ВикипедиЯ

Неравенство Чебышёва

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Нера́венство Чебышёва (или **неравенство Бьенеме — Чебышёва**) — неравенство в теории меры и теории вероятностей. Оно было первый раз получено Бьенеме в 1853 году, и позже также Чебышёвым.

Неравенство, использующееся в теории меры, является более общим, в теории вероятностей используется его следствие.

Содержание

Неравенство Чебышёва в теории меры

Неравенство Чебышёва в теории меры описывает взаимосвязь интеграла Лебега и меры. Аналог этого неравенства в теории вероятностей — неравенство Маркова. Неравенство Чебышёва также используется для доказательства вложения пространства L_p в слабое пространство L_p.

Формулировки

- Пусть $(X,\ \mathcal{F},\ \mu)$ — пространство с мерой. Пусть также
  - $A \in \mathcal{F}$
  - $\phi(x) \geqslant 0$ — суммируемая на A функция
  - $c > 0$.

  Тогда справедливо неравенство:
  $$\mu\big(\{x : x \in A, \phi(x) \geqslant c\}\big) \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_A \phi(x)\mu(dx).$$

- В более общем виде:

Если g — неотрицательная вещественная измеримая функция, неубывающая на области определения ϕ, то

$$\mu\big(\{x\in A\;:\;\phi(x)\geqslant t\}\big)\leqslant\frac{1}{g(t)}\int_A g\circ\phi\,\mu(dx).$$

- В терминах пространства L_p:

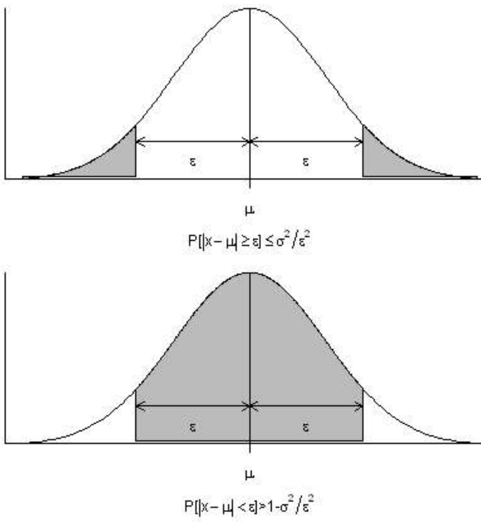
Пусть $\phi(x)\in L_p$. Тогда $\mu\Big(\big\{x\in A\,\big|\,|\phi(x)|>t\big\}\Big)\leqslant\frac{\|\phi\|_p^p}{t^p}$.

Неравенство Чебышёва может быть получено, как следствие из неравенства Маркова.

Неравенство Чебышёва в теории вероятностей

Неравенство Чебышёва в теории вероятностей утверждает, что случайная величина в основном принимает значения, близкие к своему среднему. А более точно, оно даёт оценку вероятности того, что случайная величина примет значение, далёкое от своего среднего.

Неравенство Чебышёва является следствием неравенства Маркова.



Неравенство Чебышёва, ограничивающее вероятность больших отклонений случайной величины от своего математического ожидания

Формулировки

Пусть случайная величина $X\colon\Omega\to\mathbb{R}$ определена на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, а её математическое ожидание μ и дисперсия σ^2 конечны. Тогда

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu|\geqslant a\right)\leqslant\frac{\sigma^2}{a^2},$$

где $a>0$.

Если $a=k\sigma$, где σ — стандартное отклонение и $k>0$, то получаем

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu|\geqslant k\sigma\right)\leqslant\frac{1}{k^2}.$$

В частности, случайная величина с конечной дисперсией отклоняется от среднего больше, чем на 2 стандартных отклонения, с вероятностью меньше 25%. Отклоняется от среднего на 3 стандартных отклонения с вероятностью меньше 11.12%. Иными словами, случайная величина укладывается в 2 стандартных отклонения с вероятностью 75% и в 3 стандартных отклонения с вероятностью 88.88%

Для важнейшего случая одномодальных распределений неравенство Высочанского — Петунина существенно усиливает неравенство Чебышёва, включая в себя дробь $4/9$. Таким образом, граница в 3 стандартных отклонения включает 95.06% значений случайной величины. В отличие от нормального распределения, где 3 стандартных отклонения включают 99.73% значений случайной величины.

См. также

- Неравенство Маркова

Литература

- *Колмогоров, А. Н.*, *Фомин, С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — изд. четвёртое, переработанное. — М.: Наука, 1976. — 544 с.

Ссылки

- Видеолекция о случайных величинах, неравенствах Маркова и Чебышёва (https://web.archive.org/web/20130924095507/http://compscicenter.ru/program/lecture/6504)