Дополнительные главы теории вероятностей и основы математической статистики

Лектор: д.ф.-м.н., профессор, Миллер Борис Михайлович

Занятия по вторникам с 11-40 до 13-10.

Задачи аналогичны проблемам на дифференцированном зачете, так что имеет смысл тренироваться.

Задачи для самостоятельного решения. Лекции 1-2, к следующим лекциям будет выдана новая порция задач.

Литература:

1. А.Н.Ширяев: «Вероятность» в 2 кн. «Вероятность—1» — 552 с., «Вероятность—2» — 416 с. 5-е изд., МЦНМО, 2011.; либо однотомное издание - любого года

2. Б. М. Миллер, А. Р. Панков. Теория случайных процессов в примерах задачах. М. Физматлит. 2007

3. Б. М. Миллер, А. Р. Панков. Теория случайных процессов в примерах задачах. Москва, Издательство МАИ. 2001 Будет выложена на сайте курса.

1. Привести пример, показывающий, что в теореме о мажорируемой сходимости, вообще говоря, нельзя ослабить условие

$$|f_n(x)| \le \phi(x), \quad \int\limits_{\Omega} \phi(x)\mu(dx) < \infty.$$

2. Пусть ξ - случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$. Показать, что

$$M(\xi|a < \xi \le b) = \frac{\int\limits_a^b x dF_\xi(x)}{F_\xi(b) - F_\xi(a)},$$

предполагается $F_\xi(b) - F_\xi(a) > 0$.

3. Замкнутое множество F на замкнутом интервале $[a, b]$ получается в результате выбрасывания из этого замкнутого интервала счетной совокупности непересекающихся интервалов $\Delta_1, ..., \Delta_k, ...$ с суммой длин, равной $b - a$. Показать, что Лебегова мера множества F равна 0.

4. Пусть $\mathcal{A} = \{A_i, \quad i = 1, ...\}$ система множеств на Ω, удовлетворяющая условию

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j.$$

Показать, что функции измеримые относительно $\sigma(\mathcal{A})$ $\sigma-$алгебры, порожденной системой множеств $\mathcal{A}$ допускают представление $f(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i I_{A_i}(\omega)$ с некоторым набором констант $c_i, \quad i = 1, ...$

5. Пусть ξ - случайная величина, принимающая значение $\xi = 1/2$ с вероятностью $P\{\xi = 1/2\} = 1/2$, и имеющая постоянную плотность распределения на множестве $[0, 1] \setminus \{1/2\}$. Пусть η - случайная величина, принимающая значение $\eta = 1/2$ с вероятностью $P\{\xi = 1/2\} = 1$. Для функций распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ найти измеримую функцию $\rho(x)$ и меру $\Psi(\cdot) \perp F_\xi(\cdot)$ в разложении Лебега

$$F_\eta(A) = \int_A \rho(x) dF_\xi(x) + \Psi(A).$$

6. Пусть F замкнутое подмножество интервала $[a, b]$ и сумма длин интервалов смежных к замкнутому множеству F меньше $b - a$. Показать, что Лебегова мера множества F положительна.

7. Привести пример, показывающий, что объединение $\sigma-$ алгебр, вообще говоря, $\sigma-$ алгеброй не является.

8. Пусть ξ - случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = \xi^2$ и найти

$$P(\eta \in (c, d] | a < \xi \leq b).$$

9. Пусть $F_1(x), F_2(x), \quad x \in R^n$ функции распределения. Показать, что

$$\phi(x) = \lambda F_1(x) + (1 - \lambda) F_2(x),$$

где $\lambda \in [0, 1]$ также является функцией распределения.

10. Приверить является ли функция

$$G(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y \geq 0, \\ \\ 0, & x + y < 0 \end{cases}$$

функцией распределения в R^2.

11. Пусть $\xi, \quad \eta$ - независимые случайные величины с функциями распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ \\ 1, & x > 1. \end{cases}, \qquad F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

12. Доказать, что непрерывная функция одной или нескольких переменных измерима относительно Борелевской $\sigma-$ алгебры.

13. Если ξ^2- случайная величина, то верно ли, что ξ также случайная величина.

14. Пусть $\xi, \quad \eta$ - независимые случайные величины с функциями распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ \\ 1, & x > 1. \end{cases}, \qquad F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $\zeta = \xi - \eta$.

15. Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ такова, что

$$f_n(x) \geq 0, \quad \int\limits_\Omega f_n(x)\mu(dx) \to 0,$$

где мера $\mu(dx) \geq 0$. Доказать, что $f_n(x)$ сходится к нулю по мере $\mu(dx)$. Следует ли отсюда сходимость почти всюду по мере $\mu(dx)$?

16. Доказать, что если ξ и $\eta-\mathcal{F}-$ измеримы, то множество $\{\omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\} \in \mathcal{F}$.

17. Пусть $\xi, \quad \eta$ - независимые случайные величины с функциями распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}, \qquad F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $\zeta = \xi\eta$.

18. Пусть $F_1(x), F_2(y), \quad x \in R^n, \quad y \in R^k$ функции распределения. Показать, что

$$\phi(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

также является функцией распределения. Какой вероятностный смысл имеет функция ϕ?

19. Пусть ξ и η – две случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F})$ и множество $A \in \mathcal{F}$. Показать, что функция

$$\zeta = \xi(\omega)I_A + \eta(\omega)I_{\bar{A}}$$

также является случайной величиной.

20. Пусть $\xi, \quad \eta$ - независимые случайные величины с функциями распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}, \qquad F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины $\zeta = \dfrac{\xi}{\eta}$.

21. Показать, что функция распределения на R^1 имеет не более чем счетное множество точек разрыва. Справедлив ли соответствующий результат для функций распределения в R^n?