Решение. В соответствии с определением 1.1.20

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\{\xi(t)\} = G(t)\, m_U,$$

$$R_\xi(t,\tau) = \mathbf{cov}\{G(t)U, G(\tau)U\} = G(t)\,\mathbf{cov}\{U,U\}\, G^*(\tau) = G(t)R_U G^*(\tau),$$

а ковариационная матрица $D_\xi(t)$ сечения $\xi(t)$, $t \in T$ имеет вид

$$D_\xi(t) = R_\xi(t,t) = G(t)R_U G^*(t). \ \blacksquare$$

Определение 1.1.21. *Пусть $\xi(t)$, $t \in T$ — вещественный случайный процесс. Детерминированная вещественная функция $m_\xi(t_1,\ldots,t_k)$, $t_1,\ldots,t_k \in T$, определяемая соотношением*

$$m_\xi(t_1,\ldots,t_k) = \mathbf{M}\{\xi(t_1)\ldots\xi(t_k)\} = \int\limits_{\mathbb{R}^k} x_1\ldots x_k\, dF_\xi(x_1,\ldots,x_k;\, t_1,\ldots,t_k),$$

называется ***смешанным моментом порядка k процесса*** *$\xi(t)$.*

Определение 1.1.22. *Пусть $\xi(t)$, $t \in T$ — вещественный случайный процесс. Детерминированная комплексная функция $\Psi_\xi(z_1,\ldots,z_k;\, t_1,\ldots,t_k)$ вещественных переменных $z_1,\ldots,z_k$, определяемая для произвольного набора $t_1,\ldots,t_k \in T$ соотношением*

$$\Psi_\xi(z_1,\ldots,z_k;\, t_1,\ldots,t_k) = \mathbf{M}\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{k} z_j\xi(t_j)\right)\right\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^k} \exp\left(i\sum_{j=1}^{k} z_j x_j\right) dF_\xi(x_1,\ldots,x_k;\, t_1,\ldots,t_k),$$

называется ***характеристической функцией k-мерного распределения процесса*** *$\xi(t)$.*

Замечание. Из курса теории вероятностей известно, что характеристическая функция k-го порядка позволяет восстановить соответствующую k-мерную функцию распределения, поэтому эти характеристики при описании вероятностной структуры случайного процесса являются взаимозаменяемыми (см. разд. 4.2).

Пример 1.1.16. В условиях примера 1.1.12 найти характеристическую функцию процесса $\xi(t)$, если дополнительно известно, что X — гауссовская случайная величина.

Решение. Пусть $\eta = \sum_{j=1}^{k} z_j \xi(t_j)$, тогда, учитывая, что $\xi(t_j) = X\varphi(t_j)$, получаем $\eta = X \sum_{j=1}^{k} z_j \varphi(t_j)$, поэтому η — гауссовская случайная величина со средним и дисперсией

$$m_\eta = m_X \sum_{j=1}^{k} z_j \varphi(t_j), \qquad D_\eta = D_X \left(\sum_{j=1}^{k} z_j \varphi(t_j) \right)^2. \tag{1.1.10}$$

Отсюда получаем выражение для искомой характеристической функции:

$$\Psi_\xi(z_1, \ldots, z_k; t_1, \ldots, t_k) = \mathbf{M}\{e^{i\eta}\} = \exp\left\{ i m_\eta - \frac{1}{2} D_\eta \right\},$$

где m_η, D_η определены в (1.1.10) и учтено, что для гауссовской случайной величины η при любом вещественном λ справедливо (см. разд. 4.2):

$$\mathbf{M}\{e^{i\lambda\eta}\} = \exp\left\{ i\lambda m_\eta - \frac{\lambda^2}{2} D_\eta \right\}. \ \blacksquare$$

Замечание. Выше был введен в рассмотрение белый шум с дискретным временем, т. е. последовательность центрированных независимых и, следовательно, некоррелированных случайных величин. Для случая непрерывного времени по аналогии вводится понятие ***белого шума*** как процесса $\xi(t)$ с моментными характеристиками

$$m_\xi(t) = 0, \qquad R_\xi(t, s) = \sigma^2 \delta(t - s),$$

где $\delta(\tau)$ — δ-функция Дирака (см. разд. 4.1). Очевидно, $R_\xi(t, s) = 0$, если $t \neq s$, т. е. сечения этого процесса даже при очень близких t и s некоррелированны. Однако $\xi(t)$ не является гильбертовым случайным процессом, так как $D_\xi(t) = R_\xi(t, t) = \infty$ при всех $t \in T$. Таким образом, белый шум с непрерывным временем физически нереализуем, однако он является удобной математической моделью для описания динамических систем, функционирующих в присутствии постоянно действующих случайных возмущений (см. главу 3).