



ИПУ РАН



МФТИ

ТЕОРИЯ РЕФЛЕКСИВНЫХ ИГР

Новиков Дмитрий Александрович

dan@ipu.ru, www.ipu.ru, www.mtas.ru

1. Модели принятия решений. Природная и игровая неопределенность. Роль информированности. Общее знание.
2. Рефлексия.
3. Стратегическая рефлексия. Рефлексивные разбиения. Максимальный целесообразный ранг рефлексии. Примеры.
4. Информационная рефлексия. Структуры информированности. Информационное равновесие. Примеры.
5. Стабильность и истинность информационного равновесия.
6. Задачи информационного управления.
7. Рефлексивные отображения.
8. Рефлексивная неманипулируемость
9. Примеры.
10. Перспективы
11. Литература.

МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

A – множество допустимых действий агента.

Функция полезности $f(y): A \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Множество выбора: $P(f(\cdot), A) = \operatorname{Arg} \max_{y \in A} f(y)$.

Гипотеза рационального поведения – агент выбирает с учетом всей имеющейся у него информации наилучшую с его точки зрения допустимую альтернативу, т.е. одну из альтернатив y^* , на которых достигается максимум его целевой функции:

$$y^* = \arg \max_{y \in A} f(y).$$

Принципы ограниченной рациональности:

- выбор ε -оптимальных действий: $P_\varepsilon(f(\cdot), A) = \{y \in A \mid f(y) \geq f(y^*) - \varepsilon\}$,
- или действий, обеспечивающих агенту заданный уровень полезности $\bar{f}$:

$$P(f(\cdot), A, \bar{f}) = \{y \in A \mid f(y) \geq \bar{f}\}.$$

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ИГРОВОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Теория игр описывает взаимодействие рациональных субъектов в ситуации, когда выигрыш одного зависит от действий всех (в общем случае), то есть *игра* определяется как такое взаимодействие, в котором выигрыш каждого агента зависит как от его собственного действия, так и от действий других агентов.

Пусть задано множество *игроков* $N = \{1, 2, \dots, n\}$. i -ый игрок выбирает действие y_i из множества своих допустимых действий $y_i \in A_i$, $i \in N$. Совокупность действий всех игроков называются *ситуацией игры* (*игровой ситуацией*): $y = (y_1, \dots, y_n)$. Целевая функция i -го игрока зависит от игровой ситуации y и описывается отображением $f_i(y): A' \rightarrow \mathbb{R}^1$, где $A' = \prod_{i \in N} A_i$. Т.е. каждой комбинации действий игроков соответствует некоторый выигрыш каждого из них. Совокупность множества игроков (агентов), целевых функций и допустимых множеств агентов $\Gamma_0 = \{N, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N}, \{A_i\}_{i \in N}\}$ называется *игрой в нормальной форме*. При этом предполагается, что каждый из игроков выбирает свои действия однократно, одновременно с другими игроками и независимо, то есть, не имея возможности договариваться с ними о своих стратегиях поведения (так называемая *модель некооперативного поведения*). *Решением игры* (*равновесием*) называется множество устойчивых в том или ином смысле векторов действий агентов.

РАВНОВЕСИЯ В НЕКООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ

Гарантирующее равновесие.

Пусть i -ый игрок считает, что все остальные игроки действуют против него. Это – критерий максимального гарантированного результата – МГР, который соответствует тому, что игрок выбирает действие

$$(1) \ y_i^* \in \operatorname{Argmax}_{y_i \in A_i} \min_{y_{-i} \in A_{-i}} f_i(y_i, y_{-i}),$$

где $A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$, $y_{-i} = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ – *обстановка игры* для i -го агента

Вектор действий игроков, состоящий из компонентов, описываемых (1), $i \in N$, называется *максиминным*, или *гарантирующим равновесием*.

Равновесие в доминантных стратегиях.

y_i^d – *доминантное действие* i -го агента, если если какая бы обстановка игры не складывалась и какое бы действие не выбирал i -ый игрок при этой обстановке, его выигрыш будет максимальным при выборе именно доминантного действия:

$$\forall y_i \in A_i \ \forall y_{-i} \in A_{-i} \quad f_i(y_i^d, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i}).$$

Если у каждого игрока существует доминантное действие, то совокупность доминантных действий называется *равновесием в доминантных стратегиях* (РДС) $\{y_i^d\}_{i \in N}$.

Равновесие Нэша $y^N \in A'$:

$$\forall i \in N \ \forall y_i \in A_i \quad f_i(y_i^N, y_{-i}^N) \geq f_i(y_i, y_{-i}^N),$$

то есть для любого агента и для любого допустимого его действия выбор им равновесного по Нэшу действия дает ему выигрыш не меньший, чем при выборе любого другого действия при условии, что остальные игроки выбирают равновесные по Нэшу действия.

Игра в нормальной форме:

$$\Gamma_0 = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}\}$$

N - множество игроков (агентов),

$(X_i)_{i \in N}$ - множества допустимых действий

$(f_i(\cdot))_{i \in N}, f_i: X \rightarrow \mathcal{R}^1$ - целевые функции, $i \in N$.

Равновесие Нэша:

$$\forall i \in N \quad x_i^* \in \operatorname{Argmax}_{x_i \in X_i} f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*).$$

Общее знание (common knowledge – D. Lewis (1969), R. Aumann (1976)) - факт, который:

- i) известен всем агентам
- ii) всем агентам известно i)
- iii) всем агентам известно ii)
- и т.д. до бесконечности.

ИГРЫ И ИНФОРМИРОВАННОСТЬ

Глубина 1	Дж. фон Нейман, О. Morgenштерн (1944)	
	Дж. Нэш (1951)	
2	Дж. Харшаньи (1968-69)	} Рефлексивные игры
3	J. Sacovics (2001)	
.....		
∞	J.-F. Mertens, S. Zamir (1985)	

МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ

Наиболее распространенной моделью динамики коллективного поведения является *модель индикаторного поведения* (Малишевский, 1974; Опойцев, 1977), суть которой заключается в следующем. Предположим, что каждый агент в момент времени t наблюдает действия всех агентов $\{x_i^{t-1}\}_{i \in N}$, выбранные в предыдущий момент времени $t-1$, $t = 1, 2, \dots$ (начальный вектор действий $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ считается заданным). Каждый агент может рассчитать свое *текущее положение цели* – такое его действие, которое максимизировало бы его целевую функцию при условии, что в текущем периоде все агенты выбрали бы те же действия, что и в предыдущем:

$$w_i(x_{-i}^{t-1}) = \arg \max_{y \in \mathcal{H}^1} F_i(y, x_{-i}^{t-1}), i \in N.$$

В рамках гипотезы индикаторного поведения каждый агент в каждый момент времени будет делать «шаг» от своей предыдущей стратегии к текущему положению цели:

$$x_i^t = x_i^{t-1} + \gamma_i^t [w_i(x_{-i}^{t-1}) - x_i^{t-1}], i \in N, t = 1, 2, \dots,$$

где $\gamma_i^t \in [0; 1]$ – «величины шагов».

«РЕФЛЕКСИЯ (лат. reflexio – обращение назад). Термин, означающий отражение, а также исследование познавательного акта».

Рефлексия первого рода (авторerefлексия) и второго рода.

Примеры: «Задача о скоординированной атаке», «Electronic Mail Game», «Задача о двух брокерах»,

Максимальный ранг рефлексии, который следует иметь агенту для того, чтобы охватить все многообразие исходов игры (упуская из виду некоторые стратегии оппонента, агент рискует уменьшить свой выигрыш), назовем *максимальным целесообразным рангом рефлексии*.

ИНФОРМАЦИОННАЯ И СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ

Рефлексивной является *игра*, в которой информированность игроков не является общим знанием. С точки зрения теории игр и рефлексивных моделей принятия решений целесообразно разделять стратегическую и информационную рефлексия.

Информационная рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие игроки). При этом собственно «игровая» компонента отсутствует, так как никаких решений игрок не принимает.

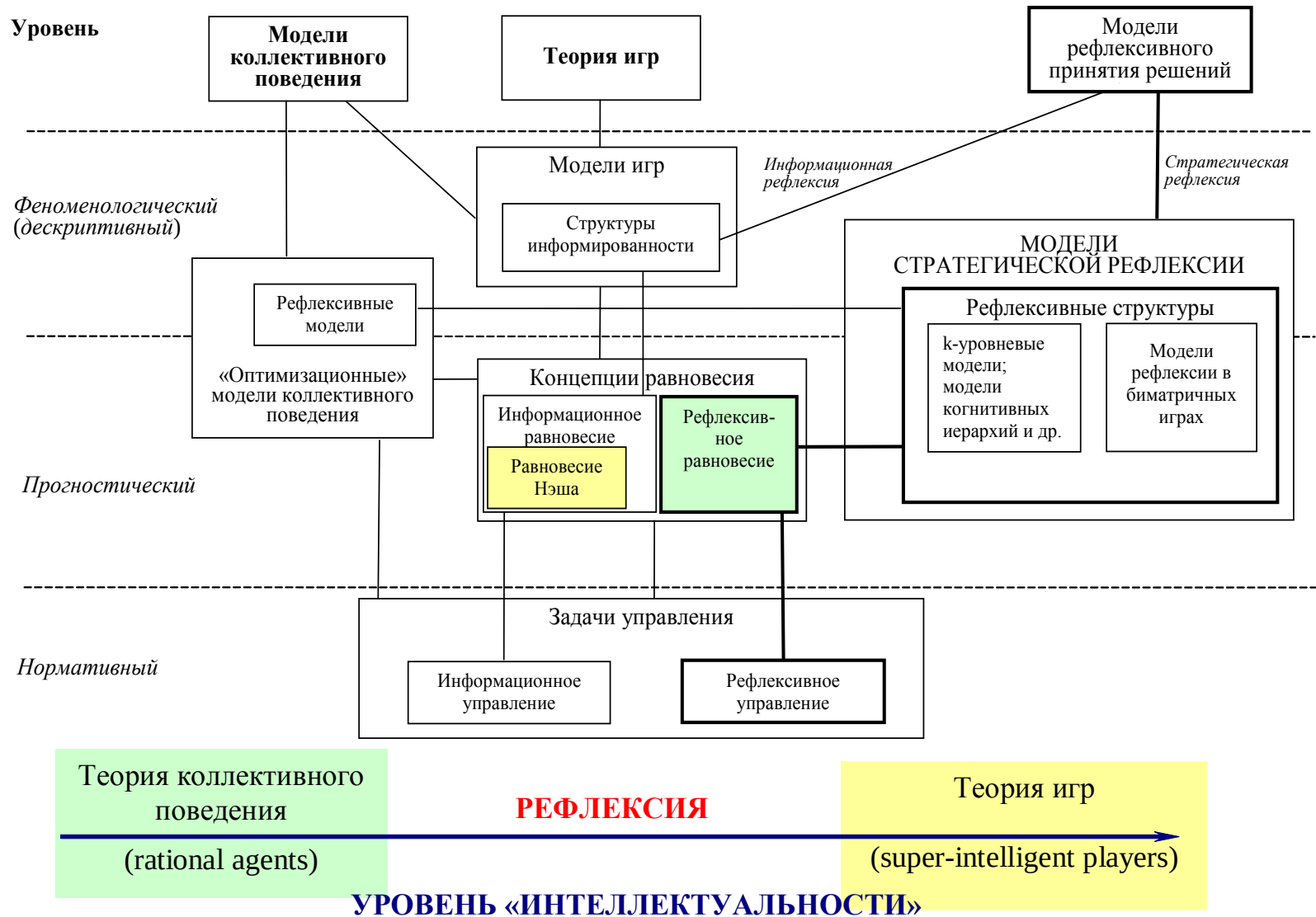
Иными словами, информационная рефлексия относится к информированности агента о природной реальности (какова игра), и о рефлексивной реальности (какой видят игру другие).

Информационная рефлексия логически предшествует рефлексии несколько иного рода – стратегической рефлексии.

Стратегическая рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты (другие игроки) в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии.

Таким образом, информационная рефлексия имеет место только в условиях неполной информированности, и ее результат используется при принятии решений (в том числе – при стратегической рефлексии). Стратегическая рефлексия имеет место даже в случае полной информированности, предваряя принятие игроком решения о выборе действия. Другими словами, информационная и стратегическая рефлексии могут изучаться независимо, однако в условиях неполной информированности обе они имеют место. 11

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ (ИНФОРМАЦИОННАЯ И СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ)



СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ: РЕФЛЕКСИВНЫЕ РАЗБИЕНИЯ

Определим $\aleph = \{N_0, N_1, \dots, N_m\}$ – разбиение множества агентов N , где N_i – множество агентов i -го ранга рефлексии, $i = \overline{0, m}$, m – максимальный ранг рефлексии, $n_i = |N_i|$, $i \in N$, $\sum_{i=0}^m n_i = n$. Назовем $\aleph$ **рефлексивным разбиением**.

Нулевой ранг рефлексии. Будем считать, что $\emptyset$ агенты $\emptyset$ с нулевым рангом рефлексии (принадлежащие множеству N_0) выбирают свои действия, считая, что действия остальных агентов будут такими же, что и в предыдущем периоде:

$$(1) x_i^t = x_i^{t-1} + \gamma_i^t [w_i(x_i^{t-1}) - x_i^{t-1}], i \in N_0, t = 1, 2, \dots$$

Первый ранг рефлексии. Агент j , обладающий первым рангом рефлексии ($j \in N_1$), считает всех остальных агентов обладающими нулевым рангом рефлексии и в соответствии с выражением (1) «предсказывает» их выбор. Поэтому его собственный выбор $x1_j^t$ будет ориентирован на наилучший ответ на ту обстановку, которая с его точки зрения должна сложиться: $x1_j^t = x1_j^{t-1} + \gamma_j^t [w_j(x_j^t) - x1_j^{t-1}], j \in N_1$.

k -й ранг рефлексии ($k \leq m$). Поведение агентов k -го ранга рефлексии описывается аналогично рассмотренным выше трем случаям (нулевого, первого и второго рангов рефлексии) с учетом следующей *рефлексивной структуры* агентов. Обозначим $\aleph_{jk}$ – *субъективное рефлексивное разбиение* – представления агента j , обладающего k -м рангом рефлексии, о разбиении всех агентов на ранги рефлексии:

$$\aleph_{jk} = (\underbrace{N_0, N_1, \dots, N_{k-2}, N_{k-1} \cup N_k \cup \dots \cup N_m \setminus \{j\}}_k, \underbrace{\{j\}, \dots, \dots}_{m-k-1}), j \in N_k.$$

Агент k -го ранга будет выбирать действия в соответствии с процедурой

$$xk_j^t = xk_j^{t-1} + \gamma_j^t [w_j(x_{l \in N_0}^t, x1_{l \in N_1}^t, \dots, x[k-1]_{l \in N_{k-1} \cup N_k \cup \dots \cup N_m \setminus \{j\}}^t) - xk_j^{t-1}], j \in N_k.$$

В «статическом» случае агент k -го ранга выберет действие

$$xk_j^*(\aleph_{jk}) = \arg \max_{y \in \mathfrak{Y}^1} F_j(y, x_{l \in N_0}^1, x1_{l \in N_1}^1, \dots, x[k-1]_{l \in N_{k-1} \cup N_k \cup \dots \cup N_m \setminus \{j\}}^1), j \in N_k.$$

Вектор действий агентов

$$x^*(\aleph) = \{xk_j^*(\aleph_{jk})\}_{j \in N_k, k = \overline{0, m}}$$

назовем **рефлексивным равновесием** игры $\Gamma_{\aleph} = \{N, F_i(\cdot)_{i \in N}, \aleph\}$.

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ СТРАТЕГИЧЕСКОЙ РЕФЛЕКСИИ

Обозначим n_{ijl} – представления агента i , обладающего j -м рангом рефлексии, о ранге рефлексии l -го агента. Для случая однородных агентов обозначим через q_{ijk} представления i -го агента j -го ранга рефлексии о доле агентов, имеющих ранг k , $q_k = n_k / n$ – «истинная» доля агентов k -го ранга. Общий **постулат**, принимаемый практически во всех моделях рефлексивного коллективного поведения: агент некоторого ранга рефлексии «не знает» о существовании других агентов его ранга или более высоких рангов, т. е. $\forall k > j \ q_{ijk} = 0, q_{ijj} = 1 / n$.

Основания системы классификаций моделей стратегической рефлексии:

- 1) Множество возможных действий агента (конечно или «бесконечно» – например, отрезок $\mathbb{R}^1$).
- 2) Принцип выбора действий агентами нулевого ранга рефлексии:
 - фиксированные (априори заданные) действия;
 - наилучший ответ на некоторые фиксированные (априори заданные) действия (например, результаты прошлого периода);
 - случайные в соответствии с заданным распределением (как правило, равномерным).
- 3) Агенты одинаковые (однородные, т. е. различаются только рангами рефлексии) или различные (отличаются еще и целевыми функциями);
- 4) Распределение (объективное) агентов по рангам рефлексии:
 - произвольное фиксированное;
 - случайное (в соответствии с вероятностным распределением Пуассона $q_k = e^{-\tau} \tau^k / k!$, где $\tau > 0$ – параметр распределения Пуассона).
- 5) Информированность агента k -го ранга относительно общего числа (множества) агентов:
 - знает множество N достоверно и считает, что эта информация является общим знанием;
 - имеет свои представления относительно общего числа (множества) агентов

Отметим, что практически все известные на сегодняшний день модели рефлексивного коллективного поведения используют первое предположение.

- 6) Информированность агента k -го ранга относительно агентов более низких рангов (от 0 до $k - 1$ включительно):
 - знает достоверно (или с некоторой погрешностью);
 - предполагает, что эти агенты распределены по рангам рефлексии от 0 до $k - 1$ включительно в соответствии с некоторым нормированным ($\forall k < j \ q_{ijk} = \frac{n_j}{\sum_{l=0}^{j-1} n_l} (n - 1)$) вероятностным распределением, как правило – распределением Пуассона);

– считает что все (!) остальные агенты имеют ранг $k - 1$.

- 7) Информированность агента k -го ранга относительно других агентов своего и более высоких рангов:
 - считает их всех принадлежащих нулевому рангу;
 - считает их всех принадлежащих $k - 1$ -му рангу;
 - предполагает, что эти агенты распределены по рангам рефлексии от 0 до $k - 1$ включительно в соответствии с некоторым вероятностным распределением (как правило – распределением Пуассона);
 - знает ранги их рефлексии и при выборе своего действия устраняет неопределенность относительно их поведения, рассчитывая на выбор ими наилучших для него действий.

СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ (БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ)

Пример («Снос на мизере»).

Действия	Н	С
Н	(3; 2)	(5; 1)
С	(5; 0)	(2; 3)

Матрица выигрышей в игре «Снос на мизере»

В рассматриваемом примере равновесия Нэша в чистых стратегиях не существует, а гарантирующие стратегии следующие: $i_0 = \text{«Н»}$, $j_0 = \text{«С»}$.

- $i_1 = \text{«Н»}$, $j_1 = \text{«Н»}$,
- $i_2 = \text{«С»}$, $j_2 = \text{«Н»}$,
- $i_3 = \text{«С»}$, $j_3 = \text{«С»}$,
- $i_4 = \text{«Н»}$, $j_4 = \text{«Н»}$,

...

Видно, что четвертый уровень одинаковых рангов рефлексии повторяет первый, и дальше субъективные гарантирующие стратегии будут периодически повторяться. Кроме того, $I_K = I$ при $K = 2$, а $J_L = J$ при $L = 1$, то есть первые два ранга рефлексии исчерпывают множества допустимых действий агентов, а первые три ранга исчерпывают все комбинации чистых стратегий.

Первому агенту выгодны следующие игры (то есть следующие комбинации рангов рефлексии): MG_{00} , MG_{03} , MG_{10} , MG_{13} , MG_{21} , MG_{22} , MG_{32} . При этом он в пяти случаях из семи имеет ранг рефлексии, не меньший, чем у оппонента.

Второму агенту выгодны следующие игры: MG_{01} , MG_{02} , MG_{11} , MG_{12} , MG_{23} , MG_{33} . При этом он во всех шести случаях имеет ранг рефлексии, не меньший, чем у оппонента.

Выигрыш агента может оказаться меньше его МГР. Так, МГР первого агента в рассматриваемой игре равен трем, второго – единице. В играх MG_{20} , MG_{23} и MG_{33} первый агент получает выигрыш, равный двум, что строго меньше его МГР $a_0 = 3$. В играх MG_{22} , MG_{31} и MG_{32} , второй агент получает нулевой выигрыш, что строго меньше его МГР $b_0 = 1$.

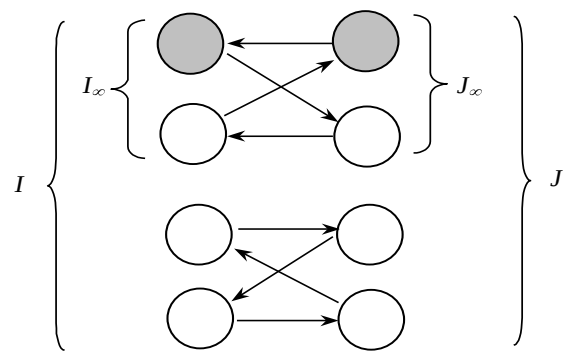
СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Предположение: (*) $\forall j \in J \left| \text{Arg max}_{i \in I} a_{ij} \right| = 1, \forall i \in I \left| \text{Arg max}_{j \in J} b_{ij} \right| = 1$

(**) $\left| \text{Arg max}_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij} \right| = \left| \text{Arg max}_{j \in J} \min_{i \in I} b_{ij} \right| = 1.$

Утверждение. Стратегическая рефлексия в биматричных играх имеет смысл, если агенты используют субъективные гарантирующие стратегии, которые не являются равновесными по Нэшу.

Утверждение. В биматричных играх 2×2 , в которых не существует равновесия Нэша, $I_\infty = I, J_\infty = J.$



Пример графа наилучших ответов в биматричной игре 4×4 , в которой $I_\infty \subset I, J_\infty \subset J$

Утверждение. В биматричных играх $n \times m$ максимальные целесообразные ранги стратегической рефлексии первого и второго агентов удовлетворяют следующим неравенствам

$$K_{max}(n, m) \leq \min \{n, m + 1\}, L_{max}(n, m) \leq \min \{m, n + 1\},$$
$$R_{max}(n, m) \leq \max \{ \min \{n, m + 1\}, \min \{m, n + 1\} \}.$$

Следствие. В биматричной игре $n \times n, n \geq 2$, максимальный целесообразный ранг стратегической рефлексии любого агента $R_{max}(n, n) \leq n.$

Утверждение. Для произвольной биматричной игры переход к игре рангов не приводит к появлению новых равновесий.

Утверждение. В игре рангов существует не более одного равновесия.

СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ (ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ)

Если w – ранг рефлексии, то число действий (число реальных и фантомных агентов), которые необходимо принимать во внимание агенту (при произвольных $x_i \in X_i$ и $x_{-i} \in X_{-i}$), равно $2(w + 1)$, а число связей между ними – $(w + 1)!$ (при этом предполагается, что агент считает оппонента примерно таким же рациональным, каким и себя).

Если учесть информационные ограничения, то получим, что должно выполняться либо $2(w + 1) \leq 7 \pm 2$, либо $(w + 1)! \leq 7 \pm 2$. Решение первого неравенства в целых положительных числах дает $w \in \{0; 1; 2; 3\}$, второго – $w \in \{0; 1; 2\}$. При числе Миллера равном 7 получаем, что **максимальный (в силу информационных ограничений) ранг стратегической рефлексии равен двум.**

Для **игры «11-20»** (для 108 участников) получено следующее распределение агентов по рангам рефлексии:

Ранг	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Действие	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
Доля агентов (%)	6	12	30	32	6	1	6	3	0	4

Известны результаты экспериментов, в соответствии с которыми от 40 % до 60 % агентов имеют ненулевой ранг рефлексии (выбирают действия, отличные и от действий агентов нулевого ранга, и от равновесия Нэша). Сводка распределений (по результатам трех исследований) агентов по рангам рефлексии:

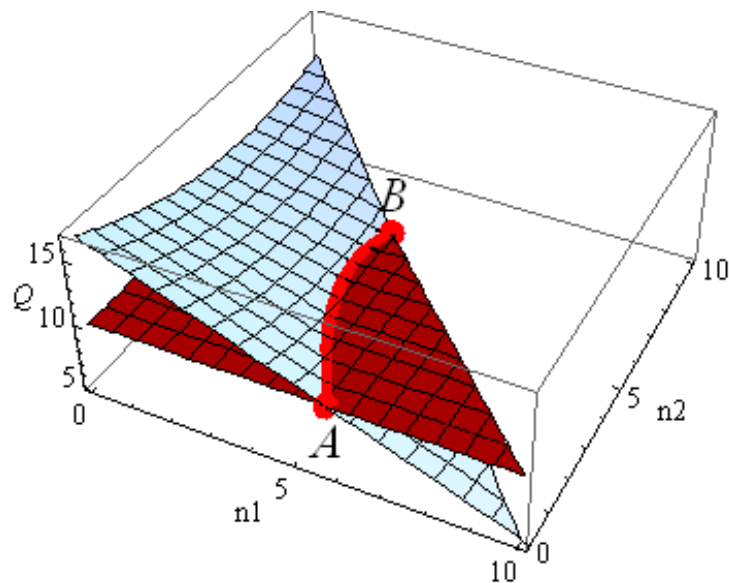
Ранг	Доля агентов	Доля агентов	Доля агентов
0	0,25	0,42	0,21
1	0,12	0,44	0,21
2	0,12	0,11	0,27
3	0,12	0,03	0,19
4	0,12	0,01	0,09
5	0,12	0	0,03
6	0,12	0	0,01
7 и выше	0	0	0

ПРИМЕР СТРАТЕГИЧЕСКОЙ РЕФЛЕКСИИ В ОЛИГОПОЛИИ КУРНО

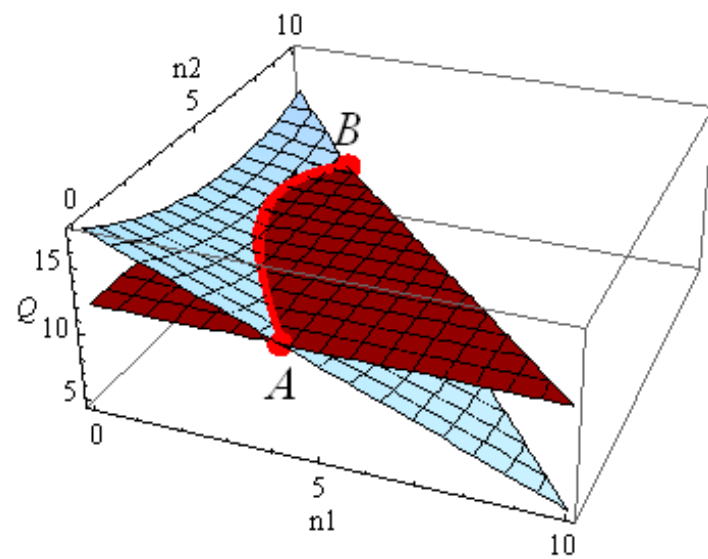
В модели **олигополии Курно** агенты принимают решения об объеме выпускаемой ими продукции в условиях, когда ее рыночная **цена** является известной убывающей функцией суммарного предложения (объема выпуска, объема производства): $P(x) = a - b Q(x)$, где $Q(x) = \sum_{i \in N} x_i$, a и b – известные неотрицательные константы.

Целевая функция i -го агента представляет собой разность между выручкой от продаж (равной произведению цены на объем производства) и квадратичными затратами на производство:

$$f_i(x_i, Q(x)) = (a - b Q(x)) x_i - (x_i)^2 / 2, i \in N.$$



Реализация равновесия Нэша



Реализация точки Парето 19

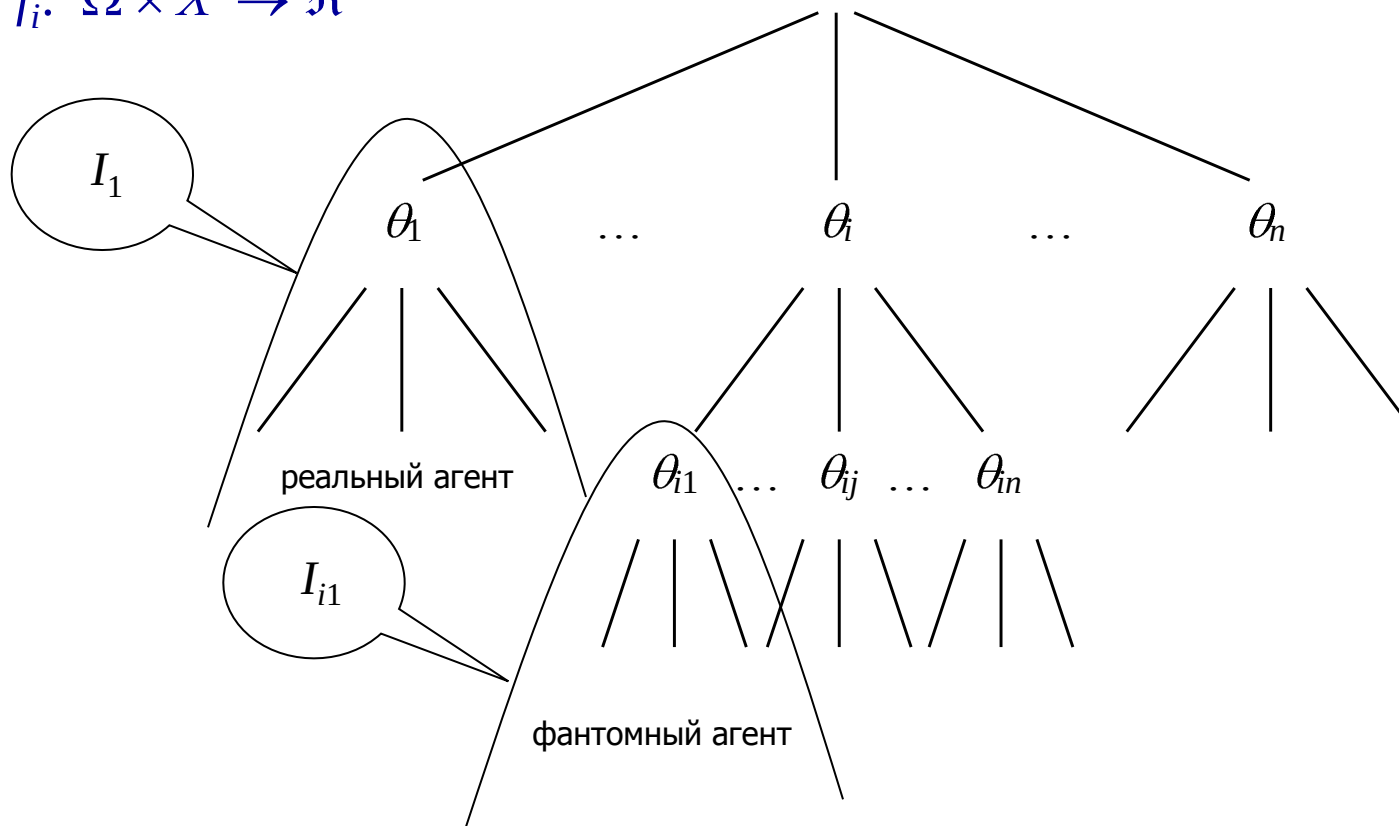
РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ. СТРУКТУРА ИНФОРМИРОВАННОСТИ

$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, \Omega, I\}$ – рефлексивная игра

Ω – множество возможных состояний природы

I – структура информированности

$f_i: \Omega \times X' \rightarrow \mathbb{R}^1$



I_i – реальный агент

I_{ij}
 I_{ijk}
... } фантомные агенты

$I_\sigma, \sigma \in \Sigma_+$

Σ_+ – конечная последовательность индексов из N

Σ – в том числе пустая последовательность

ИНФОРМАЦИОННАЯ РЕФЛЕКСИЯ: ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

Набор действий x_{τ}^* , $\tau \in \Sigma_+$, назовем **информационным равновесием**, если выполнены следующие условия:

1. структура информированности I имеет конечную сложность ν ;

2. $\forall i \in N, \forall \lambda, \mu \in \Sigma \quad I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*$;

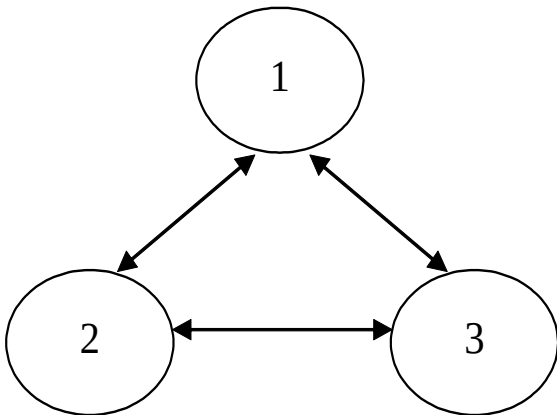
3. $\forall i \in N, \forall \sigma \in \Sigma$

$$(1) \quad x_{\sigma i}^* \in \operatorname{Argmax}_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \dots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i, x_{\sigma i, i+1}^*, \dots, x_{\sigma i, n}^*).$$

ГРАФ РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЫ. ОЛИГОПОЛИЯ КУРНО (ПРИМЕР 1)

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2}, x_i \geq 0, i \in N = \{1, 2, 3\}; \theta \in \Omega = \{1, 2\}$$

Пример 1. Пусть первые два агента – оптимисты, а третий – пессимист, причем все трое одинаково информированы.

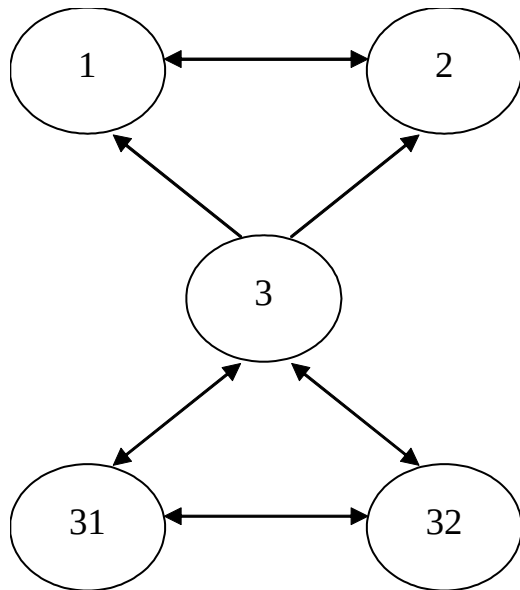


$$\begin{cases} x_1^* = \frac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \frac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \frac{1 - x_1^* - x_2^*}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^* = \frac{1}{2}, \\ x_2^* = \frac{1}{2}, \\ x_3^* = 0. \end{cases}$$

ГРАФ РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЫ. ОЛИГОПОЛИЯ КУРНО (ПРИМЕР 2)

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2}, \quad x_i \geq 0, \quad i \in N = \{1, 2, 3\}; \quad \theta \in \Omega = \{1, 2\}$$

Пример 2. Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, который считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами. Первые два агента одинаково информированы, причем оба они адекватно информированы о третьем агенте.

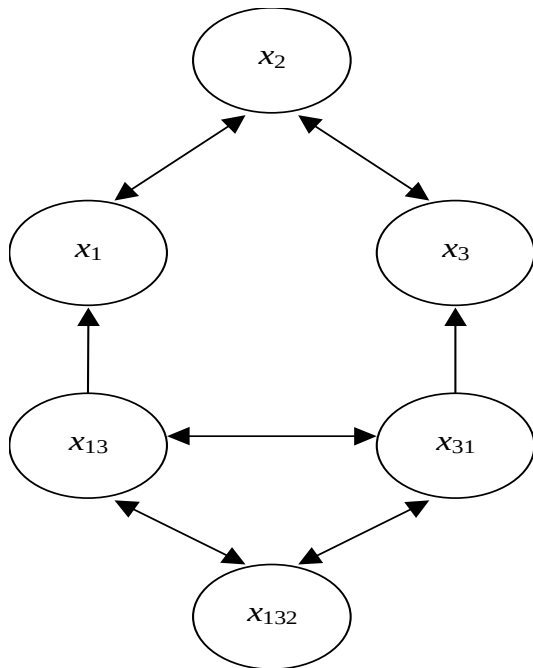


$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \frac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \frac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \frac{1 - x_{31}^* - x_{32}^*}{3}, \\ x_{31}^* = \frac{1 - x_{32}^* - x_3^*}{3}, \\ x_{32}^* = \frac{1 - x_{31}^* - x_3^*}{3}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \frac{9}{20}, \\ x_2^* = \frac{9}{20}, \\ x_3^* = \frac{1}{5}, \\ x_{31}^* = \frac{1}{5}, \\ x_{32}^* = \frac{1}{5}. \end{array} \right.$$

ГРАФ РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЫ. ОЛИГОПОЛИЯ КУРНО (ПРИМЕР 3)

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2}, \quad \bullet \quad x_i \geq 0, i \in N = \{1, 2, 3\}; \theta \in \Omega = \{1, 2\}.$$

Пусть все трое агентов оптимисты, первый и второй взаимно информированы, второй и третий также взаимно информированы. По мнению первого агента, третий считает всех троих одинаково информированными пессимистами; также и первый агент, по мнению третьего, считает всех троих одинаково информированными пессимистами.



$$\begin{cases} x_1^* = \frac{2 - x_2^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_2^* = \frac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \frac{2 - x_{31}^* - x_2^*}{3}, \\ x_{31}^* = \frac{1 - x_{132}^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_{13}^* = \frac{1 - x_{31}^* - x_{132}^*}{3}, \\ x_{132}^* = \frac{1 - x_{31}^* - x_{13}^*}{3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{17}{35}, \\ x_2^* = \frac{12}{35}, \\ x_3^* = \frac{17}{35}, \\ x_{31}^* = \frac{1}{5}, \\ x_{13}^* = \frac{1}{5}, \\ x_{132}^* = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ

Утверждение. Если информационное равновесие x_τ^* , $\tau \in \Sigma_+$, существует, то оно состоит из не более чем ν попарно различных действий, а в системе (1) содержится не более чем ν попарно различных уравнений.

Утверждение. Пусть в рефлексивной игре со структурой информированности конечной сложности множества действий X_i – выпуклые компактные подмножества $\mathbb{R}^n$, для каждого агента целевая функция $f_i(\theta, x_1, \dots, x_n)$ при любом $\theta \in \Omega$ непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной x_i . Тогда в этой игре существует информационное равновесие.

Утверждение. Пусть для любого непустого множества $N' \subseteq N$ справедлив следующий факт: для любых $\theta_k \in \Omega$, $k \in N'$, и любых $x_m^* \in X_m$, $m \notin N'$, существует равновесие Нэша в игре с общим знанием k -агентов, то есть существуют x_k^* , $k \in N'$, удовлетворяющие

$$x_k^* \in \operatorname{Arg} \max_{x_k \in X_k} f_k(\theta_k, x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, x_k, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*), \quad k \in N'.$$

Тогда для любой конечной регулярной структуры информированности существует информационное равновесие.

СТАБИЛЬНОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, \Omega, I\}$ – рефлексивная игра
 $w_i(\cdot): \Omega \times X' \rightarrow W_i, i \in N$

$w_i(\cdot)$ – *функция наблюдения* i -го агента

Информационное равновесие $x_{\pi i}, \pi i \in \Sigma_+$, будем называть *стабильным* при заданной структуре информированности I , если для любого $\pi i \in \Sigma_+$ выполняется

$$(2) \quad w_i(\theta_{\pi i}, x_{\pi i 1}, \dots, x_{\pi i, i-1}, x_{\pi i}, x_{\pi i, i+1}, \dots, x_{\pi i n}) = \\ = w_i(\theta_{\tau}, x_{\tau 1}, \dots, x_{\tau, i-1}, x_{\pi i}, x_{\tau, i+1}, \dots, x_{\tau n}).$$

Утверждение. Пусть структура информированности I имеет сложность ν и существует информационное равновесие $x_{\pi i}, \pi i \in \Sigma_+$. Тогда система соотношений (2) содержит не более чем ν попарно различных условий.

ИСТИННЫЕ И ЛОЖНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Пусть набор действий x_{π} , $\pi \in \Sigma_+$, является стабильным информационным равновесием. Будем называть его **ИСТИННЫМ** равновесием, если набор $(x_1, \dots, x_n)$ является равновесием в условиях общего знания о состоянии природы θ (или о наборе $(r_1, \dots, r_n)$ индивидуальных характеристик (типов) агентов).

Стабильное информационное равновесие, не являющееся истинным, назовем **ЛОЖНЫМ**.

Утверждение. Пусть целевые функции агентов имеют вид

$$(3) \quad f_i(r_i, x_1, \dots, x_n) = \varphi_i(r_i, x_i, y_i(x_{-i})),$$

а функции наблюдения – вид $w_i(\theta, x) = y_i(x_{-i})$, $i \in N$. Тогда любое стабильное равновесие является истинным.

Содержательно условие (3) означает следующее: выигрыш каждого агента зависит от его типа, его действия и функции наблюдения, зависящей от действий остальных агентов, но не от их типов.

СЛУЧАЙ НАБЛЮДАЕМЫХ ДЕЙСТВИЙ. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ – СОСТОЯНИЕ ПРИРОДЫ

$$w_i(\theta, x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

A1. Для любых $i \in N$, $\sigma \in \Sigma$, любых представлений $\theta_{\sigma i} \in \Omega$ и $\theta'_{\sigma i} \in \Omega$ таких, что $\theta_{\sigma i} \neq \theta'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры

$$x_{\sigma i, -i}^* \in X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$$

Выполняется

$$BR_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i, -i}^*) \cap BR_i(\theta'_{\sigma i}, x_{\sigma i, -i}^*) = \emptyset,$$

где

$$BR_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i, -i}^*) = \operatorname{Argmax}_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \dots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i, x_{\sigma i, i+1}^*, \dots, x_{\sigma i, n}^*).$$

Утверждение. Пусть выполнено предположение A1 и существует информационное равновесие x^* . Тогда x^* является стабильным информационным равновесием в том и только том случае, если структура информированности имеет глубину 1:

$$\forall i \in N, \quad \forall \sigma \in \Sigma \quad \theta_{\sigma i} = \theta_i.$$

СЛУЧАЙ НАБЛЮДАЕМЫХ ДЕЙСТВИЙ. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ – ТИПЫ АГЕНТОВ

$$w_i(r_i, x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ – стабильно-равновесный вектор действий

$$\rho_i = \{r_i \in \mathcal{R}_+ \mid x_i^* \in BR_i(r_i, x_{-i}^*)\}, \quad i \in N.$$

Утверждение. Пусть x^* – стабильно-равновесный вектор действий реальных агентов. Если для любого $i \in N$ множество ρ_i состоит ровно из одного элемента, то вектор типов является общим знанием (и, соответственно, равновесие истинное).

Утверждение. Если вектор действий реальных агентов x^* является стабильно-равновесным при некоторой структуре информированности, то для элементов этой структуры при любых $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется $r_{\sigma i} \in \rho_i$.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

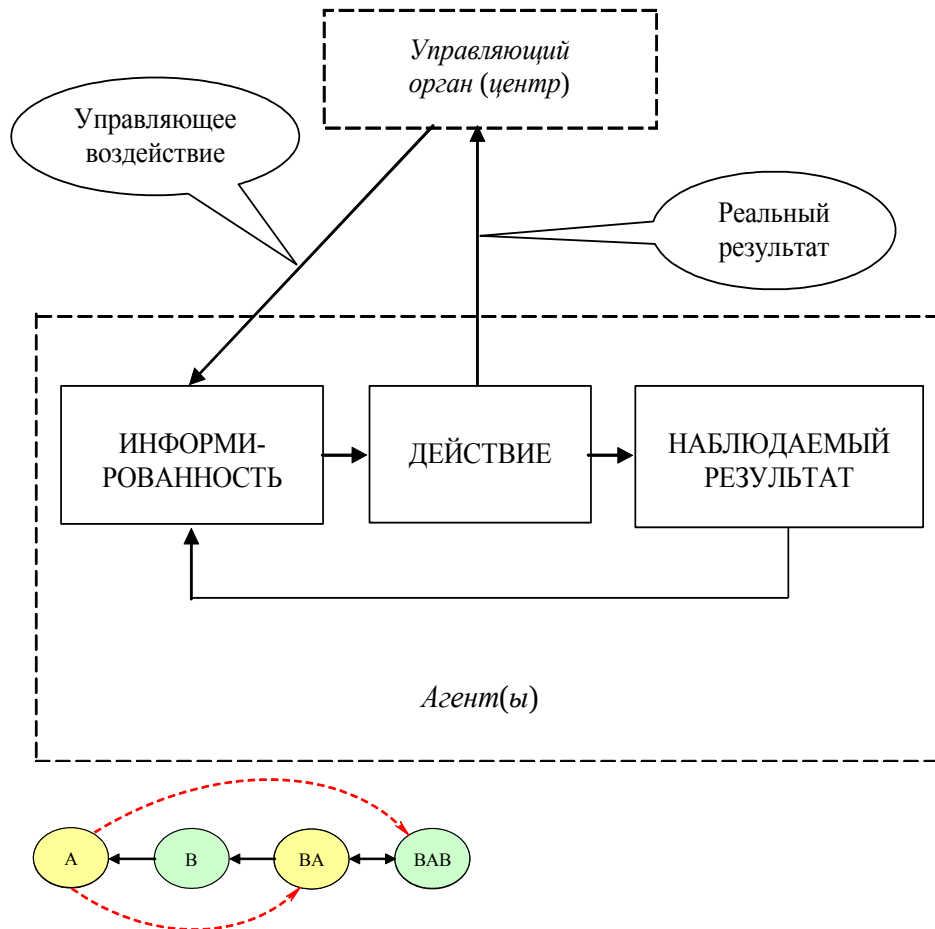
Модель организационной системы определяется заданием:

- состава ОС (участников, входящих в ОС, то есть ее элементов);
- структуры ОС (совокупности информационных, управляющих, технологических и других связей между участниками ОС);
- множеств допустимых стратегий (ограничений и норм деятельности) участников ОС, отражающих, в том числе, институциональные, технологические и другие ограничения и нормы их совместной деятельности;
- предпочтений участников ОС;
- информированности – той информации о существенных параметрах, которой обладают участники ОС на момент принятия решений о выбираемых стратегиях;
- порядка функционирования (последовательности получения информации и выбора стратегий участниками ОС).

Управление ОС, понимаемое как воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения, может затрагивать каждый из шести перечисленных параметров ее модели. Обычно порядок функционирования тесно связан со структурой, поэтому получаем пять классов задач управления.



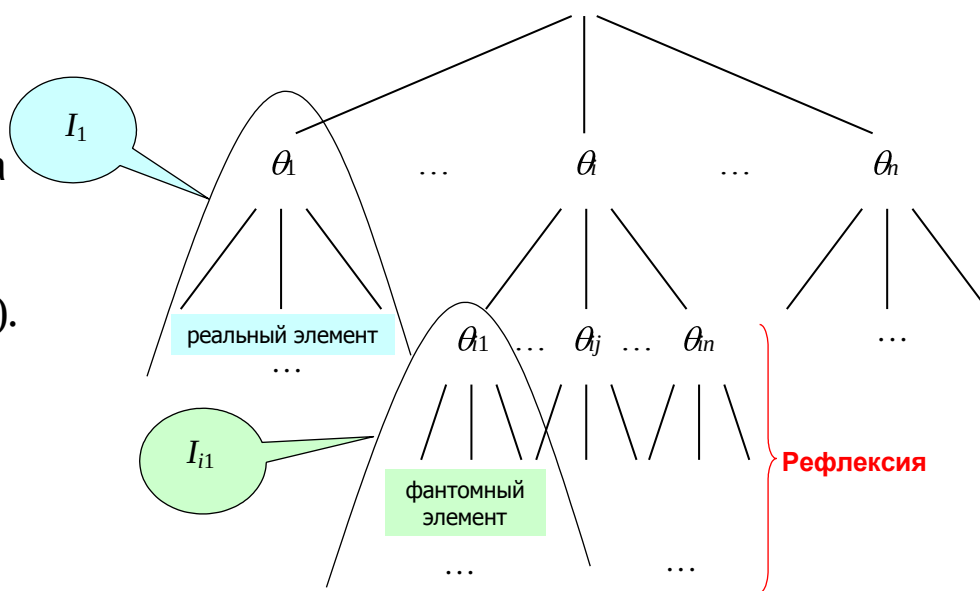
ОБЩАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПОСТАНОВКИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ



МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОЙ РЕФЛЕКСИИ

$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, \Omega, I\}$ – рефлексивная игра
 Ω – множество возможных состояний природы
 I – структура информированности
 N – множество элементов (игроков)
 $f_i: \Omega \times X' \rightarrow \mathbb{R}^1$ – целевая функция i -го элемента

Структура информированности



Информационное равновесие

$$x_{\sigma i}^* \in \text{Argmax}_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i1}^*, \dots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i, x_{\sigma i, i+1}^*, \dots, x_{\sigma i, n}^*).$$

Задача информационного управления

$$\min_{x \in \Psi_X(I)} \Phi(x, I) \xrightarrow{I \in \mathcal{I}} \max.$$

$\Psi_X(I) \subseteq X'$ – множество векторов действий реальных элементов, являющихся равновесными при структуре информированности I ;

$\Phi(x, I)$ – целевая функция центра;

$\mathcal{I}$ – множество допустимых структур информированности.



Учет взаимной информированности элементов дает возможность:

1. (с нормативной точки зрения) расширить множество исходов их игры, что, в свою очередь, увеличивает эффективность управления;
2. (с дескриптивной точки зрения) многие наблюдаемые на практике ситуации, которые не могут быть интерпретированы как «обычные» равновесия Нэша в условиях общего знания, являются информационным равновесием.

ИНФОРМАЦИОННОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ И РЕФЛЕКСИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Вид информационного воздействия	Сообщение центра	Сформированная структура
Однородное информационное регулирование	Всем агентам сообщается величина θ'	$\forall \sigma \in \Sigma_+$ $\theta_\sigma = \theta'$
Неоднородное информационное регулирование	i -му агенту ($i \in N$) сообщается свое значение θ_i	$\forall i \in N \quad \forall \sigma \in \Sigma$ $\theta_{i\sigma} = \theta_i$
Рефлексивное управление	i -му агенту ($i \in N$) сообщается θ_i и набор значений $\theta_{ij}, j \in N \setminus \{i\}$	$\forall i \in N, j \in N \setminus \{i\}$ $\forall \sigma \in \Sigma$ $\theta_{ij\sigma} = \theta_{ij}$

+ Активный прогноз и др.

$E_N(\theta_1, \dots, \theta_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X' \mid \forall i \in N \ x_i \in BR_i(\theta_i, x_{-i})\}$ –
параметрическое равновесие Нэша

$$E_N = \bigcup_{(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Omega^n} E_N(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

$$X_i^0 = \text{Pr}_i E_N, \quad i \in N \quad X_{-i}^k = \prod_{j \neq i} X_j^k, \quad i \in N, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$BR_i(\Omega, X_{-i}) = \bigcup_{\theta \in \Omega, x_{-i} \in X_{-i}} BR_i(\theta, x_{-i}), \quad i \in N \quad \text{– рефлексивные отображения}$$

$$X_i^k = BR_i(\Omega, X_{-i}^{k-1}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad i \in N$$

Утверждение. Для любых $k = 0, 1, \dots$ и $i \in N$ выполняется

$$X_i^k \subseteq X_i^{k+1}.$$

Рефлексивное отображение i -го агента называется *стационарным*, если

$$X_i^k = X_i^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Утверждение. Если рефлексивные отображения всех агентов стационарны, то множество действий i -го агента, которые могут быть реализованы как компоненты информационного равновесия, реализуется в рамках структуры информированности глубины не более 2 и составляет $X_i^0, i \in N$. При этом ранг рефлексии каждого агента равен 1, а множество равновесных действий реальных агентов составляет $E = \prod_{i \in N} X_i^0$.

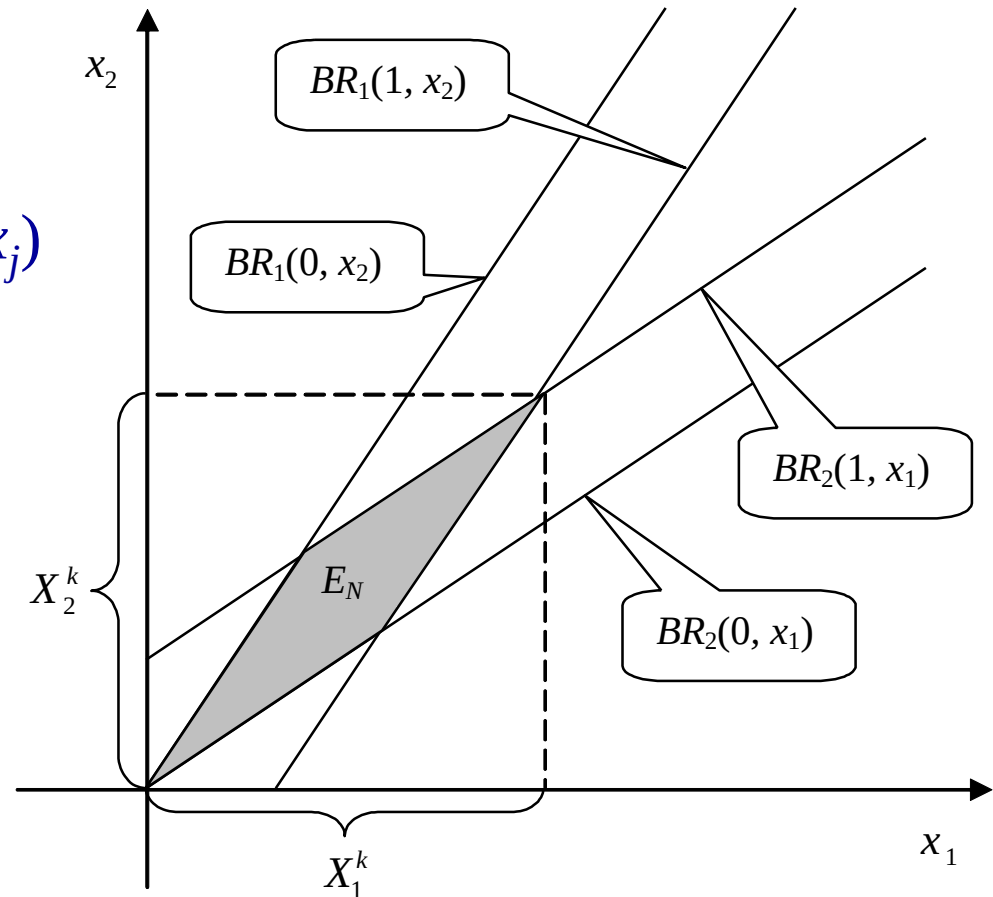
РЕФЛЕКСИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ.

ПРИМЕР 1 (СТАЦИОНАРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ)

$$f_i(\theta, x_1, x_2) = x_i - x_i^2 / 2 (\theta + \alpha x_j)$$

$$\alpha \in (0; 1), x_i \geq 0, i = 1, 2$$

$$\Omega = [0; 1]$$



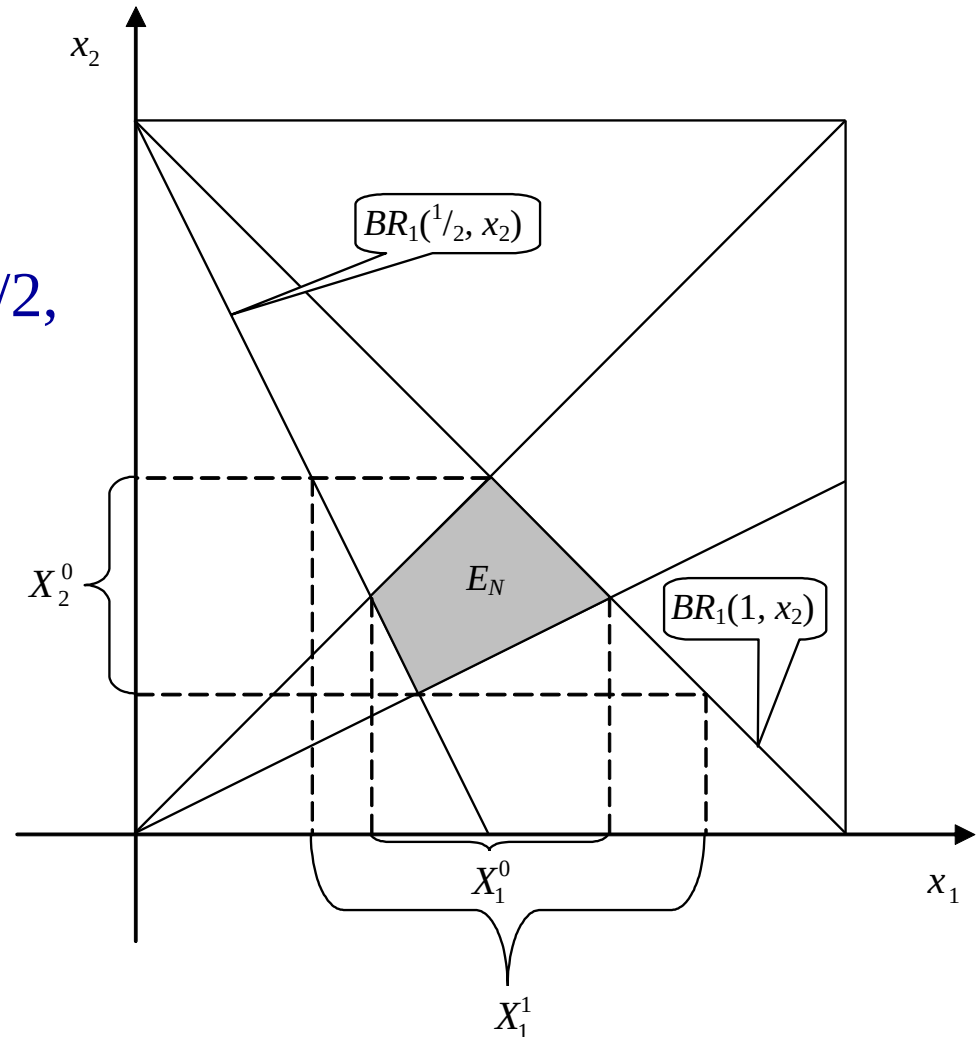
РЕФЛЕКСИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ.

ПРИМЕР 2 (НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ)

$$f_1(\theta, x_1, x_2) = \theta(1 - x_2) x_1 - x_1^2 / 2,$$

$$f_2(\theta, x_1, x_2) = \theta x_1 x_2 - x_2^2 / 2$$

$$\Omega = [1/2; 1], X_1 = X_2 = (0; 1)$$



ЛИНЕЙНЫЕ РЕФЛЕКСИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

$$(i) \quad f_i(\theta, x_1, x_2) = \varphi_i \bar{x}_i^2 + \psi_i \bar{x}_i x_j + \eta_i \bar{x}_i + \xi_i(\theta, x_j), \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2.$$

$$(ii) \quad \theta \in \Omega = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^1, \quad X_i = [L_i, R_i] \subset \mathbb{R}^1$$

Для любых $\theta_1, \theta_2 \in \Omega$:

$$(iii) \quad \varphi_i \bar{x}_i \leq 0$$

$$(iv) \quad L_i \leq \frac{\psi_i(\theta_i)\eta_j(\theta_j) - 2\varphi_j(\theta_j)\eta_i(\theta_i)}{4\varphi_j(\theta_j)\varphi_i(\theta_i) - \psi_j(\theta_j)\psi_i(\theta_i)} \leq R_i, \quad i = 1, 2$$

$$(v) \quad 0 \leq \frac{\psi_i \bar{x}_i \bar{x}_j}{2\varphi_i \bar{x}_i \bar{x}_j} \leq 1$$

Утверждение. Рефлексивные отображения игры (i)-(ii) при выполнении условий (iii)-(v) являются стационарными.

Во многих случаях увеличение ранга рефлексии приводит к росту неопределенности – неустойчивости коллективного поведения агентов, что может быть объяснено нелинейностью нестационарных рефлексивных отображений.

Пример. Пусть имеются два агента, выбирающих действия из единичного отрезка и имеющих следующие целевые функции (экономической интерпретацией данной модели является «дуополия Курно»): $f_1(\theta, x_1, x_2) = 4 \theta x_1 x_2 (1 - x_2) - x_1^2 / 2$, $f_2(\theta, x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_2^2 / 2$, а состояние природы принимает значения из множества $\Omega = (1/4; 1]$.

Предположим, что на нижнем уровне конечного дерева информированности, имеющего глубину m_0 , имеет место общее знание с некоторым значением $\theta_0 \in \Omega$ состоянии природы. Вычисляем равновесие Нэша игры фантомных агентов: $x_1(\theta_0) = x_2(\theta_0) = 1 - 1 / (4 \theta_0)$ и находим наилучшие ответы первого и второго агентов на действия оппонентов:

$BR_1(\theta, x_2) = 4 \theta x_2 (1 - x_2)$, $BR_2(\theta, x_1) = x_1$, $\theta \in \Omega$.

Получаем, что наилучшие ответы τ 1-агентов, $\tau \in \Sigma$, $|\tau| \leq m_0$, удовлетворяют логистическому отображению

$$x_1^m = 4 \theta x_1^{m-1} (1 - x_1^{m-1}), \quad m = 1, 2, \dots, [m_0/2], \quad (*)$$

с начальной точкой $x_1^0 = 1 - 1 / (4 \theta_0)$ (здесь за $[\cdot]$ обозначена целая часть).

Анализируя (*), получаем, что в зависимости от информированности θ_τ τ -агентов (отметим, что эта информированность для всех агентов с первого по $(m_0 - 2)$ -й уровень включительно считается одинаковой, т.е. $\theta_\tau \equiv \theta$ для некоторого $\theta \in \Omega$ при $|\tau| \leq m_0 - 2$, и в случае различной информированности агентов может наблюдаться еще более сложное поведение) возможны следующие варианты асимптотически (при $m_0 \rightarrow \infty$) устойчивых и слабо зависящих от начальной точки стратегий первого реального агента: **выбор единственного действия; периодическое поведение; хаотическое или периодическое поведение.**

РЕФЛЕКСИВНАЯ НЕМАНИПУЛИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЗМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ

Механизм: i -й агент ($i \in N$) выбирает сообщение центру $s_i \in S_i$.

Центр назначает агентам планы $x_i = h_i(s) = h_i(s_1, \dots, s_n)$.

Агенты получают выигрыши $f_i(x_i, r_i)$.

1. «Классическая» неманипулируемость (типы агентов являются общим знанием): для любого типа r_i равновесной стратегией i -го агента является сообщение $s_i^* = r_i$.
2. Рефлексивная неманипулируемость: для любого типа r_i существует подструктура информированности $(r_{i\sigma})$, $i \in N$, $\sigma \in \Sigma_+$, такая, что $s_i^* = r_i$.

РЕФЛЕКСИВНАЯ НЕМАНИПУЛИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЗМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ

E_N – множество наборов типов, для которых сообщение каждым агентом своего истинного типа является равновесием Нэша:

$$E_N = \{ r \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in N \forall s_i \in \mathbb{R}^1 f_i(h_i(r), r_i) \geq f_i(h_i(r_1, \dots, r_{i-1}, s_i, r_{i+1}, \dots, r_n), r_i) \}.$$

Утверждение. Для того, чтобы механизм планирования являлся рефлексивно неманипулируемым, достаточно, чтобы для любого i -го агента, $i \in N$, существовал набор типов $r' = (r'_1, \dots, r'_n) \in E_N$ такой, что выполнено

$$r_i \in \operatorname{Arg} \max_{s_i \in \mathbb{R}^1} f_i(h_i(r'_1, \dots, r'_{i-1}, s_i, r'_{i+1}, \dots, r'_n), r_i).$$

При этом для реализации рефлексивной неманипулируемости достаточно ограничиться не более чем вторым рангом рефлексии агентов.

РЕФЛЕКСИВНАЯ НЕМАНИПУЛИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЗМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ

Пример манипулируемого, но рефлексивно неманипулируемого механизма:

два агента с типами $r_1, r_2 \geq 0$, механизм $x_1 = s_1 - s_2/2, x_2 = s_2 - s_1/2$.

Равновесные по Нэшу стратегии (заявки):

$$s_1^*(r_1, r_2) = 2(2r_1 + r_2)/3, \quad s_2^*(r_1, r_2) = 2(2r_2 + r_1)/3.$$

Нетрудно видеть, что

$$s_i^* = r_i \text{ при } r_{i\sigma} = 0, i=1,2, \sigma \in \Sigma_+.$$

1. Корпоративное управление

1.1. Производитель и посредник*

1.2. Совместное производство*

1.3. Конкуренция на рынке*

1.4. Аккордная оплата труда*

1.5. Продавец и покупатель*

1.6. Заказчик и исполнитель*

1.7. Активная экспертиза*

1.8. Олигополия Курно**

1.9. Распределение ресурса**

1.10. Страхование*

1.11. Конкурс**

1.12. Формирование команды*

2. Игры поиска*

3. «Принцип дефицита»*

4. Коррупция**

5. Биполярный выбор*

6. Реклама товара*

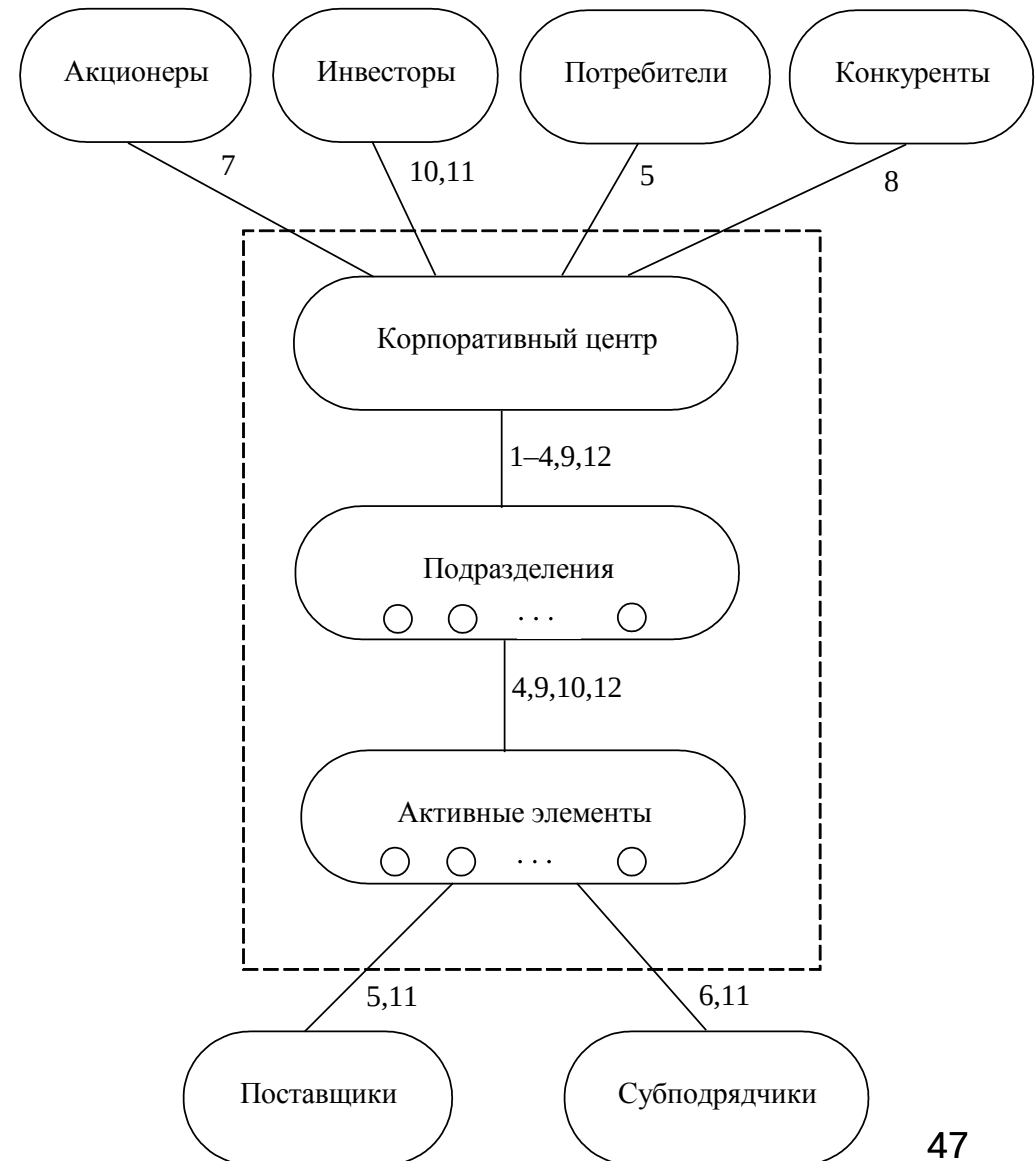
7. Предвыборная борьба*

** – множество
исходов игры
расширяется
за счет ИУ*

*** – ВОЗМОЖНЫ
ТОЛЬКО ИСТИННЫЕ
СТАБИЛЬНЫЕ
РАВНОВЕСИЯ,
ПРИ ЭТОМ
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
АГЕНТОВ МОГУТ
БЫТЬ ЛОЖНЫМИ*

МОДЕЛЬ КОРПОРАЦИИ И МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Производитель и посредник
2. Совместное производство
3. Конкуренция на рынке
4. Аккордная оплата труда
5. Продавец и покупатель
6. Заказчик и исполнитель
7. Активная экспертиза
8. Олигополия Курно
9. Распределение ресурса
10. Страхование
11. Конкурс
12. Формирование команды



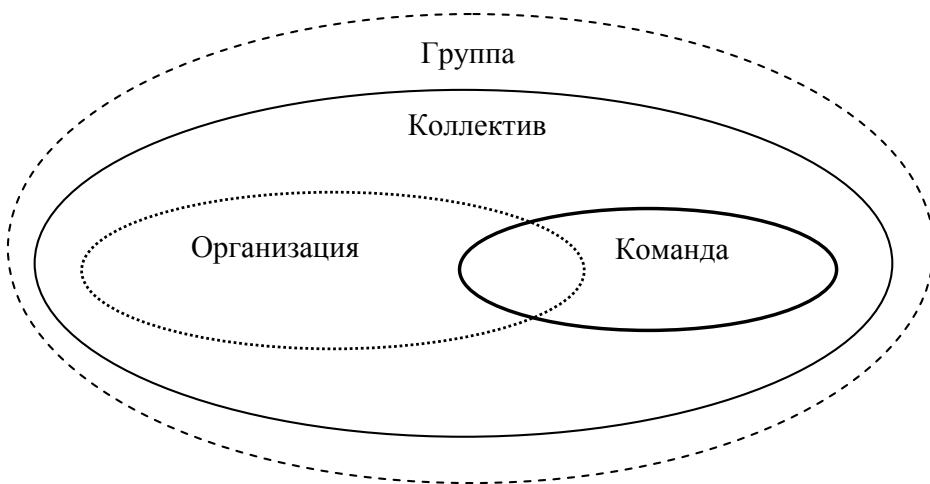
ПРИМЕР: КОМАНДЫ

Команда – коллектив, способный достигать цели автономно и согласованно при минимальных управляющих воздействиях.

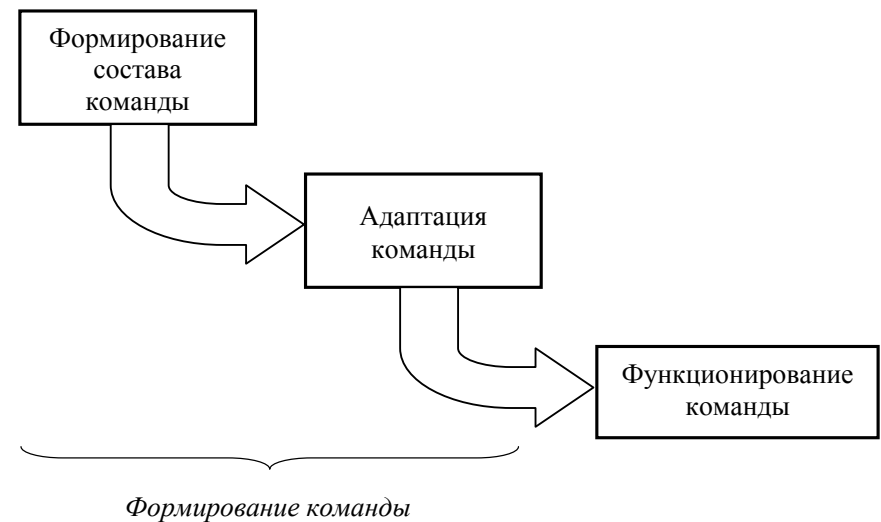
Группа – совокупность людей, объединенных общностью интересов, профессии, деятельности и т.п.

Коллектив – объединение людей, осуществляющих совместную деятельность и обладающих общими интересами.

Организационная система – объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил.



Группа, коллектив, организация и команда



Этапы существования команд

«РЕФЛЕКСИВНЫЕ» МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ КОМАНД

Рассмотрим команду $N = \{1, 2, \dots, n\}$, состоящую из n агентов. Действие i -го агента $y_i \geq 0$ требует от него затрат типа Кобба-Дугласа $c_i(y_i, r_i) = r_i \varphi(y_i / r_i)$, где $r_i > 0$ – тип агента, $\varphi(\cdot)$ – монотонная выпуклая функция. Предположим, что цель команды заключается в минимизации затрат по выбору вектора действий, сумма которых равна заданной величине.

Субъективная история игры	Структура информированности	
	$\{r_{ij}\}$	$\{r_{ijk}\}$
y_{-i}	Модель 1	Модель 6
c_{-i}	Модель 2	Модель 7
c	Модель 3	Модель 8
$(y_{-i}; c_{-i})$	Модель 4	Модель 9
$(y_{-i}; c)$	Модель 5	Модель 10

Предположим, что i -ый агент имеет структуру информированности $\{r_{ij}\}$ и наблюдает действия x_{-i} других агентов. Тогда:

Информационное равновесие: $y_i^*(\{r_{ij}\}) = r_i / \sum_{j \in N} r_{ij}, i \in N.$

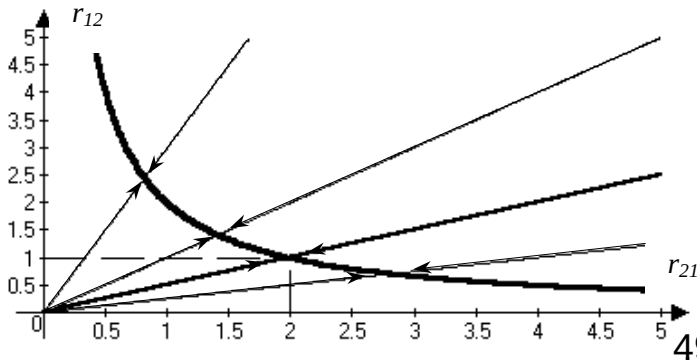
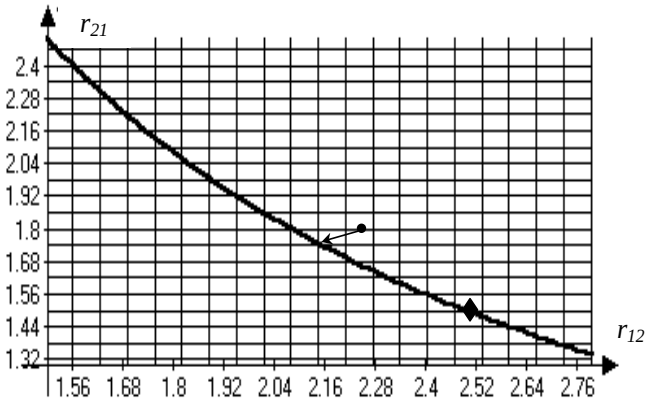
Рациональные представления: $\Omega_i^1 = \{r_{ij} > 0, j \in N \setminus \{i\} \mid r_{ij} / \sum_{l \in N} r_{il} = x_j, j \in N \setminus \{i\}\}$

Динамика представлений i -го агента:

$$r_{ij}^{t+1} = r_{ij}^t + \gamma_{ij}^t (w_{ij}^t(x_{-i}^t) - r_{ij}^t), j \in N \setminus \{i\}, t = 1, 2, \dots, i \in N,$$

где $w_{ij}^t(x_{-i}^t)$ – j -ая проекция ближайшей к $(r_{ij}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^1 .

Условие стабильности (для $n = 2$): $r_1 r_2 = r_{21} r_{12}.$



Множество субъективных равновесий и области притяжения

ПРИМЕР: АККОРДНАЯ ОПЛАТА ТРУДА

n агентов осуществляют совместную деятельность

$x_i \geq 0$ – действие i -го агента

θ – суммарное действие агентов, за которое центр выплачивает вознаграждение (иначе не выплачивает ничего)

σ_i – вознаграждение i -го агента

$c_i(x_i)$ – затраты агентов (возрастающая функция, $c_i(0) = 0$)

$x_i^+ = \max \{ x_i \geq 0 \mid c_i(x_i) \leq \sigma_i \}$

В результате игры общим знанием среди агентов становится факт выплаты или невыплаты вознаграждения.

Утверждение. Любой набор действий

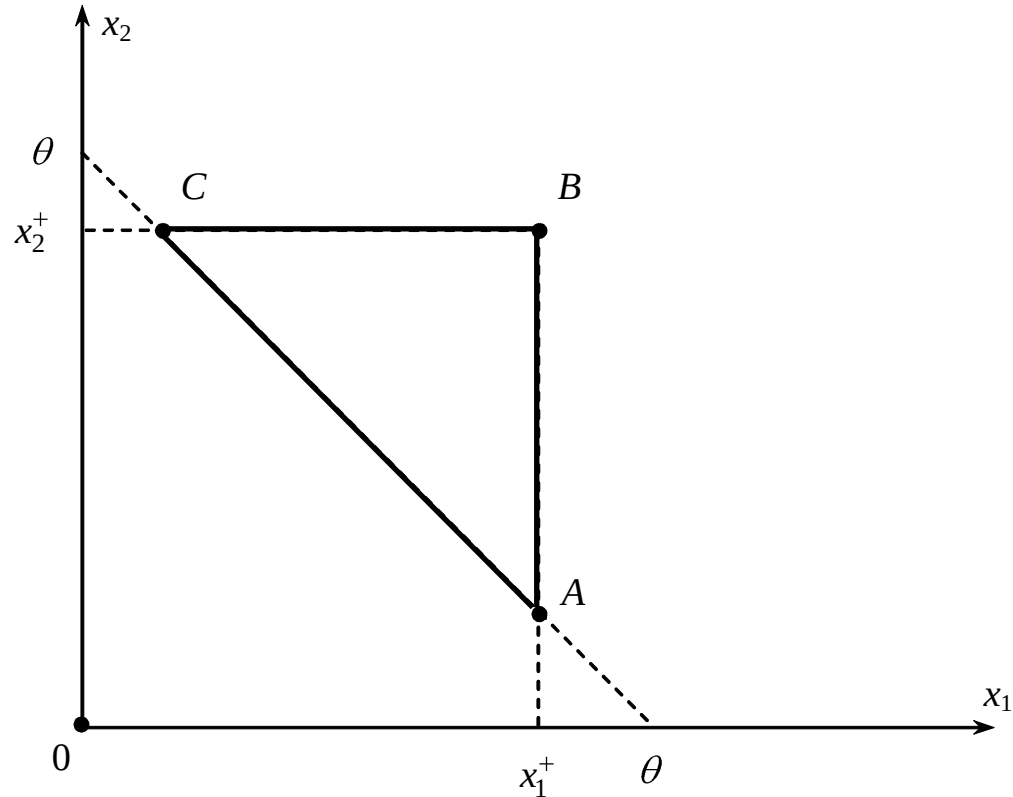
$$x^* \in \prod_{i \in N} (0; x_i^+), \quad \sum_{i \in N} x_i^* \geq \theta,$$

можно сделать стабильным (и притом единственным) информационным равновесием в рамках структуры информированности глубины 2.

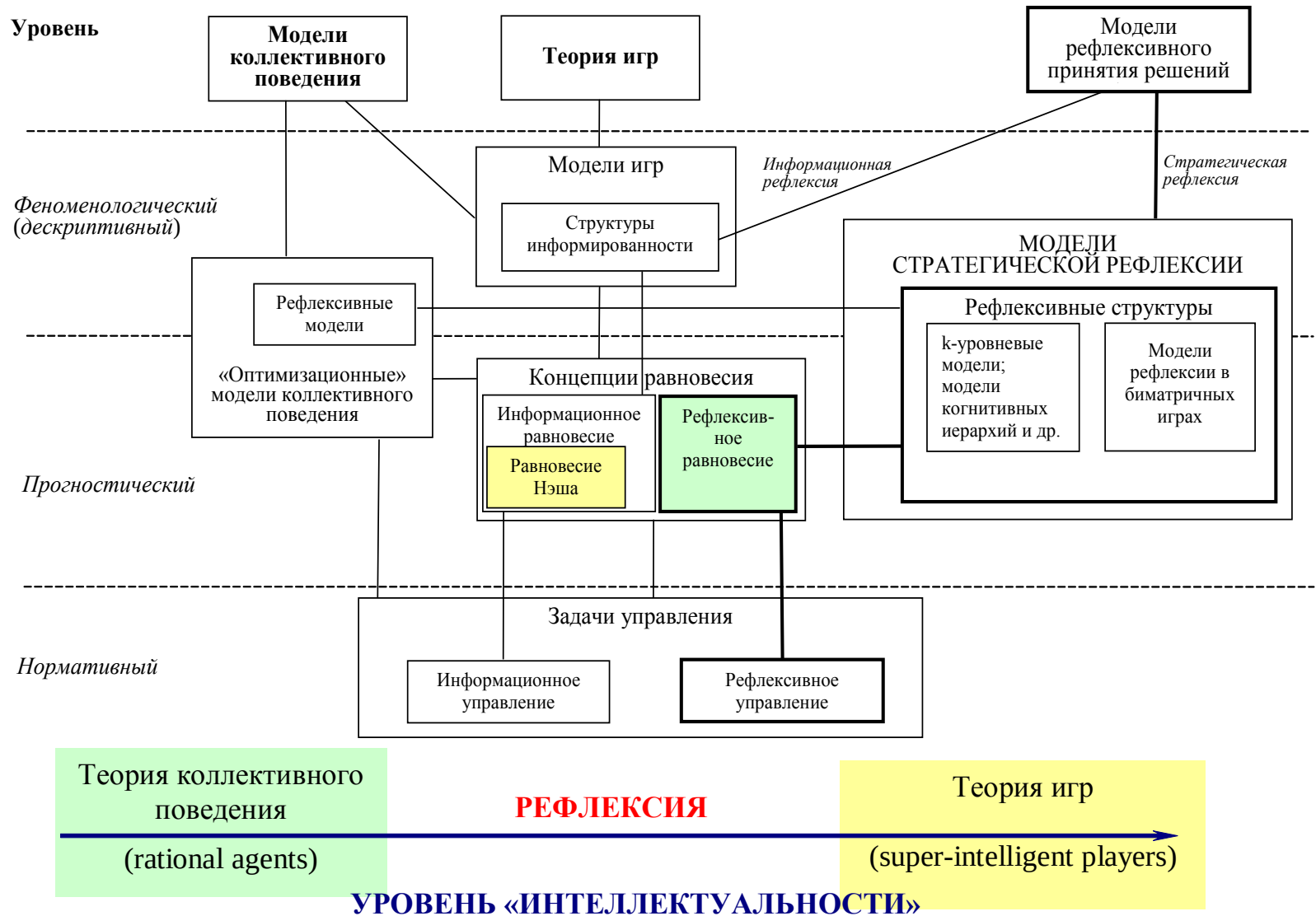
АККОРДНАЯ ОПЛАТА ТРУДА. МНОЖЕСТВО РАВНОВЕСИЙ

Отрезок AC –
множество
равновесий Нэша

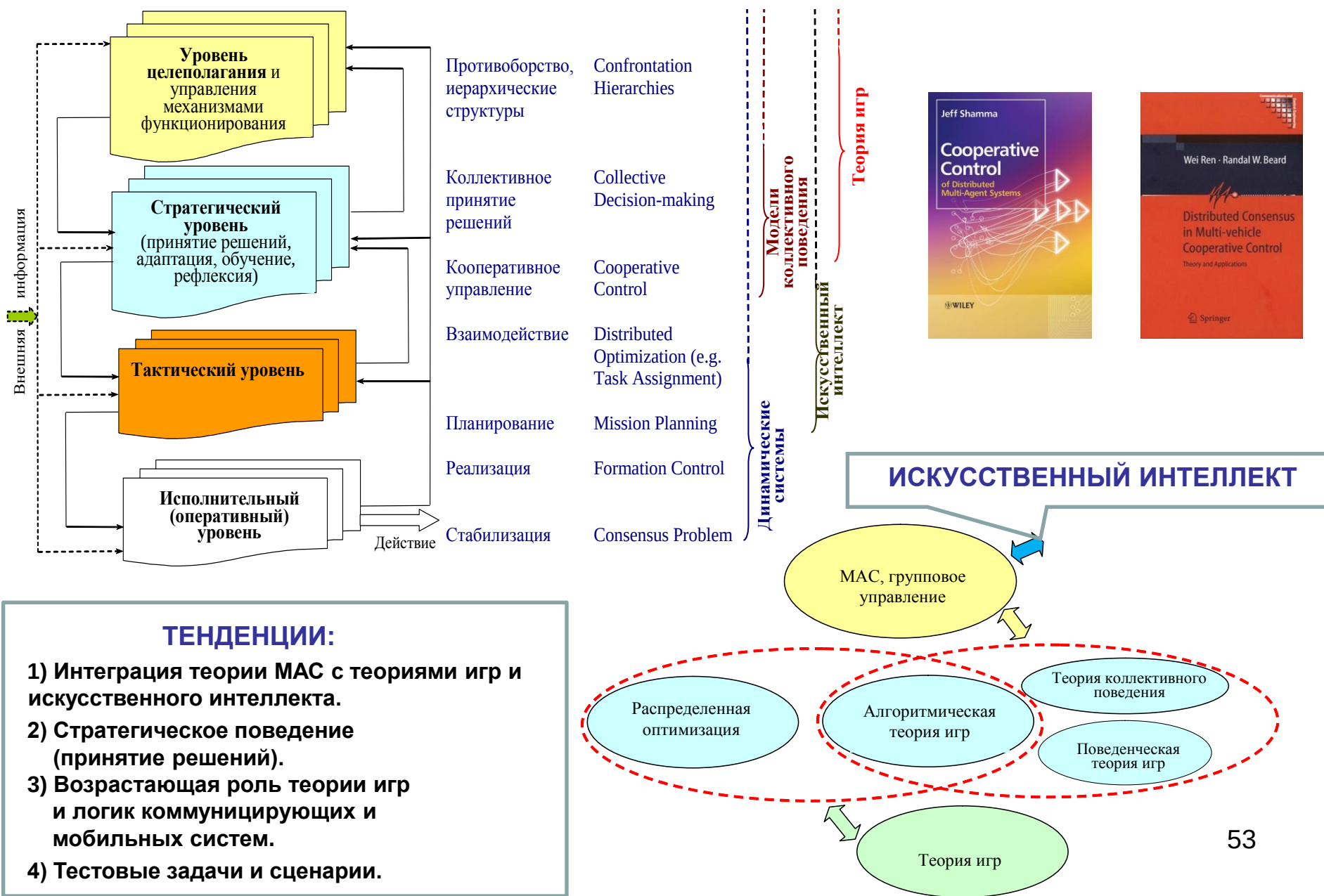
Область ABC –
множество
стабильных
информационных
равновесий

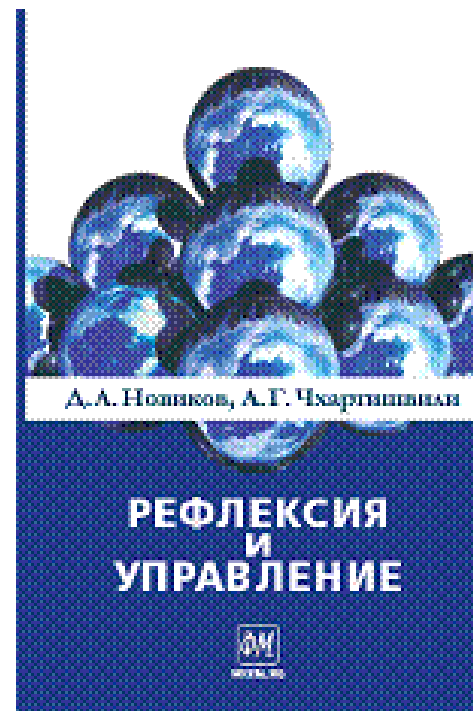


ПЕРСПЕКТИВЫ. ТЕОРИЯ ИГР И ТЕОРИЯ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ



ПЕРСПЕКТИВЫ. МУЛЬТИАГЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ





www.mtas.ru