Для обозначения гауссовской СВ будем писать $\xi \sim \mathcal{N}(m;\sigma^2)$. Вероятность попадания ξ в произвольный интервал $(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}^1$ можно вычислить по следующей известной формуле:

$$\mathbf{P}\{\alpha < \xi < \beta\} = \varPhi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \varPhi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right).$$

Замечание. Свойство гауссовости распределения сохраняется при линейном преобразовании СВ ξ. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(m_\xi; D_\xi)$, а $\eta = \alpha\xi + \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, тогда $\eta \sim \mathcal{N}(m_\eta; D_\eta)$, где $m_\eta = \alpha m_\xi + \beta$; $D_\eta = \alpha^2 D_\xi$.

Для описания ***гауссовского случайного вектора*** (т. е. упорядоченной системы гауссовских СВ) удобно воспользоваться аппаратом характеристических функций.

Пусть $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}^*$ — вещественный случайный вектор с математическим ожиданием $m_\xi = \{m_{\xi_1}, \ldots, m_{\xi_n}\}^*$ и ковариационной матрицей $R_\xi = \{\mathbf{cov}\{\xi_i, \xi_j\}\}_{i,j=1,\ldots n}$. Пусть также $x = \{x_1, \ldots, x_n\}^* \in \mathbb{R}^n$, $F_\xi(x)$ — n-мерная функция распределения СВ ξ, а i — мнимая единица, т. е. $i^2 = -1$.

Определение 4.2.27. *Комплексная функция $\Psi_\xi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$*

$$\Psi_\xi(\lambda) = \mathbf{M}\left\{e^{i\lambda^*\xi}\right\} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda^* x} dF_\xi(x),$$

называется ***характеристической функцией*** *распределения $F_\xi(x)$.*

Теорема 4.2.13. *Характеристическая функция однозначно определяет функцию распределения, т. е. если СВ ξ и СВ η имеют одну характеристическую функцию $\Psi_\xi(\lambda) = \Psi_\eta(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, то $F_\xi(x) = F_\eta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.*

Теперь мы можем ввести понятие ***гауссовского случайного вектора***.

Определение 4.2.28. *Случайный вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет* ***n-мерное гауссовское распределение*** *с параметрами $(m_\xi; R_\xi)$, если его характеристическая функция имеет вид*

$$\Psi_\xi(\lambda) = \exp\left\{i\lambda^* m_\xi - \frac{1}{2}\lambda^* R_\xi \lambda\right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n,$$

где m_ξ — математическое ожидание, а R_ξ — ковариационная матрица.

Замечания: 1. Нетрудно проверить, что любая компонента ξ_k гауссовского вектора ξ имеет распределение $\mathcal{N}(m_k; D_k)$, где m_k — k-й элемент вектора m_ξ, а D_k — k-й диагональный элемент матрицы R_ξ.

2. Если матрица $R_\xi > 0$ (т. е. положительно определена), то $F_\xi(x)$ имеет плотность распределения

$$p_\xi(x) = (2\pi)^{-n/2}(\det[R_\xi])^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m_\xi)^* R_\xi^{-1}(x-m_\xi)\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\det[R_\xi] > 0$ — определитель матрицы R_ξ.

Гауссовские векторы обладают серией замечательных свойств, важнейшие из которых перечислены ниже.

1. Если $\mathbf{cov}\{\xi,\eta\} = \mathbf{M}\{\xi\eta^*\} - m_\xi m_\eta^* = 0$, а вектор $\gamma = \{\xi^*,\eta^*\}^*$ — гауссовский, то ξ и η — независимы.

2. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(m_\xi; R_\xi)$, а $\eta = A\xi + b$, где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, тогда $\eta \sim \mathcal{N}(m_\eta; R_\eta)$, где

$$m_\eta = Am_\xi + b; \qquad R_\eta = AR_\xi A^*.$$

3. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность гауссовских случайных векторов. Если $\xi_n \xrightarrow{\text{с.к.}} \xi$, $n \to \infty$, то $\xi \sim \mathcal{N}(m_\xi; R_\xi)$, где $m_\xi = \lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{M}\{\xi_m\}$, а $R_\xi = \lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{cov}\{\xi_n,\xi_n\}$, причем указанные пределы существуют и конечны.

4. Если $\{\xi_n\}$ — последовательность гауссовских СВ и $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, $n\to\infty$, то $\xi_n \xrightarrow{\text{с.к.}} \xi$, $n \to \infty$ (в общем случае это не верно!).

5. Теорема 4.2.14 (о нормальной корреляции). *Пусть $\gamma = \{\xi^*,\eta^*\}^*$ — гауссовский вектор такой, что $R_\eta > 0$, тогда*

а) *условное математическое ожидание имеет вид*

$$\widehat{\xi} = \mathbf{M}\{\xi \mid \eta\} = m_\xi + R_{\xi\eta}R_\eta^{-1}(\eta - m_\eta); \tag{4.2.10}$$

б) $\xi \perp \xi - \widehat{\xi}$, *т. е.* ξ *и* $\xi - \widehat{\xi}$ — *независимы;*

в) *пусть* $\Delta\xi = \xi - \widehat{\xi}$, *тогда*

$$\mathbf{M}\{\Delta\xi\} = 0, \quad \mathbf{cov}\{\Delta\xi,\Delta\xi\} = R_\xi - R_{\xi\eta}R_\eta^{-1}R_{\xi\eta}^*;$$

г) *условное математическое ожидание* $\widehat{\xi}$ *имеет гауссовское распределение с параметрами* $(m_\xi; R_{\xi\eta}R_\eta^{-1}R_{\xi\eta}^*)$, *где*

$$R_\xi = \mathbf{cov}\{\xi,\xi\}, \quad R_{\xi\eta} = \mathbf{cov}\{\xi,\eta\}, \quad R_\eta = \mathbf{cov}\{\eta,\eta\}.$$

Замечание. Теорема о нормальной корреляции дает явный вид (4.2.10) с.к.-оптимальной оценки $\widehat{\xi} = \mathbf{M}\{\xi \mid \eta\}$ для ξ по наблюдениям η в гауссовском случае. Заметим, что $\widehat{\xi}$ ***линейно*** зависит от η.

6. Если $\{\gamma, \xi, \eta\}$ составляют гауссовский вектор, а ξ и η — некоррелированные, то

$$\mathbf{M}\{\gamma \mid \xi, \eta\} = \mathbf{M}\{\gamma \mid \xi\} + \mathbf{M}\{\gamma \mid \eta\} - m_\gamma.$$

7. Если компоненты вектора $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}^*$ — гауссовские и независимые в совокупности, то ξ — гауссовский случайный вектор.

4.2.7. Гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом

Для вероятностных приложений наиболее важным является пространство $\mathcal{H}$ случайных величин ξ, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, центрированных и имеющих конечный второй момент:

$$\mathbf{M}\{\xi\} = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\Omega} |\xi(\omega)|^2 \mathbf{P}(d\omega) = \mathbf{M}\big\{|\xi|^2\big\} < \infty.$$

Если $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, то положим

$$(\xi, \eta) = \mathbf{M}\{\xi\overline{\eta}\} = \mathbf{cov}\{\xi, \eta\}\,.$$

Если $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{H}$, то справедливы следующие свойства операции $(\cdot,\cdot)$:

1) $(\xi, \xi) \geq 0$; если $(\xi, \xi) = 0$, то $\xi = 0$ ($\mathbf{P}$-п.н.);

2) $(a\xi + b\eta, \zeta) = a(\xi, \zeta) + b(\eta, \zeta)$ для любых $a, b \in \mathbb{C}$;

3) $(\eta, \xi) = \overline{(\xi, \eta)}$.

Тем самым $(\cdot,\cdot)$ является ***скалярным произведением*** и определяет ***норму*** в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\|\xi\| = (\xi, \xi)^{1/2}.$$

Если $\xi_n \to \xi$, $n \to \infty$ в $\mathcal{H}$, то это означает, что $\mathbf{M}\big\{|\xi_n - \xi|^2\big\} \to 0$. Таким образом, сходимость в $\mathcal{H}$ означает с.к.-сходимость. В силу свойств с.к.-сходимости заключаем, что если $\{\xi_n\}$ фундаментальна, то она сходится к некоторой СВ ξ, причем $\|\xi\|^2 = \mathbf{M}\big\{|\xi|^2\big\} < \infty$, т. е. $\xi \in \mathcal{H}$. Последнее означает, что