theta_i \geq 0, \\ 0, & \dfrac{1}{n}\sum_j a_{ij}\omega_{jk} - \theta_i < 0. \end{cases}$$

для которого $a_{ij} = 1$ и граф сети полный.



Метод Грановеттера анализа системы

Оказывается, что состояние системы может быть описано в терминах всего одной переменной – среднего действия $x_k = \frac{1}{n}\sum_i \omega_{ik}$.

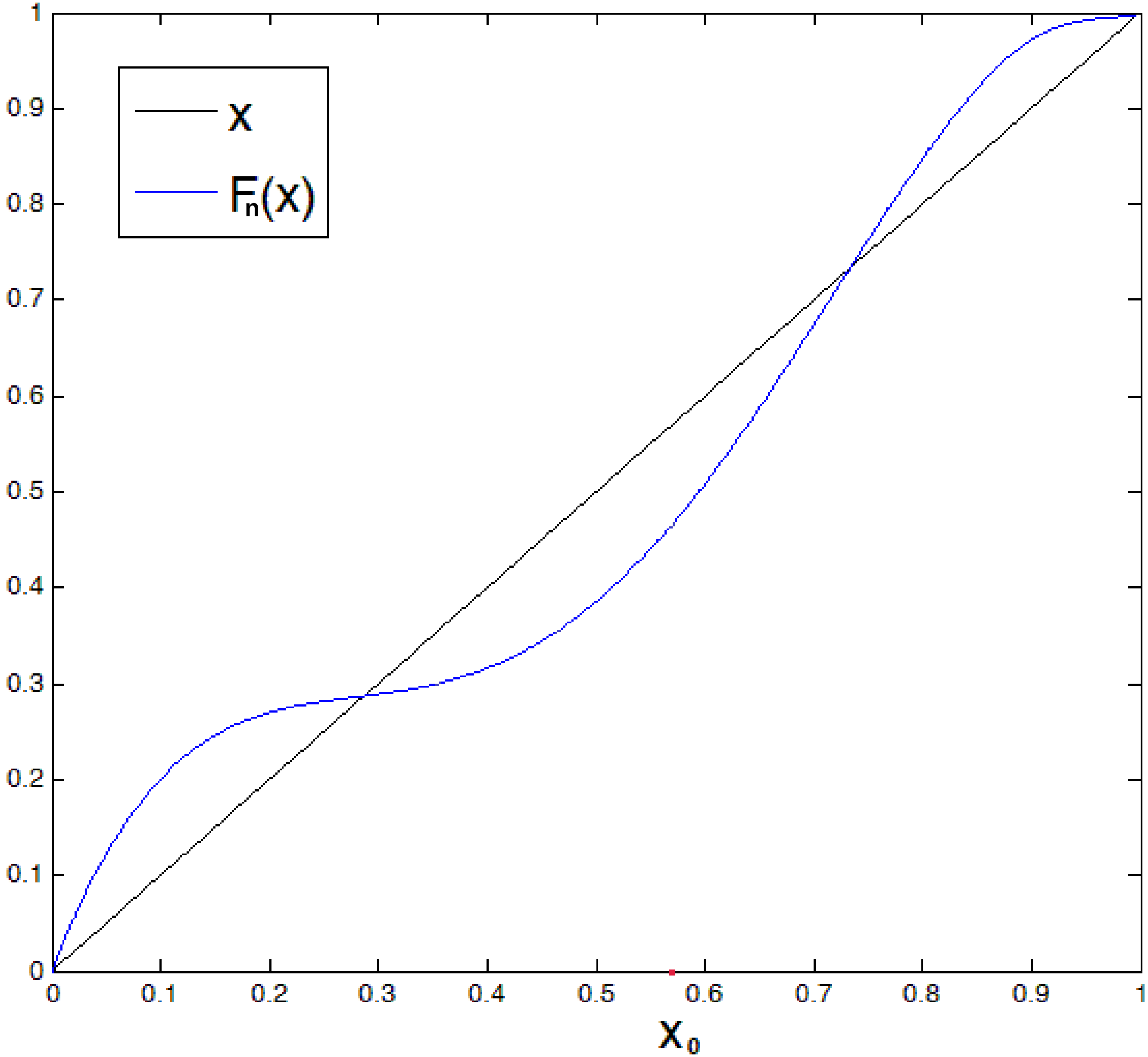
Динамика системы при этом задаётся рекуррентным соотношением

$$x_{k+1} = F_n\left(x_k\right),$$

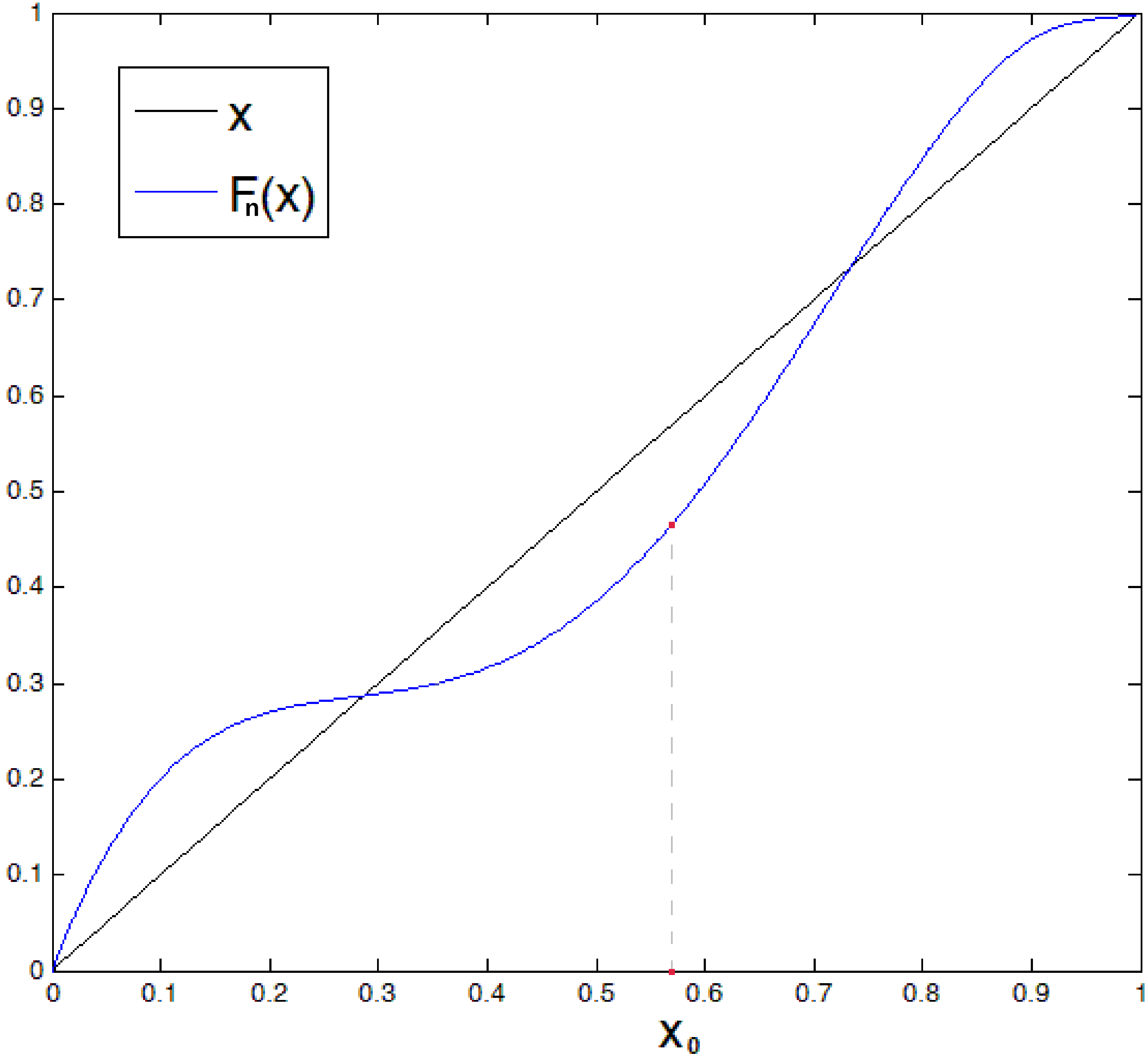
$$F_n\left(x\right) = \frac{1}{n}\sum_i \chi\left(\theta_i \le x\right).$$

$F_n\left(x\right)$ – эмпирическая функция распределения порогов.

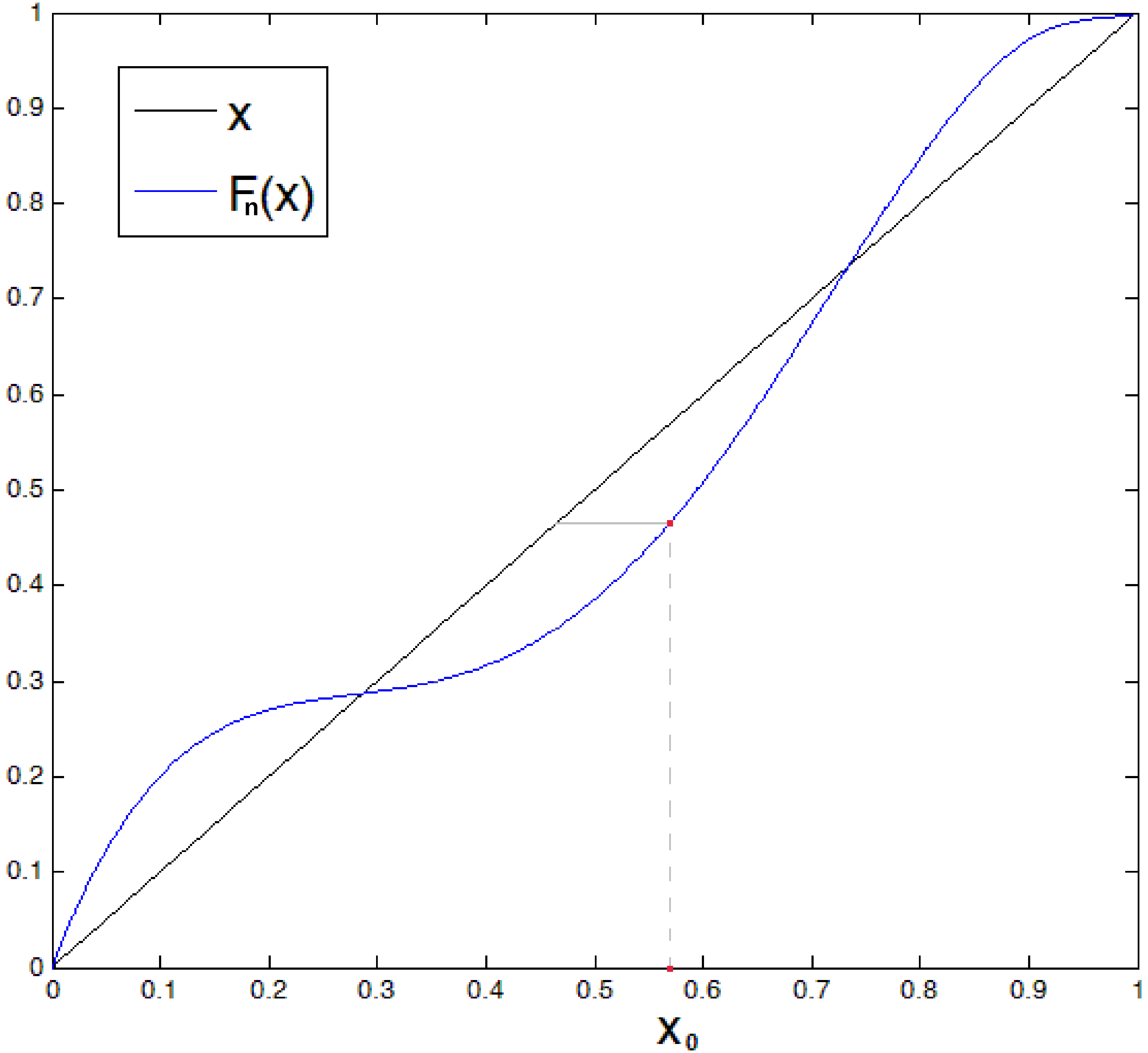
Динамика системы



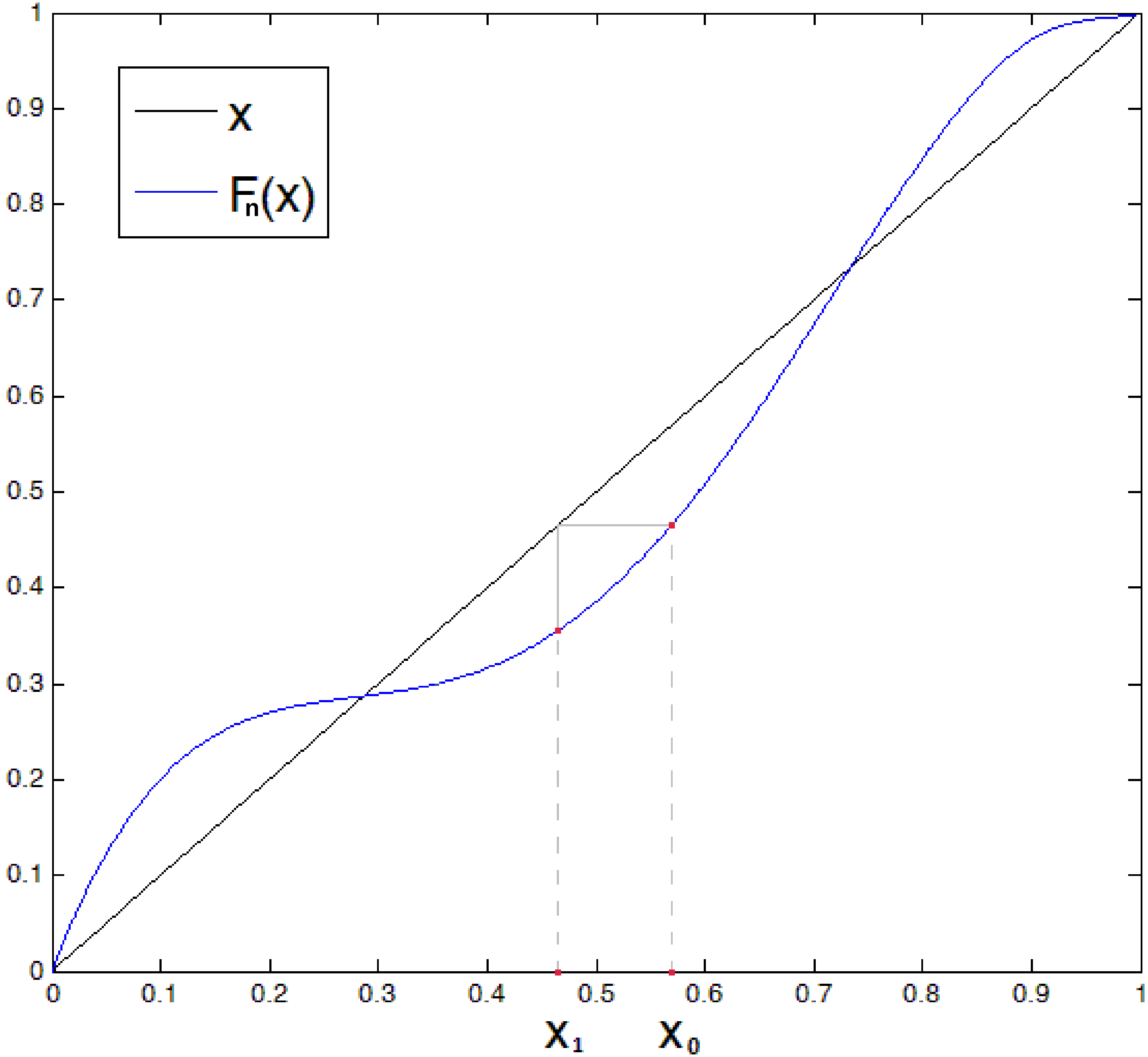
Динамика системы



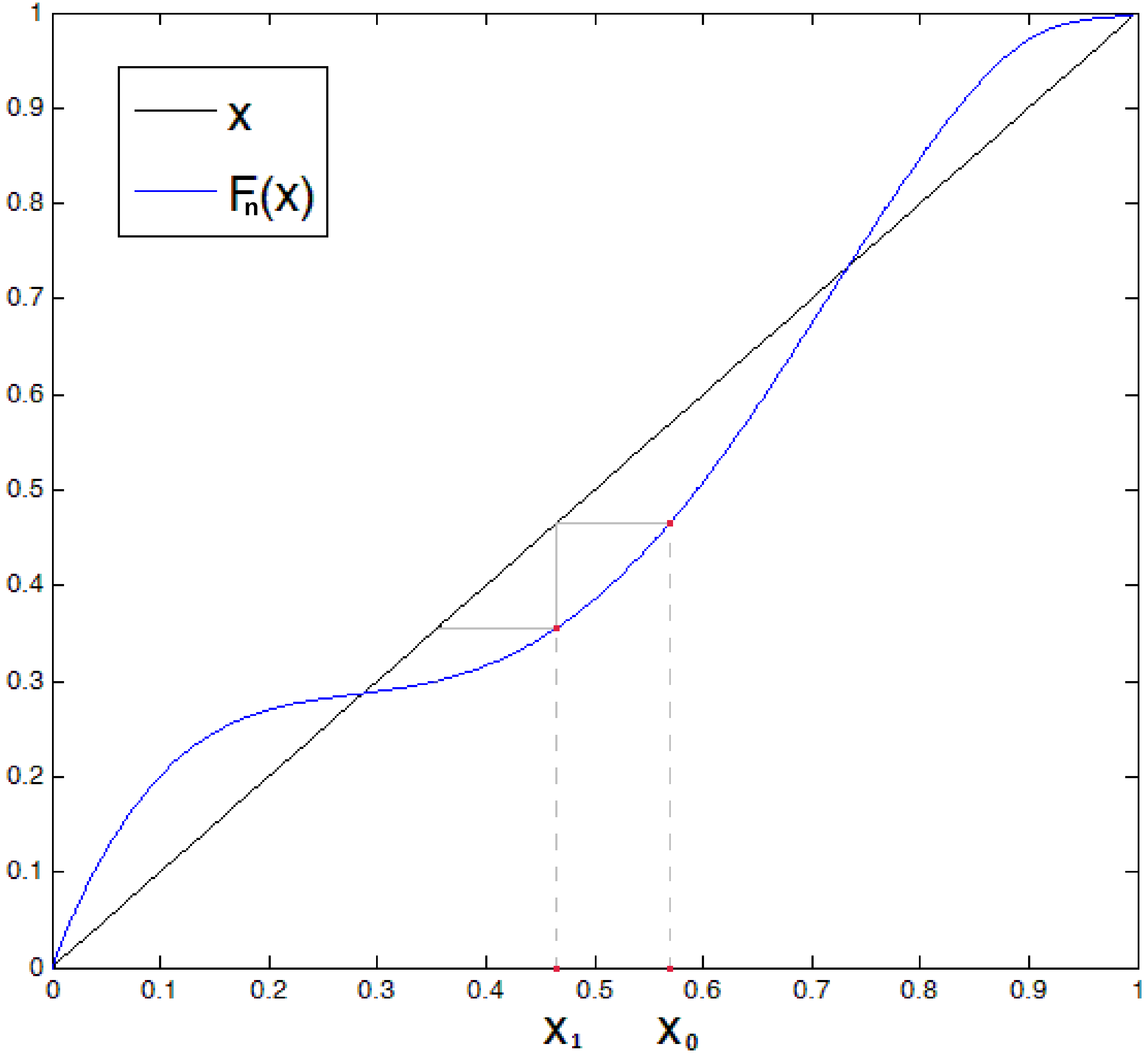
Динамика системы



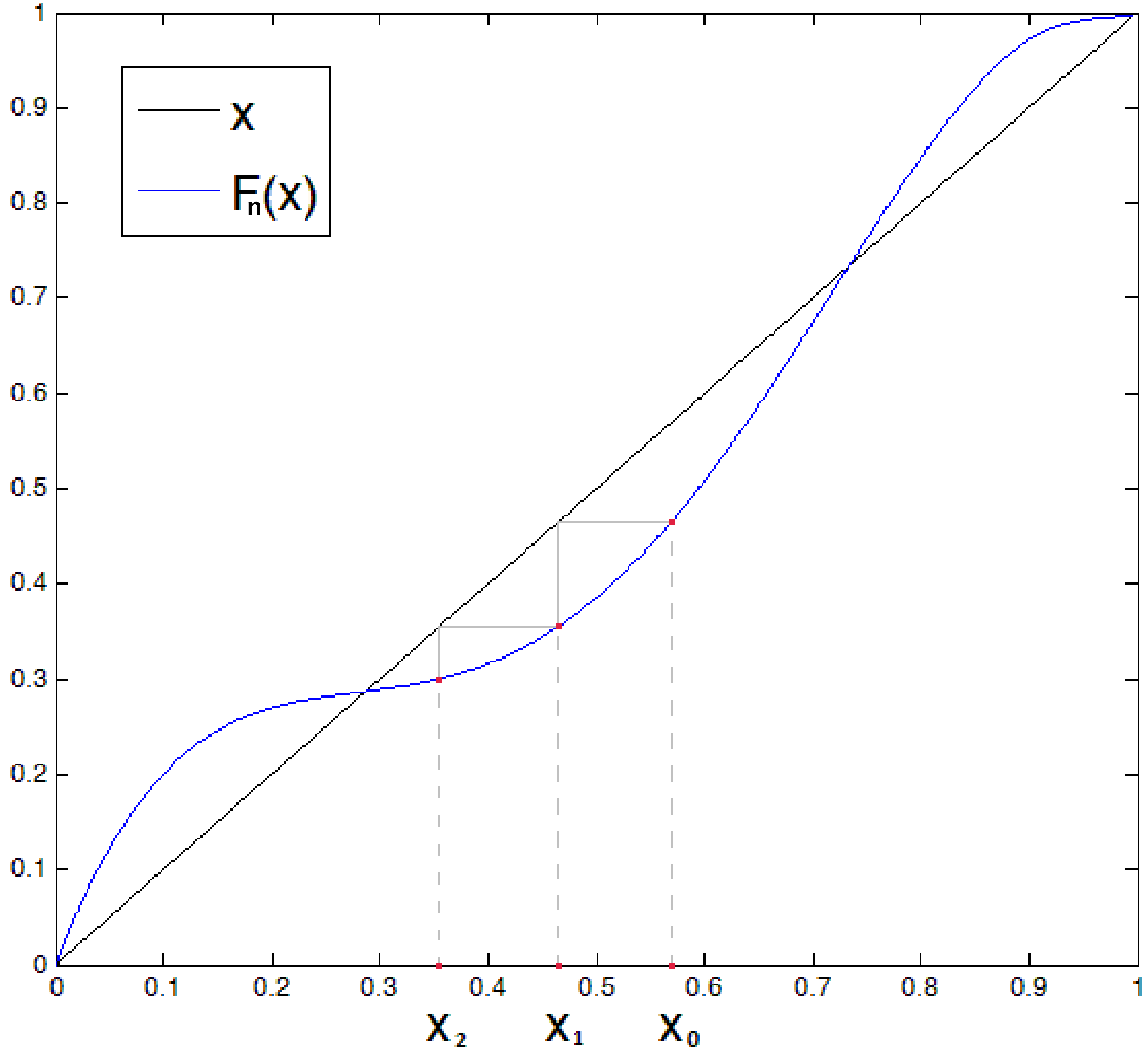
Динамика системы



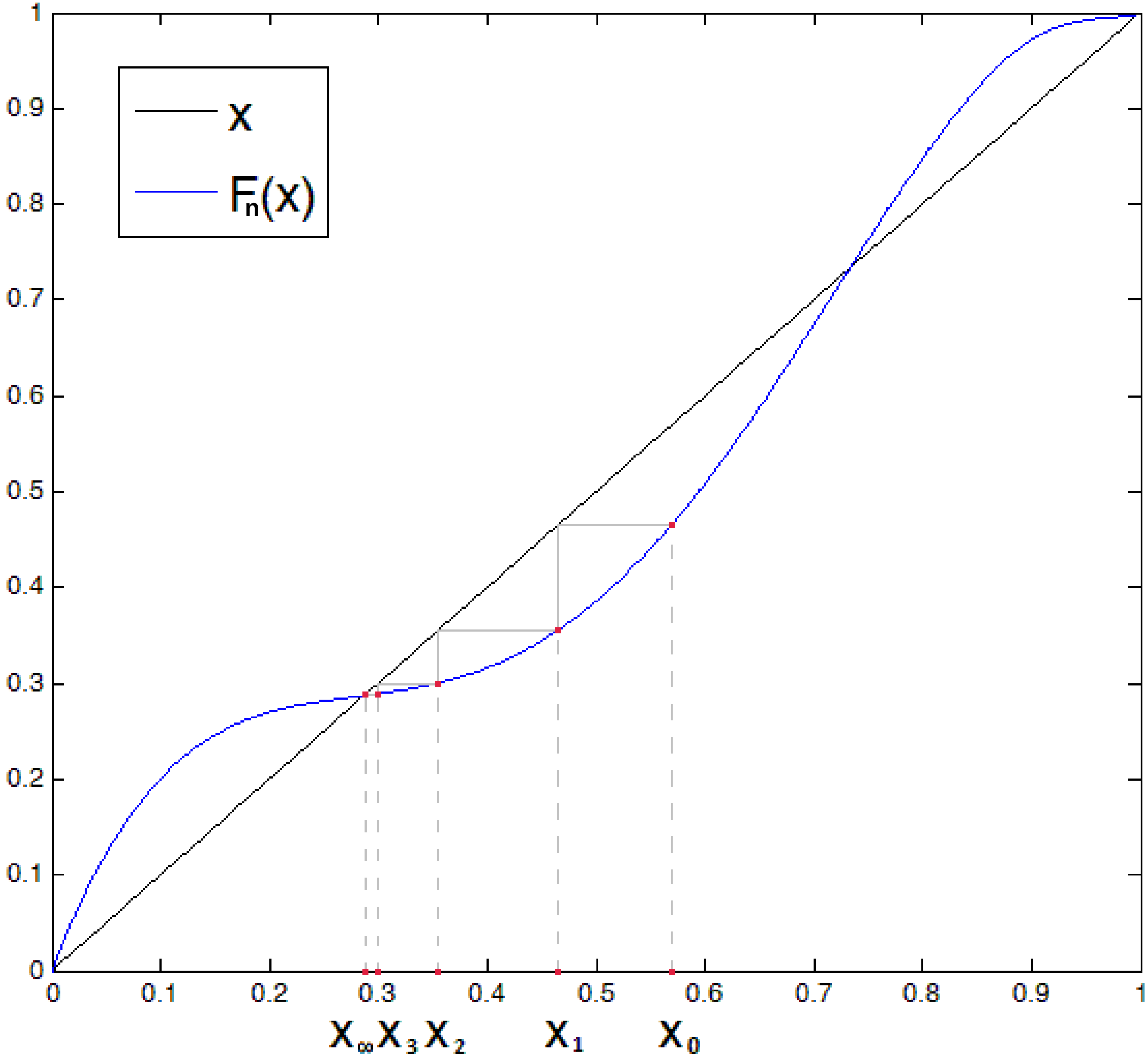
Динамика системы



Динамика системы



Динамика системы



Вероятностная неопределённость

Мы не знаем точных порогов агентов, но знаем их распределение (модель независимых одинаково распределённых случайных величин)

$$\theta_i \sim F$$

Модель может применяться в случаях:

- пороги измерены у случайной выборки агентов
- агенты выбраны случайным образом из группы агентов с известным распределением порогов
- пороги агентов случайным образом формируются в единой «информационной среде»

...

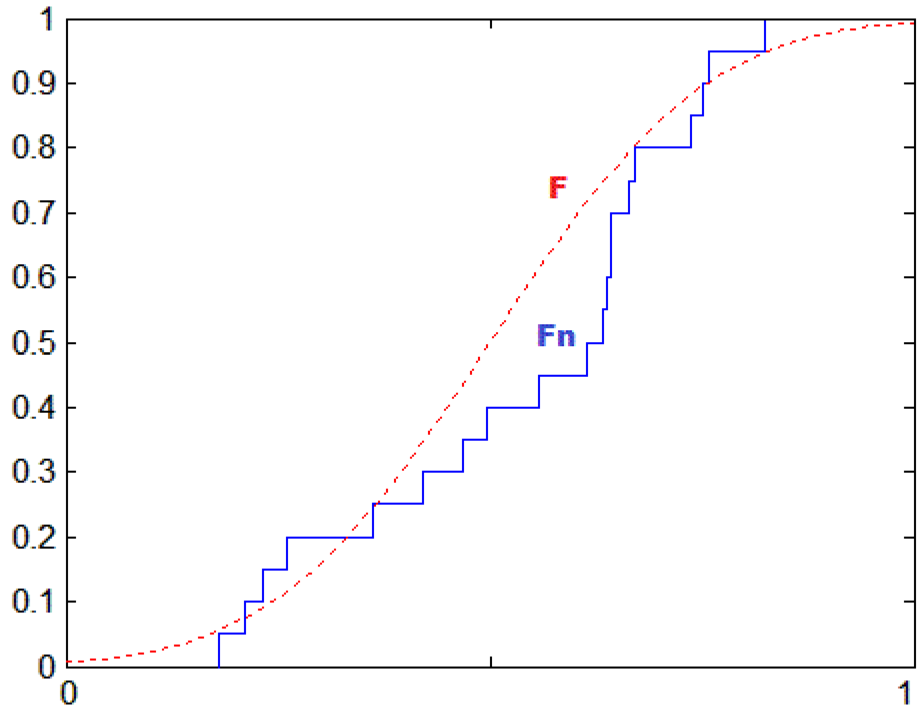
Эмпирическая функция распределения

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\theta_1(\omega), \ldots, \theta_n(\omega)$

$\theta_i : \Omega \to \mathbb{R}$

$\mathbb{P}\left(\theta_i(\omega) \le x\right) = \mathrm{F}(x)$



$$F_n(x, \omega) = \frac{1}{n} \sum_i \chi\left(\theta_i(\omega) \le x\right)$$

Эмпирическая функция распределения

Упражнения:

1. $EF_n(x,\omega) = F(x)$

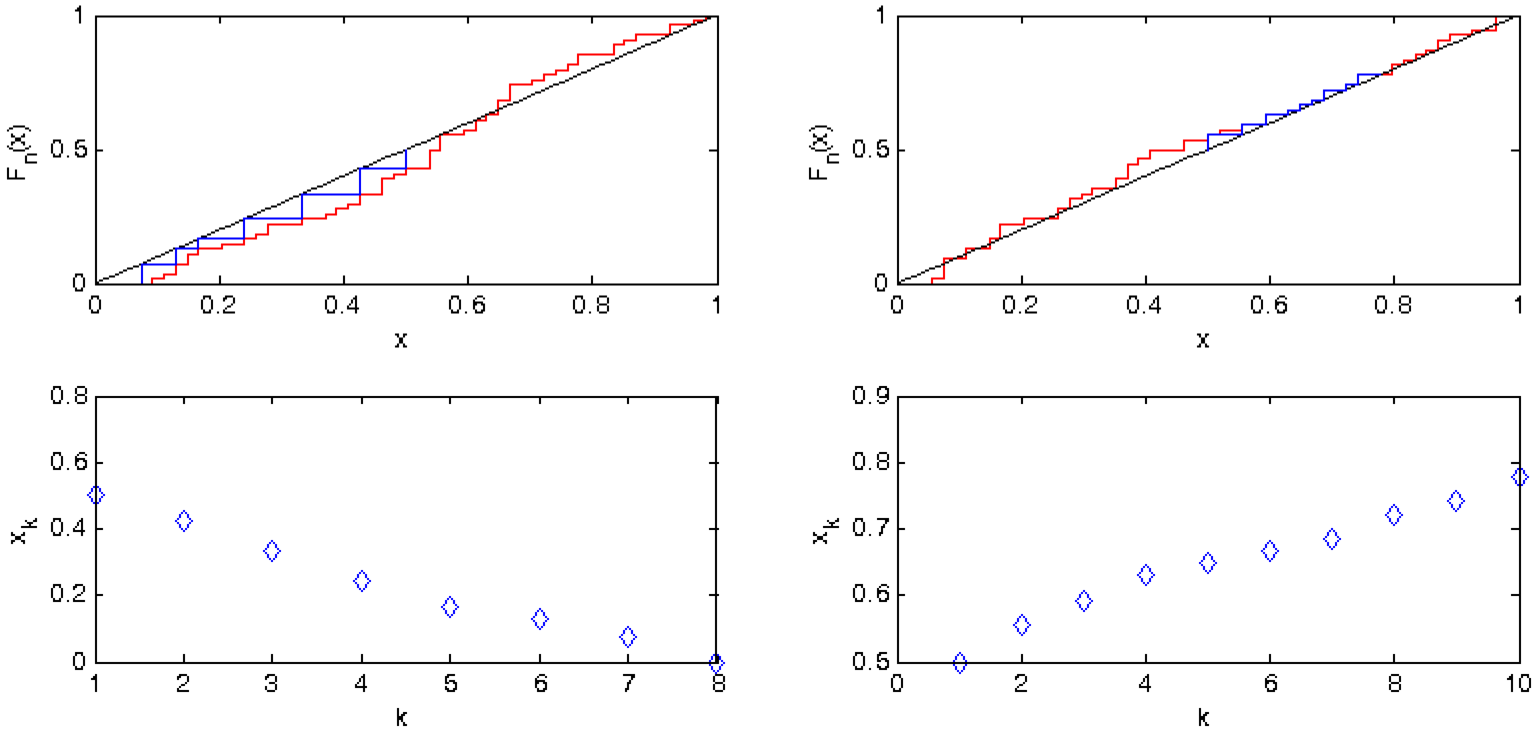
2. $Var\left(F_n(x,\omega) - F(x)\right) = \dfrac{1}{n} F(x)\left(1 - F(x)\right)$

3. $\mathbb{P}\left\{F_n(x,\omega) = \dfrac{k}{n}\right\} = C_n^k \cdot F^k(x) \cdot \left(1 - F(x)\right)^{n-k}$

Случайная траектория

$$x_0(\omega) = x_0$$

$$x_k(\omega) = F_n\left(x_{k-1}(\omega), \omega\right)$$



Эмпирическая функция распределения II

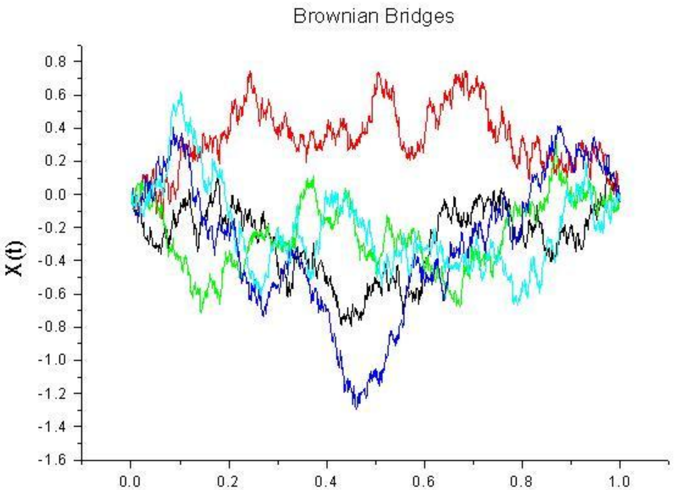
$$x_k(\omega) = F_n\left(x_{k-1}(\omega), \omega\right)$$

$$x_k - x_{k-1} = F\left(x_{k-1}\right) - x_{k-1} + \left[F_n\left(x_{k-1}, \omega\right) - F\left(x_{k-1}\right)\right]$$

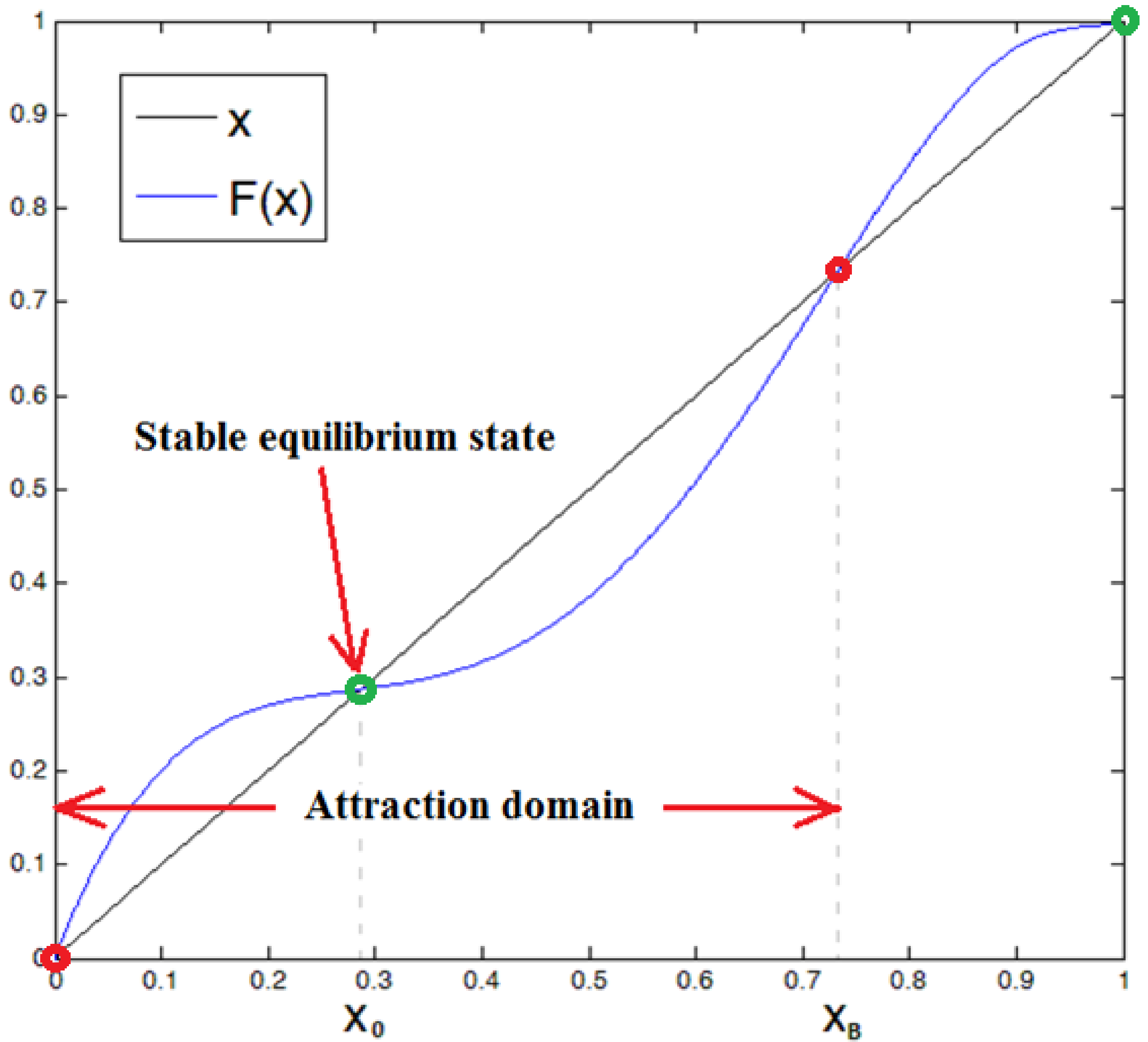
$$\sqrt{n}\left(F_n(x, \omega) - F(x)\right) \to B(x, \omega)$$ (см. теорему Донскера)

$B(x, \omega)$ - броуновский мост: гауссовский случайный процесс с дисперсией $F(x)\left(1 - F(x)\right)$

$$B(0, \omega) = B(1, \omega) = 0$$



Область притяжения положения равновесия

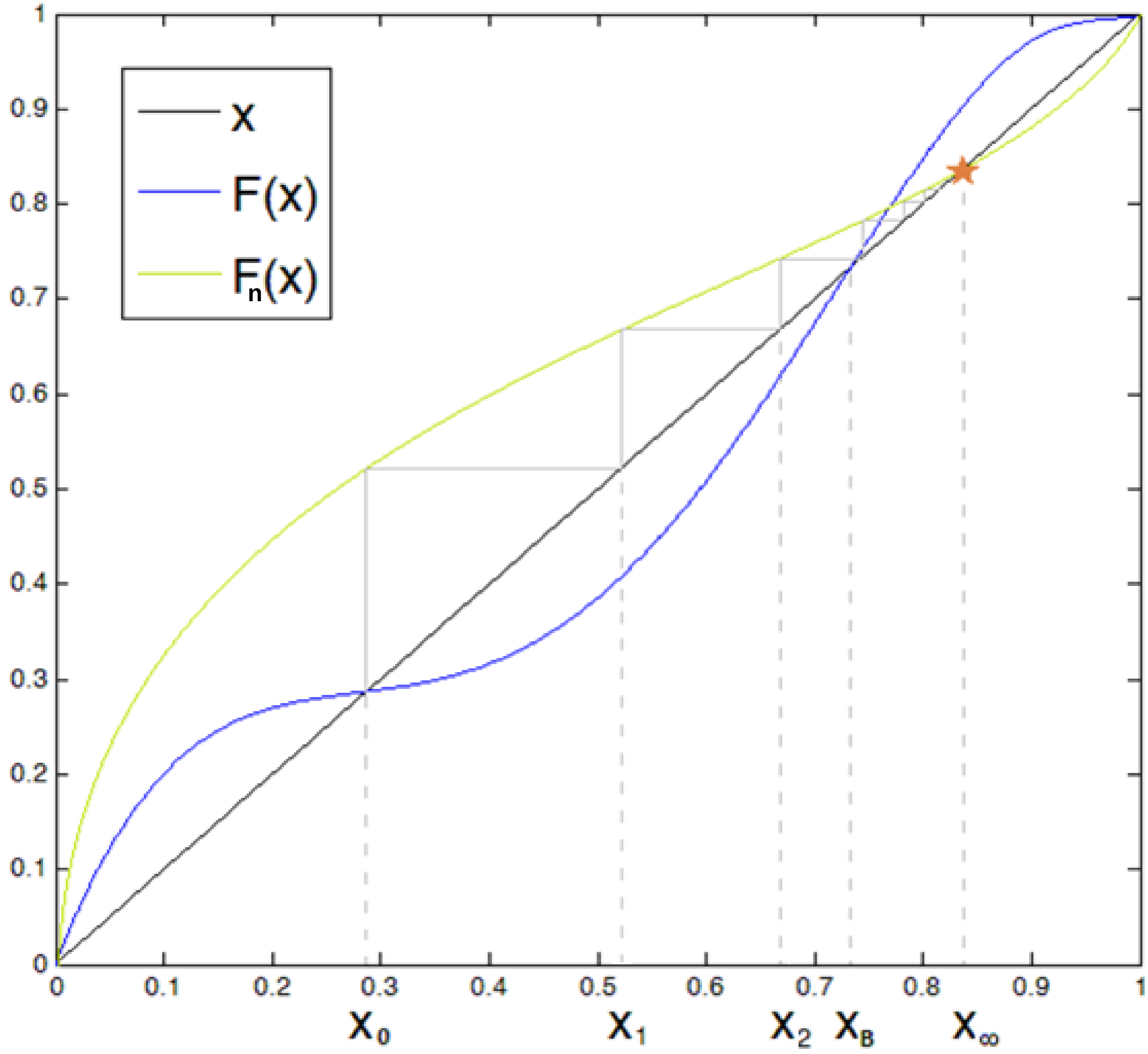


Задача выхода из области

Система, заданная распределением порогов F находится в области притяжения устойчивого положения равновесия в нулевой момент времени.

Какова вероятность того, что после завершения динамического процесса система будет находиться вне этой области?

Задача выхода из области



Случайная траектория

$$n = 100$$

$$x_0 = 0.2$$

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-(x-0.5)}}$$

Упражнения:

1. Найдите $\mathbb{P}\left(x_1(\omega) = x_0\right)$.

2. Оцените $\mathbb{P}\left(x_1(\omega) > x_0\right)$.

Вероятность траектории

<u>Утверждение 1.</u> Множество допустимых траекторий конечно и состоит из монотонных последовательностей, причём траектория реализуется с вероятностью

$$P_F\left\{\theta : x_1(\theta) = \frac{m_1}{n}, \ldots, x_K(\theta) = \frac{m_K}{n}\right\} = \Delta\left(n, \overline{m}_K\right)\prod_{k=0}^{K}\left(F_k - F_{k-1}\right)^{m_{k+1}-m_k},$$

$$\Delta\left(n, \overline{m}_K\right) = \frac{n!}{m_1!\left(m_2 - m_1\right)!\ldots\left(n - m_K\right)!},$$

$$F_0 = F\left(x_0\right),\ F_1 = F\left(\frac{m_1}{n}\right), \ldots, F_K = F\left(\frac{m_K}{n}\right).$$

Аппарат больших уклонений

$$E\xi_i = 0$$

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}\left(0, Var\xi_i\right)$$

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \to 0$$

Если сумма случайных величин нормирована на ‘n’, предельное распределение вырождено. Однако в некоторых случаях можно доказать, что скорость сходимости экспоненциальная и найти показатель экспоненты.

$$P\left(A\right) \asymp e^{-n \cdot \inf\limits_{y \in A} I\left(y\right)}$$

Аппарат больших уклонений

Пусть $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - последовательность вероятностных мер на Польском пространстве E и $I:E\to[0,\infty]$ - функция.

Говорят, что $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет *принципу больших уклонений* с функцией действия I, если

1. Для любого $a\geq 0$ множество $\{x:I(x)\leq a\}$ компактно
2. Для любого открытого множества U
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_n(U)\geq -\inf_{x\in U} I(x)$$
3. Для любого замкнутого множества C
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_n(C)\geq -\inf_{x\in C} I(x)$$

Функционал действия (энтропия)

Пусть $F(x)$ - теоретическая функция распределения порогов агентов с плотностью $f(x) = F'(x)$.

Тогда (т. Санова) эмпирическая функция распределения (случайная величина!) удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия

$$I(G) = \int_0^1 G'(x) \log \frac{G'(x)}{f(x)} dx \ .$$

Вероятность выхода из области

Утверждение 2. Вероятность выхода из области удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_B = -\left[x_1\log\frac{x_1}{F(x_1)} + (1-x_2)\log\frac{(1-x_2)}{(1-F(x_2))} + \int_{x_1}^{x_2}\log\frac{1}{F'(x)}dx\right],$$

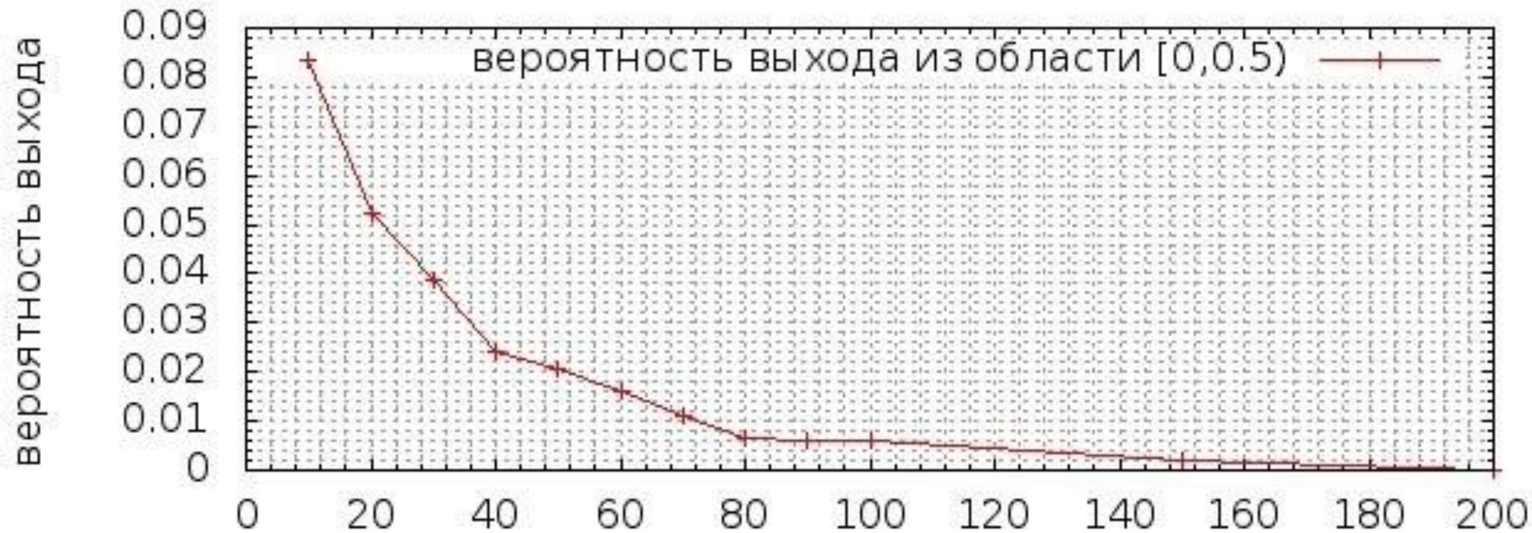
где x_1 - наименьший корень уравнения

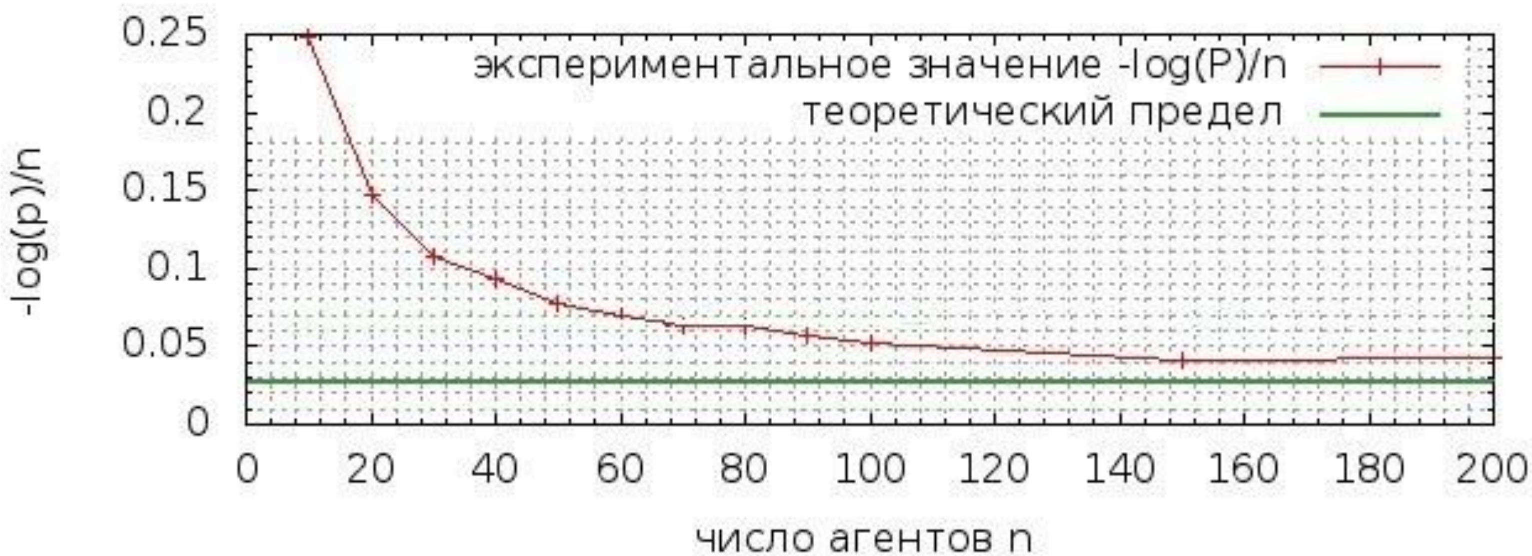
$$F'(x_1) = \frac{F(x_1)}{x_1},$$

а x_2 - наибольший корень уравнения

$$F'(x_2) = \frac{1-F(x_2)}{1-x_2}.$$

Численный эксперимент





Численный эксперимент

Численные значения для 200 агентов

$$P_{theory} = e^{-n \cdot \inf\limits_{A_{exit}} I(y)} \sim e^{-5},$$

Практическое значение подхода – возможность быстро получить грубую оценку вероятности редких событий.

Полный принцип б.у.

Утверждение 3. Последовательность вероятностных мер на пространстве траекторий системы (монотонных последовательностей) удовлетворяет полному принципу больших уклонений с функцией действия

$$I^s(\{x_k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_{k+2} - x_{k+1}) \ln\left(\frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{F(x_{k+1}) - F(x_k)} \right)$$

Спасибо!