Ответ: $R_\xi(t,\tau)=\cos(t-\tau)$.

12. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию комплексного случайного процесса $\xi(t)=Ue^{iVt}$, где U,V — независимые случайные величины, $\mathbf{M}\{U\}=0$, $\mathbf{D}\{U\}=D$, а случайная величина V распределена по закону Коши с плотностью вероятности $p_V(x)=\dfrac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)}$, $\alpha>0$.

Указание: воспользоваться табличным интегралом $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha|\beta|}$.

Ответ: $m_\xi(t)=0,\quad R_\xi(t,\tau)=De^{-\alpha|t-\tau|}$.

1.2. Основные классы случайных процессов

1.2.1. Гауссовские случайные процессы

Определение 1.2.1. *Действительный случайный процесс $\xi(t)$, $t\in T$ называется **гауссовским**, если его характеристическая функция имеет вид*

$$\Psi_\xi(z_1,\ldots,z_k;\,t_1,\ldots,t_k)=\mathbf{M}\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{k}z_j\xi(t_j)\right)\right\}=$$

$$=\exp\left(i\sum_{j=1}^{k}z_jm_\xi(t_j)-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}R_\xi(t_l,t_j)z_lz_j\right),\quad(1.2.1)$$

где $z_1,\ldots,z_k$ — произвольные вещественные числа, $t_1,\ldots,t_k\in T$, а

$$m_\xi(t_j)=\mathbf{M}\{\xi(t_j)\}\,,\qquad R_\xi(t_l,t_j)=\mathbf{cov}\{\xi(t_l),\xi(t_j)\}\,.$$

Если обозначить через $(a,b)=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}a_jb_j$ скалярное произведение векторов $a,b\in\mathbb{R}^k$, то характеристическую функцию можно представить в виде

$$\Psi_\xi(z;\,t_1,\ldots,t_k)=\exp\left(i(z,m_\xi)-\frac{1}{2}(R_\xi z,z)\right),\qquad(1.2.2)$$

где $z=\{z_1,\ldots,z_k\}^*$, $m_\xi=\{m_\xi(t_1),\ldots,m_\xi(t_k)\}^*$ и $R_\xi=\{R_\xi(t_i,t_j)\}_{i,j=1,\ldots,k}$.

Как уже говорилось ранее, характеристическая функция полностью определяет распределение совокупности случайных величин, и тем самым задано и полное семейство конечномерных распределений.

Замечания: 1. Из курса теории вероятностей известно, что гауссовский случайный вектор $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_k\}^*$ с математическим ожиданием m_η и ковариационной матрицей R_η имеет плотность распределения $p_\eta(x)$ тогда и только тогда, когда матрица R_η — невырожденная, т. е. $\det[R_\eta] > 0$. В этом случае

$$p_\eta(x) = (2\pi)^{-k/2}(\det[R_\eta])^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m_\eta)^* R_\eta^{-1}(x - m_\eta)\right\}.$$

Таким образом, если матрица $R_\xi = \{R_\xi(t_i, t_j)\}_{i,j=1,\ldots,k}$ положительно определена, то совместное распределение сечений $\{\xi(t_1), \ldots, \xi(t_k)\}$ имеет плотность вероятности

$$p_\xi(x; t_1, \ldots, t_k) = (2\pi)^{-k/2}(\det[R_\xi])^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - m_\xi)^* R_\xi^{-1}(x - m_\xi)\right\},$$

где $m_\xi = \{m_\xi(t_1), \ldots, m_\xi(t_k)\}^*$, $R_\xi = \{R_\xi(t_i, t_j)\}_{i,j=1,\ldots,k}$, $x = \{x_1, \ldots, x_k\}^*$. Связь между характеристической функцией и плотностью распределения k-го порядка имеет вид

$$p_\xi(x; t_1, \ldots, t_k) = (2\pi)^{-k} \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{-i(x,z)} \Psi_\xi(z; t_1, \ldots, t_k)\, dz.$$

Если же $\det[R_\eta] = 0$, то это означает, что сечения $\{\xi(t_1), \ldots, \xi(t_k)\}$ линейно зависимы, а их совместное распределение $F_\xi(x; t_1, \ldots, t_k)$ плотности не имеет.

2. Нетрудно проверить, что семейство конечномерных гауссовских распределений, соответствующее семейству характеристических функций (1.2.2), удовлетворяет условиям 1–6 теоремы Колмогорова (см. разд. 1.1.3). Таким образом, произвольный набор $\{\xi(t_1), \ldots, \xi(t_k)\}$ сечений гауссовского случайного процесса является случайным вектором с гауссовским распределением. Подчеркнем также, что все эти распределения ***согласованы*** (в смысле определения 1.1.9).

3. Из определения гауссовского процесса следует, что семейство его конечномерных распределений полностью определяется двумя моментными характеристиками: математическим ожиданием и ковариационной функцией.

Пример 1.2.1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — совокупность случайных величин, совместное распределение которых — гауссовское. Показать, что случайный процесс

$$\xi(t) = \sum_{l=1}^{n} X_l f_l(t),$$

где $f_l(t)$ — некоторые детерминированные функции, является гауссовским. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\xi(t)$.

Решение. Для некоторой совокупности моментов времени $\{t_1, \ldots, t_k\}$ найдем характеристическую функцию совместного распределения сечений $\{\xi(t_1), \ldots, \xi(t_k)\}$. По определению

$$\Psi_\xi(z_1, \ldots, z_k;\, t_1, \ldots, t_k) =$$

$$= \mathbf{M}\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{k}\xi(t_j)z_j\right)\right\} = \mathbf{M}\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}X_l f_l(t_j)z_j\right)\right\} =$$

$$= \mathbf{M}\left\{\exp\left(i\sum_{l=1}^{n}X_l\sum_{j=1}^{k}f_l(t_j)z_j\right)\right\} = \mathbf{M}\left\{\exp\left(i\sum_{l=1}^{n}X_l a_l\right)\right\},$$

где $a_l = \sum_{j=1}^{k} f_l(t_j)z_j$. Поскольку совместное распределение случайных величин $\{X_1, \ldots, X_n\}$ является гауссовским, то

$$\Psi_\xi(z_1, \ldots, z_k;\, t_1, \ldots, t_k) = \exp\left\{i\sum_{l=1}^{n}\mathbf{M}\{X_l\}\,a_l - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\mathbf{cov}\{X_l, X_m\}\,a_l a_m\right\}.$$

Далее, подставляя выражения для a_l, находим

$$\sum_{l=1}^{n}\mathbf{M}\{X_l\}\,a_l = \sum_{j=1}^{k}\mathbf{M}\{\xi(t_j)\}\,z_j,$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\mathbf{cov}\{X_l, X_m\}\,a_l a_m = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\mathbf{cov}\{\xi(t_i), \xi(t_j)\}\,z_i z_j,$$

где

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\} = \sum_{l=1}^{n}\mathbf{M}\{X_l\}\,f_l(t) = m_\xi(t),$$

$$\mathbf{cov}\{\xi(t), \xi(s)\} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\mathbf{cov}\{X_l, X_m\}\,f_l(t)f_m(s) = R_\xi(t, s).$$

Таким образом, процесс $\xi(t)$ является гауссовским, поскольку его характеристическая функция удовлетворяет определению 1.2.1. Конечномерное распределение k-го порядка в точках $\{t_1, \ldots, t_k\}$ имеет плотность, если матрица $R_\xi = \{\mathbf{cov}\{\xi(t_i), \xi(t_j)\}\}_{i,j=1,\ldots,k}$ положительно определена. ■

Приведем пример гауссовского процесса, не имеющего плотности распределения k-го порядка ($k \geq 2$).

Пример 1.2.2. Найти плотность одномерного распределения гауссовского случайного процесса

$$\xi(t) = X + t, \quad t \geq 0,$$

где X — случайная величина с гауссовским распределением $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$, $\sigma > 0$. Показать, что ξ не имеет плотности распределения k-го порядка при $k \geq 2$.

Решение. Случайная величина $\xi(t)$ имеет гауссовское распределение $\mathcal{N}(t; \sigma^2)$. Поэтому в силу $\sigma > 0$ распределение первого порядка случайного процесса $\xi(t)$ имеет плотность

$$p_\xi(x;\, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Однако уже распределение порядка $k = 2$ не имеет плотности, так как матрица ковариаций

$$R_\xi = \{\mathbf{cov}\{\xi(t_i), \xi(t_j)\}\}_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

вырождена. Отсутствие плотности очевидно, поскольку случайные величины $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$ связаны соотношением $\xi(t_2) = \xi(t_1) + t_2 - t_1$ и, следовательно, их совместное распределение в $\mathbb{R}^2$ сосредоточено на множестве $\{(x_1, x_2) : x_2 = x_1 + t_2 - t_1\}$, имеющем нулевую меру Лебега. Для случая $k > 2$ аналогичное рассуждение показывает отсутствие плотности распределения. ■

Следующий пример демонстрирует гауссовский процесс, у которого все конечномерные распределения имеют плотность.

Пример 1.2.3. Показать, что существует гауссовский случайный процесс $\{\xi(t),\, t \geq 0\}$ с характеристиками

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\} = 0, \qquad \mathbf{cov}\{\xi(t), \xi(s)\} = \min(t, s),$$

причем все его конечномерные распределения имеют плотность.

Решение. Если функция $R_\xi(t,s) = \min(t,s)$ является неотрицательно-определенной, то существование гауссовского процесса $\xi(t)$ с $m_\xi(t) = 0$ и ковариационной функцией $R_\xi(t,s)$ следует из примера 1.1.14 и его решения. Если же $R_\xi(t,s)$ — положительно-определенная, то конечномерные распределения процесса $\xi(t)$ (в предположении гауссовости) имеют плотность распределения.

Функция $R_\xi(t,s)=\min(t,s)$ будет положительно-определенной, если для любых различных моментов времени $0<t_1<t_2<\ldots<t_k$ ковариационная матрица R_ξ вектора $\xi=\{\xi(t_1),\xi(t_2),\ldots,\xi(t_k)\}^*$, имеющая вид

$$R_\xi=\begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \ldots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{pmatrix},$$

является положительно-определенной. Последнее означает, что $z^*R_\xi z>0$ для всякого ненулевого вектора $z=\{z_1,\ldots,z_k\}^*\in\mathbb{R}^k$. Для доказательства этого факта рассмотрим функцию

$$f(s)=\sum_{i=1}^k z_i I_{[0,t_i]}(s),$$

где $I_{[0,t_i]}(s)$ — индикаторная функция отрезка $[0,t_i]$. В силу того, что все $t_i>0$ различны, а z_i не равны нулю одновременно, функция $f(s)$ не равна нулю тождественно. Поэтому

$$\int_0^t |f(s)|^2\,ds>0 \quad \text{при} \quad t\ge t_k.$$

Тогда

$$\int_0^t |f(s)|^2\,ds=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k z_i z_j\int_0^t I_{[0,t_i]}(s)I_{[0,t_j]}(s)\,ds=$$
$$=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k z_i z_j\min(t_i,t_j)=z^*R_\xi z>0,$$

что и означает положительную определенность ковариационной матрицы R_ξ. Таким образом, совместное распределение сечений $\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k)$ гауссовского процесса $\xi(t)$ имеет плотность. ■

Определение 1.2.2. *Гауссовский случайный процесс $\{\xi(t),\ t\ge 0\}$ с непрерывным временем и моментными характеристиками*

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\}=0,\quad \mathbf{cov}\{\xi(t),\xi(s)\}=\min(t,s),\quad t,s\ge 0$$

и выходящий из нуля, т. е. $\xi(0)=0$, называется ***стандартным винеровским процессом*** *(или* ***процессом броуновского движения****).*

Этот процесс обладает многими замечательными свойствами и будет подробно изучаться в главе, посвященной случайным функциям. Здесь мы приведем только некоторые его свойства, которые можно вывести непосредственно из определения 1.2.2.

Пример 1.2.4. Показать, что приращения процесса броуновского движения на непересекающихся промежутках времени независимы, а также найти распределение произвольного приращения.

Решение. Прежде всего заметим, что совокупность приращений процесса броуновского движения $\xi(t_1)-\xi(t_0)$, $\xi(t_2)-\xi(t_1)$, $\ldots$, $\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})$, где $0=t_0<t_1<\ldots<t_k$ и $\xi(t_0)=0$, имеет гауссовское распределение в силу гауссовости случайного вектора $\{\xi(t_1),\xi(t_2),\ldots,\xi(t_k)\}^*$. Поэтому для доказательства независимости приращений достаточно установить их некоррелированность. Итак, для моментов времени $t_i<t_j$ верно

$$\mathbf{cov}\{\xi(t_i)-\xi(t_{i-1}),\xi(t_j)-\xi(t_{j-1})\}=$$
$$=\min(t_i,t_j)-\min(t_i,t_{j-1})-\min(t_{i-1},t_j)+\min(t_{i-1},t_{j-1})=0,$$

что означает некоррелированность приращений процесса $\xi(t)$ на промежутках $[t_{i-1},t_i]$ и $[t_{j-1},t_j]$.

Как уже отмечалось, приращение $\xi(t)-\xi(s)$ имеет гауссовское распределение. Поэтому

$$\xi(t)-\xi(s)\sim\mathcal{N}(0;|t-s|), \tag{1.2.3}$$

так как $\mathbf{M}\{\xi(t)-\xi(s)\}=0$ и $\mathbf{D}\{\xi(t)-\xi(s)\}=t+s-2\min(t,s)=|t-s|$. ∎

Пример 1.2.5. Найти плотность конечномерного распределения процесса броуновского движения.

Решение. Рассмотрим приращения процесса броуновского движения:

$$\eta_1=\xi(t_1)-\xi(t_0),\quad \eta_2=\xi(t_2)-\xi(t_1),\quad \ldots,\quad \eta_k=\xi(t_k)-\xi(t_{k-1}),$$

где $0=t_0<t_1<\ldots<t_k$. Поскольку $\xi(t_0)=0$, то

$$\xi(t_1)=\eta_1,\quad \xi(t_2)=\eta_1+\eta_2,\quad \ldots,\quad \xi(t_k)=\eta_1+\ldots+\eta_k.$$

Пусть $p_\eta(\cdot)$ — плотность распределения вектора $\eta=\{\eta_1,\ldots,\eta_k\}^*$, а $p_{\eta_i}(\cdot)$ — плотность распределения приращения η_i. Тогда плотность распределения вектора $\xi=\{\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k)\}^*$ равна

$$p_\xi(x_1,\ldots,x_k;\,t_1,\ldots,t_k)=p_\eta(x_1,x_2-x_1,\ldots,x_k-x_{k-1})=$$
$$=p_{\eta_1}(x_1)\,p_{\eta_2}(x_2-x_1)\,\ldots\,p_{\eta_k}(x_k-x_{k-1}),$$

где первое равенство следует из того, что якобиан преобразования $\eta \mapsto \xi$ равен по модулю 1, а второе получено с учетом независимости случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Тогда из (1.2.3) следует

$$p_\xi(x_1, \ldots, x_k; t_1, \ldots, t_k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi|t_i - t_{i-1}|}} \exp\left\{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2|t_i - t_{i-1}|}\right\}, \qquad (1.2.4)$$

где $t_0 = 0$ и $x_0 = 0$. ■

В приложениях весьма часто приходится иметь дело с ***n-мерными гауссовскими процессами***, где $n > 1$. По аналогии с введенным ранее определением 1.2.1 мы можем назвать процесс $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$ гауссовским, если при любых $t_1, \ldots, t_k \in T$, $k \geq 1$ $(n \times k)$-мерный случайный вектор $\eta = \{\xi^*(t_1), \ldots, \xi^*(t_k)\}^*$ имеет гауссовское $(n \times k)$-мерное распределение. Все свойства такого процесса полностью определяются n-мерной функцией математического ожидания $m_\xi(t)$ и $(n \times n)$-мерной (т. е. матричной) ковариационной функцией $R_\xi(t, s)$, которая вычисляется следующим образом:

$$R_\xi(t, s) = \mathbf{M}\Big\{(\xi(t) - m_\xi(t))(\xi(s) - m_\xi(s))^*\Big\} = \mathbf{M}\{\xi(t)\xi^*(s)\} - m_\xi(t)m_\xi^*(s).$$

1.2.2. Случайные процессы с конечными моментами второго порядка

Многие прикладные задачи в области физики и техники допускают решение, основанное на использовании лишь первых двух моментных характеристик случайного процесса — математического ожидания и ковариационной функции. Это тем более удобно, поскольку эти моментные характеристики можно достаточно просто восстановить, обрабатывая статистические данные. В данном разделе излагаются основные свойства процессов с конечными моментами второго порядка (гильбертовых процессов), которые будут постоянно использоваться в последующих разделах.

В соответствии с определением 1.1.18 мы рассматриваем комплексные процессы, представимые в виде

$$\xi(t) = X(t) + iY(t), \quad t \in T,$$

где $X(t), Y(t)$ — действительные случайные процессы с конечными моментами второго порядка. В дальнейшем для простоты предполагается, что $\mathbf{M}\{\xi(t)\} = 0$ для всех $t \in T$.