Решение. Определим моментные характеристики процесса $Z(t)$. Поскольку $\mathbf{M}\{w(t)\} = \mathbf{M}\{w(t+\tau)\} = 0$, то $\mathbf{M}\{Z(t)\} = 0$ и

$$R_Z(t,s) = \mathbf{cov}\{Z(t), Z(s)\} = \mathbf{M}\{(w(t+\tau) - w(t))(w(s+\tau) - w(s))\} =$$

$$= \min(t+\tau, s+\tau) - \min(t, s+\tau) - \min(t+\tau, s) + \min(t,s) =$$

$$= \begin{cases} \tau - |t-s| & \text{при} \quad |t-s| \le \tau, \\ 0 & \text{при} \quad |t-s| > \tau. \end{cases}$$

Таким образом, $R_Z(t,s) = C(t-s)$, что доказывает стационарность. ■

Непосредственно из свойств ковариационной функции гильбертова процесса (см. теорему 1.2.1) вытекают следующие свойства ковариационной функции стационарного в широком смысле процесса.

Теорема 1.2.5. *Пусть $C(t)$ — ковариационная функция некоторого стационарного в широком смысле процесса, заданного на T, тогда она обладает следующими свойствами:*

1) $C(0) \ge 0$*;*

2) $C(t) = \overline{C(-t)}$ *для всех* $t \in T$*;*

3) $|C(t)| \le C(0)$ *для всех* $t \in T$*;*

4) $|C(t_1) - C(t_2)|^2 \le 2C(0)[C(0) - \mathrm{Re}\, C(t_1 - t_2)]$ *для всех* $t_1, t_2 \in T$.

Свойства стационарных случайных последовательностей и случайных функций подробно рассматриваются в главах 2 и 3. Там же будут введены спектральные характеристики стационарных процессов, которые являются удобной альтернативой рассмотренным моментным характеристикам и широко используются для решения разнообразных прикладных задач.

1.2.4. Марковские процессы

Марковские случайные процессы обладают важным свойством независимости будущего поведения от всего прошлого. Это свойство называется ***отсутствием последействия***. Иначе говоря, если рассматривать текущее состояние процесса $\xi(t)$ в момент времени $t \in T$ как “настоящее”, совокупность всех возможных состояний $\{\xi(s),\ s < t\}$ как “прошлое”, а совокупность возможных состояний $\{\xi(u),\ u > t\}$ как “будущее”, то для марковского процесса при фиксированном “настоящем” “будущее” не зависит от “прошлого”. При этом семейство распределений процесса для $u > t$ зависит лишь от состояния процесса в момент времени t.

Определение 1.2.6. *Случайный вещественный процесс* $\{\xi(t),\ t \in T\}$ *называется* ***марковским процессом*** *или* ***процессом Маркова****, если для любых* $t_l \in T : t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k$, $l = 1, \ldots, k$, *произвольного целого* $k > 1$ *и любого борелевского множества* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ *выполнено*

$$\mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B \mid \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{k-1})\} = \mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B \mid \xi(t_{k-1})\} \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \quad (1.2.7)$$

Свойство (1.2.7) *называется* ***марковским свойством****.*

Замечание. В соотношении (1.2.7) условные вероятности определяются относительно σ-алгебры, порожденной случайными величинами $\{\xi(t_1), \ldots, \xi(t_{k-1})\}$ (в левой части) и σ-алгебры, порожденной только $\xi(t_{k-1})$ (в правой части). Соотношение (1.2.7) можно записать также в виде

$$\mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B \mid \xi(t_1) = x_1, \ldots, \xi(t_{k-1}) = x_{k-1}\} = \mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B \mid \xi(t_{k-1}) = x_{k-1}\},$$

где $x_l \in \mathbb{R}^1$ — произвольное допустимое значение случайной величины $\xi(t_l)$, $l = 1, \ldots, k$.

Таким образом, вероятностное распределение состояния процесса в момент времени t_k зависит лишь от того, в каком состоянии находился процесс в ближайшем прошлом, т. е. при $t = t_{k-1}$, но не зависит от его состояний, предшествующих моменту времени t_{k-1}. Можно показать (см. задачу 10), что для марковского процесса при любых $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ и $s \le u \le t$

$$\mathbf{P}\{\xi(s) \in B_1,\ \xi(t) \in B_2 \mid \xi(u)\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi(s) \in B_1 \mid \xi(u)\}\,\mathbf{P}\{\xi(t) \in B_2 \mid \xi(u)\} \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \quad (1.2.8)$$

Определение 1.2.7. ***Переходная вероятность марковского процесса*** *определяется как*

$$\mathsf{P}(s, x, t, B) = \mathbf{P}\{\xi(t) \in B \mid \xi(s) = x\}$$

при $t > s$, $x \in \mathbb{R}^1$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ *и удовлетворяет соотношению*

$$\mathsf{P}(s, x, t, B) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \mathsf{P}(s, x, u, dy)\,\mathsf{P}(u, y, t, B),$$

которое выполняется для всех $s, u, t \in T : s \le u \le t$ *и называется* ***уравнением Колмогорова–Чепмена****.*

Определение 1.2.8. *Марковский процесс называется* ***однородным****, если*

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B \mid \xi(s) = x\} = \mathsf{P}(0, x, t - s, B).$$

Далее для краткости будем писать $\mathsf{P}(0, x, \tau, B) = \mathsf{P}(x, \tau, B)$.

Для однородного марковского процесса уравнение Колмогорова–Чепмена упрощается:

$$\mathsf{P}(x, s+t, B) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \mathsf{P}(x, s, dy)\, \mathsf{P}(y, t, B),$$

где $s, t, s+t \in T$.

Для определения конечномерных распределений марковского процесса достаточно знать его переходную вероятность и одномерное распределение в некоторый начальный момент времени, поскольку с использованием формулы полной вероятности и марковского свойства легко получается соотношение

$$\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in B_1, \ldots, \xi(t_k) \in B_k\} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} \pi(dx_0) \int\limits_{B_1} \mathsf{P}(0, x_0, t_1, dx_1) \ldots \int\limits_{B_k} \mathsf{P}(t_{k-1}, x_{k-1}, t_k, dx_k), \quad (1.2.9)$$

где $0 < t_1 < \ldots < t_k$, $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, а $\pi(B) = \mathbf{P}\{\xi(0) \in B\}$.

Если переходная вероятность и начальное распределение вероятностей процесса $\xi(t)$ имеют плотности, т. е. существуют $\mathsf{p}(s, x, t, y)$, $p_\xi(x; 0)$ такие, что для всех $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$

$$\mathsf{P}(s, x, t, B) = \int\limits_B \mathsf{p}(s, x, t, y)\, dy, \qquad \pi(B) = \int\limits_B p_\xi(x_0; 0)\, dx_0,$$

то и любое распределение k-го порядка также имеет плотность:

$$p_\xi(x_1, \ldots, x_k;\, t_1, \ldots, t_k) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \prod_{i=1}^{k} \mathsf{p}(t_{i-1}, x_{i-1}, t_i, x_i)\, p_\xi(x_0; 0)\, dx_0. \qquad (1.2.10)$$

Функция $\mathsf{p}(s, x, t, y)$ называется ***переходной плотностью*** распределения марковского процесса и при всех $s, t \in T$ и $x, y \in \mathbb{R}^1$ удовлетворяет соотношениям:

1) $\mathsf{p}(s, x, t, y) \geq 0$ (условие неотрицательности);

2) $\int\limits_{\mathbb{R}^1} \mathsf{p}(s, x, t, y)\, dy = 1$ (условие нормировки).

Рассмотрим некоторые примеры марковских процессов.

Пример 1.2.10. Рассмотрим последовательность бросаний симметричной игральной кости. Пусть случайная величина X_n есть число очков, выпавшее на грани при n-м бросании, $n = 1, 2, \ldots$. Введем последовательность случайных величин по правилу

$$\xi(n) = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

Показать, что последовательность $\xi(n)$ — марковская, и определить для нее переходную вероятность.

Решение. Пусть при некотором $n \geq 1$, $\xi(n) = i$, где i — целое число от 1 до 6. При последующих бросаниях значение ξ не может уменьшиться, поэтому для $j = 1, \ldots, 6$

$$\mathbf{P}\{\xi(n+1) = j \mid \xi(n) = i\} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j < i, \\ i/6 & \text{при} \quad j = i, \\ 1/6 & \text{при} \quad j > i. \end{cases}$$

В силу независимости результатов бросаний, условная вероятность перехода зависит лишь от $\xi(n) = i$ и не зависит от последовательности предыдущих значений ξ. Итак, в данном случае последовательность является марковской, а переходная вероятность (за один шаг) описывается матрицей P, элементы которой равны $P_{ij} = \mathbf{P}\{\xi(n+1) = j \mid \xi(n) = i\}$, $i, j = 1, \ldots, 6$. ■

Замечание. Случайная последовательность, описанная в примере 1.2.10, относится к классу ***дискретных цепей Маркова с конечным множеством состояний***. Более подробно этот класс последовательностей изучается в главе 2.

Процесс, о котором пойдет речь в следующем примере, относится к классу марковских случайных функций.

Пример 1.2.11. Показать, что процесс броуновского движения — марковский, и найти его переходную вероятность.

Решение. В примере 1.2.5 мы нашли плотность конечномерного распределения процесса броуновского движения. Для вычисления плотности условного распределения воспользуемся формулой (1.2.4) с учетом того, что

$t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k$:

$$p_\xi\left(x_k;\, t_k \mid \xi(t_1) = x_1, \ldots, \xi(t_{k-1}) = x_{k-1}\right) = \frac{p_\xi(x_1, \ldots, x_k;\, t_1, \ldots, t_k)}{p_\xi(x_1, \ldots, x_{k-1};\, t_1, \ldots, t_{k-1})} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (2\pi(t_i - t_{i-1}))^{-1/2} \exp\left\{-(x_i - x_{i-1})^2/2(t_i - t_{i-1})\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{k-1} (2\pi(t_i - t_{i-1}))^{-1/2} \exp\left\{-(x_i - x_{i-1})^2/2(t_i - t_{i-1})\right\}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} \exp\left\{-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})}\right\} = p_\xi\left(x_k;\, t_k \mid \xi(t_{k-1}) = x_{k-1}\right).$$

Таким образом, процесс броуновского движения — марковский, а его переходная вероятность $\mathsf{P}(s, x, t, \cdot)$ при фиксированных $x \in \mathbb{R}^1$, $s < t$ представляет собой гауссовское распределение $\mathcal{N}(x; t - s)$. ■

В следующем примере мы получим условие того, что гауссовский процесс является марковским.

Пример 1.2.12. Рассмотрим центрированный гауссовский процесс $\xi(t)$ с положительной дисперсией $D_\xi(t) > 0$. Показать, что $\xi(t)$ является марковским тогда и только тогда, когда его ковариационная функция $R_\xi(t, s)$ удовлетворяет при $t_1 \le t_2 \le t_3$ равенству

$$R_\xi(t_1, t_3) = \frac{R_\xi(t_1, t_2) R_\xi(t_2, t_3)}{R_\xi(t_2, t_2)}. \tag{1.2.11}$$

Решение. Покажем необходимость. С использованием марковского свойства (1.2.8) при $t_1 \le t_2 \le t_3$ находим

$$R_\xi(t_1, t_3) = \mathbf{M}\{\xi(t_1)\xi(t_3)\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi(t_1)\xi(t_3)\} \mid \xi(t_2)\} =$$
$$= \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi(t_1) \mid \xi(t_2)\}\, \mathbf{M}\{\xi(t_3) \mid \xi(t_2)\}\}.$$

При этом в силу теоремы о нормальной корреляции (см. разд. 4.2) имеем $\mathbf{M}\{\xi(t_j) \mid \xi(t_2)\} = \dfrac{R_\xi(t_j, t_2)}{R_\xi(t_2, t_2)}\xi(t_2)$ при $j = 1, 3$. Следовательно,

$$R_\xi(t_1, t_3) = \mathbf{M}\left\{\frac{R_\xi(t_1, t_2)}{R_\xi(t_2, t_2)}\xi(t_2)\frac{R_\xi(t_3, t_2)}{R_\xi(t_2, t_2)}\xi(t_2)\right\} =$$
$$= \frac{R_\xi(t_1, t_2) R_\xi(t_2, t_3)}{R^2_\xi(t_2, t_2)}\mathbf{M}\left\{\xi^2(t_2)\right\} = \frac{R_\xi(t_1, t_2) R_\xi(t_2, t_3)}{R_\xi(t_2, t_2)}.$$

Тем самым требуемое равенство (1.2.11) доказано.

Теперь установим обратное утверждение. Докажем, что гауссовский процесс $\xi(t)$, ковариационная функция которого удовлетворяет соотношению (1.2.11), является марковским.

В силу определения 1.2.6 марковское свойство процесса $\xi(t)$ означает совпадение условных распределений:

$$F_\xi(x_n;\, t_n \mid \xi(t_1) = x_1, \ldots, \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}) \;=\; F_\xi(x_n;\, t_n \mid \xi(t_{n-1}) = x_{n-1})$$

при всех $t_1 \leq \ldots \leq t_{n-1} \leq t_n$. Поэтому в силу гауссовости процесса $\xi(t)$ достаточно установить равенства следующих условных характеристик:

$$\mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-1})\} \;=\; \mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_{n-1})\}\,, \tag{1.2.12}$$

$$\mathbf{D}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-1})\} \;=\; \mathbf{D}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_{n-1})\}\,. \tag{1.2.13}$$

Докажем сначала равенство (1.2.12). При $n = 2$ оно тривиально. При произвольном $n \geq 3$ предположим, что (1.2.12) выполнено для любого числа моментов времени, не большего $n-1$.

Обозначим $v = \xi(t_{n-1}) - \mathbf{M}\{\xi(t_{n-1}) \mid \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-2})\}$, тогда

$$\mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-2}), \xi(t_{n-1})\} = \mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-2}), v\}\,.$$

Нетрудно проверить, что $\mathbf{cov}\{v, \xi(t_i)\} = 0$, $i = 1, \ldots, n-2$, поэтому с учетом $\mathbf{M}\{\xi(t)\} = 0$ и гауссовости случайного процесса $\xi(t)$ (см. свойство 6 из разд. 4.2.6), получаем

$$\mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-1})\} = \mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-2})\} + \mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid v\} =$$
$$= \mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_{n-2})\} + \mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid v\}\,,$$

где второе равенство получено в силу предположения индукции. Далее, в силу теоремы о нормальной корреляции находим

$$\mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_{n-2})\} = \frac{R_\xi(t_n, t_{n-2})}{R_\xi(t_{n-2}, t_{n-2})}\,\xi(t_{n-2}), \qquad \mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid v\} = \gamma\, v,$$

где $\gamma = \mathbf{cov}\{\xi(t_n), v\}\, \mathbf{D}\{v\}^{-1}$. По предположению индукции имеем

$$v = \xi(t_{n-1}) - \mathbf{M}\{\xi(t_{n-1}) \mid \xi(t_{n-2})\} = \xi(t_{n-1}) - \frac{R_\xi(t_{n-1}, t_{n-2})}{R_\xi(t_{n-2}, t_{n-2})}\,\xi(t_{n-2}),$$

следовательно,

$$\mathbf{cov}\{\xi(t_n), v\} = R_\xi(t_n, t_{n-1}) - \frac{R_\xi(t_{n-1}, t_{n-2}) R_\xi(t_n, t_{n-2})}{R_\xi(t_{n-2}, t_{n-2})},$$

$$\mathbf{D}\{v\} = R_\xi(t_{n-1}, t_{n-1}) - \frac{R_\xi^2(t_{n-1}, t_{n-2})}{R_\xi(t_{n-2}, t_{n-2})},$$

$$\gamma = \frac{R_\xi(t_{n-2}, t_{n-2}) R_\xi(t_n, t_{n-1}) - R_\xi(t_{n-1}, t_{n-2}) R_\xi(t_n, t_{n-2})}{R_\xi(t_{n-2}, t_{n-2}) R_\xi(t_{n-1}, t_{n-1}) - R_\xi^2(t_{n-1}, t_{n-2})}.$$

Нетрудно проверить, что из условия (1.2.11) следует соотношение

$$\frac{R_\xi(t_n, t_{n-2})}{R_\xi(t_{n-2}, t_{n-2})} - \gamma\, \frac{R_\xi(t_{n-1}, t_{n-2})}{R_\xi(t_{n-2}, t_{n-2})} = 0,$$

поэтому

$$\mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-1})\} =$$

$$= \frac{R_\xi(t_n, t_{n-2})}{R_\xi(t_{n-2}, t_{n-2})}\, \xi(t_{n-2}) + \gamma \left(\xi(t_{n-1}) - \frac{R_\xi(t_{n-1}, t_{n-2})}{R_\xi(t_{n-2}, t_{n-2})}\, \xi(t_{n-2}) \right) = \gamma\, \xi(t_{n-1}).$$

Полученное равенство немедленно влечет (1.2.12).

Теперь доказательство (1.2.13) получается применением теоремы о нормальной корреляции и установленного равенства (1.2.12):

$$\mathbf{D}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-1})\} = \mathbf{D}\{\xi(t_n) - \mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-1})\}\} =$$

$$= \mathbf{D}\{\xi(t_n) - \mathbf{M}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_{n-1})\}\} = \mathbf{D}\{\xi(t_n) \mid \xi(t_{n-1})\}\,.$$

Тем самым достаточность условия (1.2.11) полностью доказана. ■

Пример 1.2.13. Показать, что процесс броуновского движения является марковским, используя результат примера 1.2.12.

Решение. Так как по определению броуновское движение — центрированный гауссовский процесс с дисперсией $D_\xi(t) > 0$ при $t > 0$, то нам достаточно проверить выполнение соотношения (1.2.11) для $R_\xi(t, s) = \min(t, s)$ и $0 < t_1 \le t_2 \le t_3$:

$$\frac{\min(t_1, t_2) \min(t_2, t_3)}{\min(t_2, t_2)} = \frac{t_1 t_2}{t_2} = \min\,(t_1, t_3) = R_\xi(t_1, t_3). \ ■$$

1.2.5. Диффузионные процессы

Важным подклассом марковских процессов являются процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний. Такие процессы