1.1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать свойства 1–6 конечномерных распределений (1.1.1).

2. Доказать свойства 1–6 для семейства конечномерных распределений, найденных в примерах 1.1.3, 1.1.4.

3. В условиях примера 1.1.4 построить пучок траекторий процесса $\xi(t)$, если X и Y распределены равномерно на отрезках $[-1, 0]$ и $[0, 1]$ соответственно.

4. Доказать, что для существования $m_\xi(t), D_\xi(t)$ и $R_\xi(t,\tau)$ при всех $t, \tau \in T$ достаточно, чтобы выполнялось условие $\mathbf{M}\{|\xi(t)|^2\} < \infty\ \forall t \in T$.

Указание: воспользоваться неравенством Коши–Буняковского.

5. Доказать, что $D_\xi(t) = R_\xi(t,t)$.

6. Пусть в примере 1.1.4 X и Y имеют плотности распределения $p_X(x)$, $p_Y(y)$. Найти двумерную плотность распределения процесса $\xi(t)$. Показать, что распределения порядка $k \geq 3$ плотности не имеют.

Указание: воспользоваться формулой преобразования плотности при невырожденном преобразовании случайных величин. Показать, что мера совместного распределения $\{\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_k)\}$, $k \geq 3$ сосредоточена на некотором линейном подпространстве размерности 2.

Ответ: $p_\xi(x_1, x_2; t_1, t_2) = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\, p_X\!\left(x_1 - \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right) p_Y\!\left(\dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)$ при $t_2 > t_1$.

7. Пусть в примере 1.1.13 случайные величины X_i являются независимыми и гауссовскими с распределением $\mathcal{N}(0; 1)$. Найти $F_\xi(x; t)$.

Указание: определить математическое ожидание и дисперсию процесса.

8. Случайный процесс $\xi(t) = Xt^2 + Yt$, $t > 0$, где X, Y — независимые случайные величины с одинаковым гауссовским распределением $\mathcal{N}(0; 1)$. Найти вероятность того, что траектория монотонно не убывает.

Ответ: $\mathbf{P}\{\xi(t)$ — неубывающая функция$\} = \mathbf{P}\{X \geq 0,\, Y \geq 0\} = 1/4$.

9. В условиях предыдущей задачи найти вероятность события $A = \{\min\limits_{t>0} \xi(t) < 0\}$.

Ответ: $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{X > 0,\, Y < 0\} + \mathbf{P}\{X < 0,\, Y > 0\} = 1/2$.

10. Случайный процесс задан соотношением $\xi(t) = X + \alpha t$, $t > 0$, где $\alpha > 1$ — детерминированная постоянная, а X — случайная величина с непрерывной функцией распределения. Пусть $D \subset [0, \infty)$ — некоторое конечное или счетное подмножество. Найти вероятности событий:

1) $\mathbf{P}\{\xi(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in D\}$;
2) $\mathbf{P}\{\xi(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in [0, 1]\}$.

Ответ: 1) 0; 2) $\mathbf{P}\{-\alpha \leq X \leq 0\}$.

11. Найти ковариационную функцию процесса $\xi(t) = X\cos(t + Y)$, где X, Y независимы, X имеет распределение $\mathcal{N}(0; 1)$, а Y имеет равномерное распределение на $[-\pi, \pi]$.

Ответ: $R_\xi(t,\tau) = \cos(t-\tau)$.

12. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию комплексного случайного процесса $\xi(t) = Ue^{iVt}$, где U, V — независимые случайные величины, $\mathbf{M}\{U\} = 0$, $\mathbf{D}\{U\} = D$, а случайная величина V распределена по закону Коши с плотностью вероятности $p_V(x) = \dfrac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}$, $\alpha > 0$.

Указание: воспользоваться табличным интегралом $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\beta x}{\alpha^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|\beta|}$.

Ответ: $m_\xi(t) = 0, \quad R_\xi(t,\tau) = De^{-\alpha|t-\tau|}$.

1.2. Основные классы случайных процессов

1.2.1. Гауссовские случайные процессы

Определение 1.2.1. *Действительный случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$ называется **гауссовским**, если его характеристическая функция имеет вид*

$$\Psi_\xi(z_1, \ldots, z_k;\, t_1, \ldots, t_k) = \mathbf{M}\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{k} z_j \xi(t_j)\right)\right\} =$$

$$= \exp\left(i\sum_{j=1}^{k} z_j m_\xi(t_j) - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} R_\xi(t_l, t_j) z_l z_j\right), \quad (1.2.1)$$

где $z_1, \ldots, z_k$ — произвольные вещественные числа, $t_1, \ldots, t_k \in T$, а

$$m_\xi(t_j) = \mathbf{M}\{\xi(t_j)\}\,, \qquad R_\xi(t_l, t_j) = \mathbf{cov}\{\xi(t_l), \xi(t_j)\}\,.$$

Если обозначить через $(a,b) = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j b_j$ скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^k$, то характеристическую функцию можно представить в виде

$$\Psi_\xi(z;\, t_1, \ldots, t_k) = \exp\left(i(z, m_\xi) - \frac{1}{2}(R_\xi z, z)\right), \quad (1.2.2)$$

где $z = \{z_1, \ldots, z_k\}^*$, $m_\xi = \{m_\xi(t_1), \ldots, m_\xi(t_k)\}^*$ и $R_\xi = \{R_\xi(t_i, t_j)\}_{i,j=1,\ldots,k}$.

Как уже говорилось ранее, характеристическая функция полностью определяет распределение совокупности случайных величин, и тем самым задано и полное семейство конечномерных распределений.