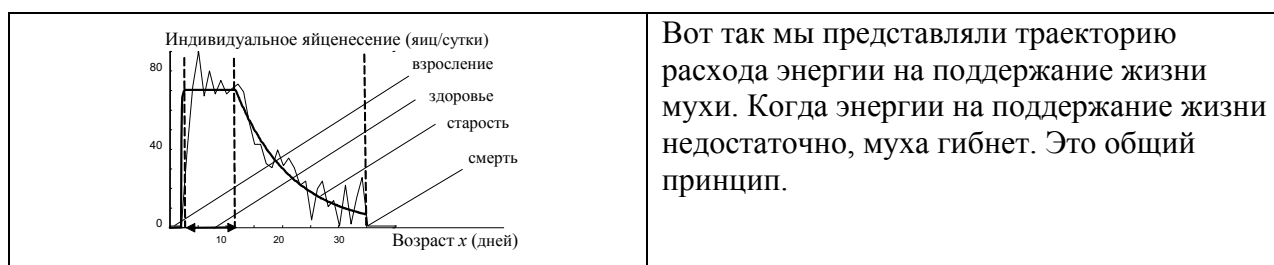


Вероятностное описание длительности события

На примере гомеостаза по кислороду и температуре мы обсудили как описываются и моделируются свойства организма: составляется уравнение, качественно отражающее изучаемый процесс, и численно решается при различных интересующих нас параметрах. Результат фиксируется, выносится на график и т.д.

Теперь мы рассмотрим процессы, изучение которых проводится не на индивидуальном, а на групповом уровне, поскольку они носят случайный характер. Самым важным из таких процессов можно считать продолжительность жизни организма.



Конкретный вид траектории зависит от массы внешних и внутренних факторов: температуры внешней среды, питания, наличия партнёра для воспроизводства, генетических особенностей. Невозможность детального описания совокупного действия всех этих факторов и заставляет нас говорить, что индивидуальная продолжительность жизни является реализацией некоторой случайной величины, характеристики которой мы и будем изучать. В принципе, всё это относится к длительности любого события: длительности болезни, длительности поиска работы, длительности брака и т.д.

Обозначим длительность изучаемого процесса через T . То есть T — случайная величина, принимающая значения на положительной числовой полуоси $(0, \infty)$.

Вероятность того, что изучаемый процесс продлится дольше заданного времени t , называется *функцией дожития* или *распределением времени до отказа* и записывается как

$$S(t) = P\{t \leq T\} \quad ^1).$$

В теории вероятностей свойства случайных величин характеризуются *функцией распределения вероятностей*, определённой как

$$F(t) = P\{T < t\}.$$

Связь между функциями дожития и распределения вероятностей очевидна $S(t) + F(t) + P\{T = t\} = 1$, что следует из рассмотрения, представленного на рисунке 1.

Для непрерывной случайной величины получим $S(t) + F(t) = 1$ и

$$S(t) = 1 - F(t).$$

Таким образом, функция дожития полностью описывает вероятностные свойства распределения случайной величины T .

Свойства функции дожития и функции распределения

$S(0) = 1$	$F(0) = 0$
------------	------------

¹ Обозначение $P\{t \leq T\}$ следует читать как: "мера множеств элементарных событий, удовлетворяющих условию $\{t \leq T\}$ ".

$S(\infty)=0$	$F(\infty)=1$
---------------	---------------

Примеры распределений длительности до наступления события.

1. T равномерно распределено на отрезке $[0,1]$.

$$F(t)=t, S(t)=1-t$$

2. T распределено экспоненциально на положительной полуоси

$$F(t)=1-\exp(-\lambda t), S(t)=\exp(-\lambda t)$$

Характеристики функции дожития, условное дожитие.

Кроме функции распределения распределение случайной величины характеризуется функцией *плотности распределения вероятностей*, связанной с функцией *распределения вероятностей* соотношением

$$f(t)=\frac{d}{dt}F(t).$$

Произведение $f(t)dt$ приблизительно равно вероятности наступления события на интервале $[t-dt/2, t+dt/2]$.

Для удобства будем считать, что с вероятностью 1 случайная величина t не превосходит величину ω .

Средняя длительность процесса по определению равна

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_0^{\omega} tf(t)dt = tF(t)|_0^{\omega} - \int_0^{\omega} F(t)dt = \omega - \int_0^{\omega} F(t)dt \\ &= \int_0^{\omega} dt - \int_0^{\omega} F(t)dt = \int_0^{\omega} (1-F(t))dt = \int_0^{\omega} S(t)dt \end{aligned}$$

СРЕДНЯЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ПРОЦЕССА РАВНА ПЛОЩАДИ ПОД ГРАФИКОМ ФУНКЦИИ ДОЖИТИЯ.

Важной характеристикой является *условное дожитие*, которое равно вероятности дожить до возраста t_2 при условии дожития до возраста t_1

$$P\{t_2 \leq T | t_1 \leq T\} = \frac{P\{t_2 \leq T, t_1 \leq T\}}{P\{t_1 \leq T\}} \quad ^2)$$

Из рисунка 2 видно, что из события $\{t_2 \leq T\}$ вытекает событие $\{t_1 \leq T\}$, из чего следует, что $P\{t_2 \leq T, t_1 \leq T\} = P\{t_2 \leq T\}$ и формула

$$\begin{aligned} P\{t_2 \leq T | t_1 \leq T\} &= \frac{P\{t_2 \leq T\}}{P\{t_1 \leq T\}} && \text{или} \\ S\{t_2 | t_1\} &= \frac{S\{t_2\}}{S\{t_1\}}. \end{aligned}$$

На рисунке 1 представлены кривая дожития и кривая дожития при условии дожития до 40 лет. (*Задание по программированию на MATLAB*)

² По формуле Байеса $P\{A|B\} = P(A,B)/P(B)$

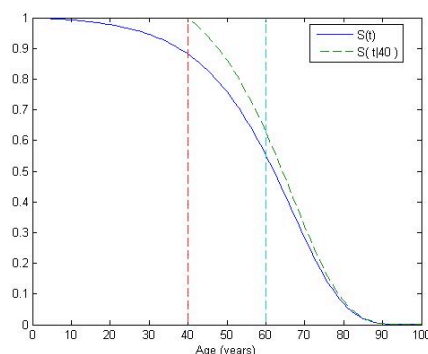


Рисунок 1.

Расчёты для данного примера показывают, что вероятность дожить до 60 лет равна 0.55, та же вероятность при условии дожить до 40 лет равна 0.66. Это явление объясняется тем, что люди, дожившие до 40 лет, избежали шансов умереть до этого возраста. Средняя продолжительность жизни при рождении, рассчитанная по кривой дожития равна 58.6 лет. Средняя же продолжительность жизни среди людей, доживших до 40 лет, равна 63.6 годам.

Примеры характеристик функций дожития.

1. T равномерно распределено на отрезке $[0,1]$.

$$f(t)=1, E(t)=1/2, S(t_2 | t_1)=\frac{1-t_2}{1-t_1}$$

2. T распределено экспоненциально на положительной полуоси

$$f(t)=\lambda \exp(-\lambda t),$$

$$E(t)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau = \frac{-1}{\lambda} e^{-\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} (-e^{-\infty} + e^{-0}) = \frac{1}{\lambda},$$

$$S(t_2 | t_1) = \frac{\exp(-\lambda t_2)}{\exp(-\lambda t_1)} = \exp(-\lambda(t_2 - t_1)) \text{ дожитие зависит от разности времён и не зависит от}$$

абсолютного времени – **НЕТ СТАРЕНИЯ**

Интенсивность наступления события, кумулятивный риск

Функцию распределения вероятностей $F(x)$ можно задавать с помощью функции плотности распределения вероятностей $f(x)$, которые связаны соотношениями

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t); F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx. \text{ Для случайной величины, определённой на положительной}$$

полупрямой, последнее соотношение принимает вид $F(t) = \int_0^t f(x) dx.$

Смысл плотности распределения вероятностей заключается в том, что произведение $f(t)dt$ приблизительно равно вероятности наступления события на интервале $[t - dt/2, t + dt/2]$. При изучении вероятностных характеристик длительности процесса интерес представляет не просто вероятность наступления события на интервале $[t - dt/2, t + dt/2]$, а вероятность наступления события при условии, что до момента t оно не наступило. Этому соответствует вероятность перехода из одного состояния в другое, вероятность наступления смерти и т.д. Такая условная вероятность называется *функцией интенсивности* и определяется соотношением

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{\frac{d}{dt}S(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \ln S(t).$$

Это уравнение можно решить относительно функции дожития $S(t)$ записав

$$\int_0^t \mu(x) dx = -\ln S(t), \text{ откуда } S(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu(x) dx\right) = e^{-H(t)}$$

где $H(t) = \int_0^t \mu(x) dx$ называется функцией кумулятивного риска в отличие от функции

мгновенного риска $\mu(t)$. Функция плотности распределения вероятностей имеет удобное представление $f(t) = \mu(t)S(t)$.

Любая функция распределения вероятностей положительной случайной величины может быть представлена через функцию интенсивности.

Примеры интенсивности и кумулятивного риска.

1. T равномерно распределено на отрезке $[0,1]$.

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{1}{1-t}, \quad H(t) = \int_0^t \mu(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{1-\tau} d\tau = -\ln(1-t)_0^t = -\ln(1-t)$$

2. T распределено экспоненциально на положительной полуоси

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{\lambda \exp(-\lambda t)}{\exp(-\lambda t)} = \lambda, \quad H(t) = \lambda t$$

Название	Функция дожития	Плотность	Интенсивность
Экспоненциальное распределение	$S(t) = e^{-\lambda t}$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\mu(t) = \lambda$
Гомпертца распределение	$S(t) = e^{-\frac{a}{b}(e^{bt}-1)}$	$f(t) = ae^{-\frac{a}{b}(e^{bt}-1)+bt}$	$\mu(t) = ae^{bt}$
Вейбулла распределение	$S(t) = e^{-(\rho t)^k}$	$f(t) = k\rho(\rho t)^{k-1} e^{-(\rho t)^k}$	$\mu(t) = k\rho(\rho t)^{k-1}$
Гамма-распределение		$f(t) = \frac{\rho(\rho t)^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\rho t}$	
Логарифмически нормальное распределение	$S(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)$ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau$	$f(t) = \frac{t^{-1} e^{-\frac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$	$\mu(t) =$ $\frac{t^{-1} e^{-\frac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}} / \sqrt{2\pi}\sigma}{1 - \Phi\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)}$