Дополнительные главы теории вероятностей и основы математической статистики

Лектор: д.ф.-м.н., профессор, Миллер Борис Михайлович

Занятия по вторникам с 11-40 до 13-10.

Задачи аналогичны проблемам на дифференцированном зачете, так что имеет смысл тренироваться.

Задачи для самостоятельного решения. Лекции 1-2, к следующим лекциям будет выдана новая порция задач.

Литература:


1. А.Н.Ширяев: «Вероятность» в 2 кн. «Вероятность—1» — 552 с., «Вероятность—2» — 416 с. 5-е изд., МЦНМО, 2011.; либо однотомное издание - любого года

2. Б. М. Миллер, А. Р. Панков. Теория случайных процессов в примерах задачах. М. Физматлит. 2007


1. Привести пример, показывающий, что в теореме о мажорируемой сходимости, вообще говоря, нельзя ослабить условие

$$|f_n(x)| \leq \phi(x), \quad \int_{\Omega} \phi(x)\mu(dx) < \infty.$$

2. Пусть $\xi$ - случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$. Показать, что

$$M(\xi | a < \xi \leq b) = \frac{\int\limits_a^b x dF_\xi(x)}{F_\xi(b) - F_\xi(a)},$$

предполагается $F_\xi(b) - F_\xi(a) > 0$.

3. Замкнутое множество $F$ на замкнутом интервале $[a, b]$ получается в результате выбрасывания из этого замкнутого интервала счетной совокупности непересекающихся интервалов $\Delta_1, ..., \Delta_k, ....$ с суммой длин, равной $b - a$. Показать, что Лебегова мера множества $F$ равна 0.

4. Пусть $\mathcal{A} = \{A_i, \quad i = 1, ...\}$ система множеств на $\Omega$, удовлетворяющая условию

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j.$$

Показать, что функции измеримые относительно $\sigma(\mathcal{A})$ $\sigma-$алгебры, порожденной системой множеств $\mathcal{A}$ допускают представление $f(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i I_{A_i}(\omega)$ с некоторым набором констант $c_i, \quad i = 1, .....$

5. Пусть $F$ замкнутое подмножество интервала $[a, b]$ и сумма длин интервалов смежных к замкнутому множеству $F$ меньше $b-a$. Показать, что Лебегова мера множества $F$ положительна.

6. Привести пример, показывающий, что объединение $\sigma-$ алгебр, вообще говоря, $\sigma-$ алгеброй не является.

7. Пусть $F_1(x), F_2(x), \quad x \in R^n$ функции распределения. Показать, что

$$\phi(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_2(x),$$

где $\lambda \in [0, 1]$ также является функцией распределения.

8. Приверить является ли функция

$$G(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y \geq 0, \\ \\ 0, & x + y < 0 \end{cases}$$

функцией распределения в $R^2$.

9. Приверить является ли функция

$$G(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \text{и} \quad y < 0; \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

функцией распределения в $R^2$.

10. Приверить является ли функция

$$G(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \text{или} \quad y < 0; \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

функцией распределения в $R^2$.

11. Доказать, что непрерывная функция одной или нескольких переменных измерима относительно Борелевской $\sigma-$ алгебры.

12. Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ такова, что

$$f_n(x) \geq 0, \quad \int\limits_{\Omega} f_n(x)\mu(dx) \to 0,$$

где мера $\mu(dx) \geq 0$. Доказать, что $f_n(x)$ сходится к нулю по мере $\mu(dx)$. Следует ли отсюда сходимость почти всюду по мере $\mu(dx)$?

13. Пусть $F_1(x), F_2(y), \quad x \in R^n, \quad y \in R^k$ функции распределения. Показать, что

$$\phi(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

также является функцией распределения. Какой вероятностный смысл имеет функция $\phi$?

14. Показать, что функция распределения на $R^1$ имеет не более чем счетное множество точек разрыва. Справедлив ли соответствующий результат для функций распределения в $R^n$?