Теория случайных процессов в примерах и задачах
(Учебное пособие)

Б. М. Миллер, А. Р. Панков
Московский авиационный институт

Москва 1999

Предисловие

Данное учебное пособие предназначено для студентов III-IV курсов факультета прикладной математики и физики, изучающих курс "Теория случайных процессов". Пособие содержит основные теоретические сведения, необходимые для решения экзаменационных задач, а также снабжено примерами, иллюстирирующими теоретический материал и демонстрирующими методы решения типовых задач. Данное пособие расчитано на студентов, которым известны основные сведения из курсов теории вероятностей и функционального анализа, однако, основные понятия аксиоматической теории вероятностей, теории меры и интеграла Лебега изложены в приложении.

Оглавление

Глава 1

Основные понятия теории случайных процессов.

Данный раздел является введением в теорию случайных процессов. В первой части приведены основные определения, иэложены основы аксиоматического подхода к определению понятия случайного процесса и его основных свойств. Современный подход к теории случайных процессов основан на идее задания семейства конечномерных распределений, определяющих конечно-аддитивную меру на естественной алгебре случайных событий в пространстве функций, являющихся реализациями или траекториями случайных процессов. Как было показано А.Н. Колмогоровым при выполнении условий согласованности эта мера допускает продолжение на σ - алгебру подмножеств в этом функциональном пространстве, при этом данная σ - алгебра включает в себя все события, связанные с поведением случайного процесса. В первой части мы стремились показать, как знание семейства конечномерных распределений позволяет решать различные проблемы, связанные с поведением случайного процесса. Однако, для большинства практических задач, знание всего семейства конечномерных распределений является недоступным. Поэтому, если бы решение задач теории случайных процессов всегда требовало знания всего семейства конечномерных распределений, то такая теория имела бы мало шансов быть востребованой практикой. Оказывается, что очень многие модели случайных процессов можно корректно построить и решить множество важных прикладных задач, определив лишь некоторый "механизм" случайности, порождающий случайный процесс, или некоторые его свойства. Поэтому во второй части данного раздела мы кратко описываем основные модели и типы случайных процессов, встречающиеся в научной и инженерной практике, обращая внимание, прежде всего, на порождающий случайный механизм или характерное свойство данного типа случайных процессов. В последующих главах все эти процессы рассматриваются более детально.

1.1 Случайные процессы и их вероятностные характеристики

1.1.1 Определение случайного процесса

Случайный процесс является математической моделью для описания случайных явлений, развивающихся во времени. При этом предполагается, что состояние в текущий момент времени $t \in R$ есть векторная или скалярная случайная величина $\xi(t,\omega)$, или функция, определенная на произведении пространств $R \times \Omega$. Пространство Ω предполагается измеримым, то есть на нем определена σ - алгебра его подмножеств $\mathcal{F}$. Кроме того предполагается, что на измеримом пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ задана вероятностная мера $\mathbf{P}$, то есть для любого множества $A \in \mathcal{F}$ определена его вероятность $\mathbf{P}(A)$. Таким образом задано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ и понятие случайного процесса определяется следующим образом.

Определение 1.1.1 Случайный процесс есть семейство (действительных или комплексных) случайных величин $\{\xi(t,\omega), \quad t \in T\}$, определенных на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, где множество параметров $T \subseteq R$. ∎

Замечание Обычно, когда это не вызывает неясности, зависимость $\xi(t,\omega)$ от ω не указывается и случайный процесс обозначается просто как $\xi(t)$.

О п р е д е л е н и е 1.1.2 Пусть $t_0 \in T$. Случайная величина $\xi_{t_0} = \xi(t_0, \omega)$ называется *сечением* случайного процесса в точке $t_0 \in T$. ■

Мы рассматриваем два типа случайных процессов.

О п р е д е л е н и е 1.1.3 Если переменная t пробегает дискретное множество значений, например, $t \in T = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, то случайный процесс $\xi(t, \omega)$ называется *процессом с дискретным временем или случайной последовательностью*, а если $t \in R^1$ или $t \in [a, b)$, где $b \leq \infty$, то случайный процесс называется *процессом с непрерывным временем или случайной функцией.* ■

О п р е д е л е н и е 1.1.4 Процесс называется *действительным,* если случайные величины $\xi(t, \omega)$ являются действительными для любого $t \in T$, и *комплексным,* если случайные величины $\xi(t, \omega)$ являются комплексными для любого $t \in T$. ■

О п р е д е л е н и е 1.1.5 При фиксированном $\omega_0 \in \Omega$ неслучайная функция $\xi_{\omega_0}(t) = \xi(t, \omega_0), t \in T$ называется *траекторией,* соответствующей элементарному исходу $\omega_0 \in \Omega$. Траектории называются также *реализациями* или *выборочными функциями* случайного процесса. ■

З а м е ч а н и е Случайный процесс можно трактовать как совокупность сечений (см. Определение 1.1.1) или как совокупность ("пучок") траекторий или реализаций (см. Определение 1.1.5). В различных задачах используются оба этих описания.

О п р е д е л е н и е 1.1.6 Случайный процесс с непрерывным временем (случайная функция) $\xi(t)$ называется *регулярным (регулярной),* если его (ее) траектории в каждой точке $t \in T$ непрерывны справа и имеют ограниченные пределы слева. ■

Рассмотрим некоторые примеры, поясняющие введенные определения.

П р и м е р 1.1.1 Пусть случайный процесс $\xi(t, \omega)$ определен следующим образом

$$\xi(t, \omega) = tX(\omega), \quad t \in [0, 1],$$

а $X(\omega) \sim \mathbf{R}\{[0, 1]\}$ - случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$. Описать множество сечений и траекторий случайного процесса $\xi(t)$.

Р е ш е н и е Случайный процесс $\xi(t)$ является случайной функцией. При фиксированном $t_0 \in [0, 1]$ случайная величина $\xi_{t_0}(\omega) = t_0 X(\omega)$, то есть является случайной величиной, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0, t_0]$.

Траектории процесса $\xi(t)$, а именно: неслучайные функции $\xi_{\omega_0}(t) = X(\omega_0)t$ - есть прямые линии, выходящие из точки $(0, 0)$ с тангенсом угла наклона, равным $X(\omega_0)$. ■

П р и м е р 1.1.2 Пусть $t \in [0, \infty)$, а случайная функция $\xi(t)$ задана следующим образом:

$$\xi(t) = U_n, \quad \text{при} \quad t \in [n, n + 1), n = 0, 1, 2, ...$$

где $\{U_n, n = 0, 1, 2...\}$ - последовательность ограниченных случайных величин. Описать траектории случайного процесса $\xi(t)$. Является ли этот процесс регулярным?

Р е ш е н и е Траектории процесса $\xi(t)$ - есть кусочно-постоянные функции, испытывающие разрывы в точках $t = n$. По определению эти функции непрерывны справа и имеют пределы слева, равные $\lim\limits_{t \uparrow n} \xi(t) = U_{n-1}$. Поскольку $\mathbf{P}\{|U_{n-1}| < \infty\} = 1$, то этот случайный процесс является регулярным. ■

1.1.2 Конечномерные распределения случайного процесса

О п р е д е л е н и е 1.1.7 Пусть $\{\xi(t,\omega),\ t\in T\}$ - действительный случайный процесс и задано некоторое произвольное множество значений $\{t_1,t_2,...,t_n\}\subset T$.

Соответствующая совокупность случайных величин $\xi(t_1),...,\xi(t_n)$ имеет совместную n - мерную функцию распределения

$$F_\xi(x_1,...,x_n;\,t_1,...,t_n)=\mathbf{P}\{\xi(t_1)\le x_1,...,\xi(t_n)\le x_n\}. \tag{1.1.1}$$

Совокупность таких совместных функций распределения для различных $n=1,2,...$ и всех возможных значений $t_i\in T$ называется *семейством конечномерных распределений случайного процесса* ξ. ■

Функция $F_\xi(x_1,...,x_n;\,t_1,...,t_n)$ является функцией распределения некоторой меры $F_{t_1,...,t_n}(dx_1,...,dx_n)$ в пространстве R^n.

О п р е д е л е н и е 1.1.8 Если функция F допускает представление

$$F_\xi(x_1,...,x_n;\,t_1,t_2,...,t_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}...\int\limits_{-\infty}^{x_n}p_\xi(u_1,...,u_n;\,t_1,...,t_n)du_1...du_n,$$

с некоторой измеримой по Лебегу неотрицательной функцией $p_\xi(x_1,x_2,...,x_n;\,t_1,t_2,...,t_n)$ такой, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(u_1,...,u_n;\,t_1,...,t_n)du_1...du_n=1,$$

то говорят, что совместная функция распределения имеет плотность.

Функция $p_\xi(x_1,x_2,...,x_n;\,t_1,t_2,...,t_n)$ называется *плотностью распределения.* ■

Следующие примеры демонстрируют нахождение совместных функций распределения.

П р и м е р 1.1.3 Пусть случайный процесс задан соотношением $\xi(t)=U,\quad \forall t\in T$, где U - некоторая случайная величина с функцией распределения $F_U(x)$. Найти семейство конечномерных распределений процесса ξ. Имеет ли совместная функция распределения плотность?

Р е ш е н и е В соответствии с Определением 1.1.7 имеем

$$\begin{aligned}&F_\xi(x_1,...,x_n;\,t_1,...,t_n)=\mathbf{P}\{\xi(t_1)\le x_1,...,\xi(t_n)\le x_n\}=\\&\mathbf{P}\{U\le x_1,...,U\le x_n\}=\mathbf{P}\{U\le\min(x_1,...,x_n)\}=F_U(\min(x_1,...,x_n)).\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Если функция распределения $F_U(x)$ имеет плотность $p_U(x)$, то существует и плотность одномерного распределения случайного процесса $\xi(t)$, поскольку

$$F_\xi(x;\,t)=\mathbf{P}\{\xi(t)\le x\}=\mathbf{P}\{U\le x\}=F_U(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p_U(y)dy.$$

Однако при $n\ge 2$ совместная функция распределения не имеет плотности. Действительно, в силу определения процесса $\xi(t)$ для любых $t_1,...,t_n$ имеет место соотношение

$$\xi(t_1)=\xi(t_2)=...=\xi(t_n),$$

поэтому мера $F_{t_1,...,t_n}(dx_1,...,dx_n)$ в пространстве R^n, соответствующая функции распределения (1.1.2) сосредоточена на множестве $S=\{x\in R^n:\ x_1=x_2=...=x_n\}$, представляющем собой прямую линию. Поскольку Лебегова мера множества S равна нулю, то мера $F_{t_1,...,t_n}(dx_1,...,dx_n)$ сингулярна по отношению к мере Лебега, и следовательно, ее плотность не существует.

З а м е ч а н и е Более точно можно утверждать, что плотность распределения равна нулю почти всюду в R^n и равна бесконечности на прямой S. Если интеграл в определении 1.1.8 понимать в смысле интеграла от обобщенной функции, то можно говорить, что в этом случае плотность есть обобщенная функция.

■

П р и м е р 1.1.4 Пусть случайный процесс задан соотношением $\xi(t) = \varphi(t)U, \quad t \in [0,1]$, где U - некоторая случайная величина с функцией распределения $F_U(x)$, а $\varphi(t) > 0$. Найти семейство конечномерных распределений процесса ξ. Имеет ли совместная функция распределения плотность?

Р е ш е н и е В соответствии с Определением 1.1.7 имеем

$$F_\xi(x_1,...,x_n;\, t_1,...,t_n) = \mathbf{P}\{\xi(t_1) \le x_1,...,\xi(t_n) \le x_n\} =$$

$$\mathbf{P}\left\{\varphi(t_1)U \le x_1,...,\varphi(t_n)U \le x_n\right\} = \mathbf{P}\left\{U \le \frac{x_1}{\varphi(t_1)},...,U \le \frac{x_n}{\varphi(t_n)}\right\} = \tag{1.1.3}$$

$$\mathbf{P}\left\{U \le \min\left(\frac{x_1}{\varphi(t_1)},...,\frac{x_n}{\varphi(t_n)}\right)\right\} = F_U\left(\min\left(\frac{x_1}{\varphi(t_1)},...,\frac{x_n}{\varphi(t_n)}\right)\right).$$

Если функция распределения $F_U(x)$ имеет плотность $p_U(x)$, то существует и плотность одномерного распределения случайного процесса $\xi(t)$, поскольку

$$F_\xi(x;\, t) = \mathbf{P}\{\xi(t) \le x\} = \mathbf{P}\{\varphi(t)U \le x\} = F_U\left(\frac{x}{\varphi(t)}\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{\frac{x}{\varphi(t)}} p_U(y)dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\varphi(t)} p_U\left(\frac{z}{\varphi(t)}\right) dz.$$

Однако при $n \ge 2$ совместная функция распределения не имеет плотности. Действительно, в силу определения процесса $\xi(t)$ для любых $t_1,...,t_n$ имеет место соотношение

$$\xi(t_1)\varphi(t_1) = \xi(t_2)\varphi(t_2) = ... = \xi(t_n)\varphi(t_n),$$

поэтому мера $F_{t_1,...,t_n}(dx_1,...,dx_n)$ в пространстве R^n, соответствующая функции распределения (1.1.3) сосредоточена на прямой линии $S = \{x \in R^n : x_1\varphi(t_1) = x_2\varphi(t_2) = ... = x_n(t_n)\}$. Поскольку Лебегова мера множества S равна нулю, то мера $F_{t_1,...,t_n}(dx_1,...,dx_n)$ сингулярна по отношению к мере Лебега, и следовательно, как и в предыдущем примере, плотность не существует. ■

П р и м е р 1.1.5 Пусть X и Y независимые случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, с функциями распределения

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X \le x\}, \quad F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y \le y\}.$$

Пусть $\{\xi(t),\, t \ge 0\}$ - случайный процесс, определенный соотношением,

$$\xi(t) = Xt + Y.$$

Описать траектории данного процесса, найти семейство совместных функций распределения.

Р е ш е н и е Выборочные функции этого процесса представляют собой прямые линии со случайным наклоном и случайным начальным условием при $t = 0$. Конечномерные распределения процесса $\xi(t)$ имеют вид

$$F_\xi(x_1;\, t_1) = \mathbf{P}\{Xt_1 + Y \le x_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left\{X \le \frac{x_1 - y}{t_1}\right\} dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X\left(\frac{x_1 - y}{t_1}\right) dF_Y(y),$$

$$F_\xi(x_1,...,x_n;\, t_1,...,t_n) = \mathbf{P}\{Xt_1 + Y \le x_1,...,Xt_n + Y \le x_n\} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left\{X \le \frac{x_1 - y}{t_1},...,X \le \frac{x_n - y}{t_n}\right\} dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X\left(\min_{1 \le i \le n} \frac{x_i - y}{t_i}\right) dF_Y(y).$$

■

П р и м е р 1.1.6 Пусть X, Y - независимые гауссовские случайные величины, $\mathbf{M}\{X\} = \mathbf{M}\{Y\} = 0, \quad \mathbf{D}\{X\} = \mathbf{D}\{Y\} = 1/2$. Случайный процесс определен соотношением $\xi(t) = \dfrac{X+Y}{t}, \quad t > 0$. Построить одномерную функцию распределения.

Р е ш е н и е По определению одномерная функция распределения равна

$$F_\xi(x_1; t_1) = \mathbf{P}\{\xi(t_1) \le x_1\} = \mathbf{P}\left\{\frac{X+Y}{t_1} \le x_1\right\}.$$

Случайная величина $\xi(t_1)$ - гауссовская с параметрами

$$\mathbf{M}\{\xi(t_1)\} = 0, \quad \mathbf{D}\{\xi(t_1)\} = \frac{1}{t_1},$$

поэтому

$$F_\xi(x_1; t_1) = \frac{t_1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x_1} e^{-\dfrac{u^2 t_1^2}{2}} du.$$

■

Рассмотренные примеры относятся к случайным функциям. Приведем примеры нахождения законов распределения случайных последовательностей.

П р и м е р 1.1.7 Пусть случайная последовательность $\{\xi(n), \quad n = 1, 2, ...\}$ такова, что случайные величины $\xi(n)$ и $\xi(m)$ независимы при $n \ne m$ и имеют одинаковую функцию распределения $\mathbf{P}\{\xi(n) \le x\} = F(x)$. Найти семейство конечномерных распределений.

Р е ш е н и е По определению n - мерного конечномерного распределения и в силу независимости случайных величин $\xi(n)$ имеем

$$F_\xi(x_1, ..., x_k; n_1, ..., n_k) = \mathbf{P}\{\xi(n_1) \le x_1, ..., \xi(n_k) \le x_k\} = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}\{\xi(n_i) \le x_i\} = \prod_{i=1}^{k} F(x_i).$$

■

П р и м е р 1.1.8 Случайная последовательность $\xi(n), \quad n = 0, 1, 2, ...$ определена рекуррентным соотношением

$$\xi(n) = \alpha\xi(n) + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, ..; \quad \xi(0) = 0,$$

где $\{\varepsilon_n\}$ - последовательность независимых в совокупности гауссовских случайных величин с параметрами $\mathbf{M}\{\varepsilon_n\} = 0, \quad \mathbf{D}\{\varepsilon_n\} = \sigma^2 > 0$. Найти одномерную функцию распределения случайной последовательности ξ.

Р е ш е н и е Случайная величина $\xi(n)$ равна

$$\xi(n) = \varepsilon_1\alpha^{n-1} + ... + \varepsilon_{n-1}\alpha + \varepsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha^{n-k}.$$

В силу гауссовости и независимости случайных величин ε_k случайная величина $\xi(n)$ - гауссовская с параметрами

$$\mathbf{M}\{\xi(n)\} = 0, \quad \mathbf{D}\{\xi(n)\} = D_\xi(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{\varepsilon_k\}\alpha^{2(n-k)} = \begin{cases} \sigma^2 \dfrac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1} & \text{если} \quad \alpha^2 \ne 1, \\ \sigma^2 n \quad \text{если} \quad \alpha^2 = 1. \end{cases}$$

Одномерная функция распределения равна

$$F_\xi(x, n) = \mathbf{P}\{\xi(n) \le x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\xi(n)}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{u^2}{2D_\xi(n)}} du.$$

■

З а м е ч а н и е Случайная последовательность, описанная в Примере 1.1.7 называется *дискретным белым шумом.* В дальнейшем эта модель будет часто использоваться для построения более сложных случайных последовательностей. В Примере 1.1.8 последовательность $\{\varepsilon_n\}$ является *дискретным гауссовским белым шумом.*

1.1.3 Теорема Колмогорова.

Семейство конечномерных распределений является основной характеристикой случайного процесса, полностью определяющей его свойства. Мы будем говорить, что случайный процесс задан, если задано его семейство конечномерных распределений (1.1.1.)

Функции $F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$ удовлетворяют следующему набору условий:

1. $0 \le F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) \le 1$; (условие нормировки)

2. функции $F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$ непрерывны справа по переменным x_i;

3. $$F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) \to 0,$$

   если хотя бы одна из переменных $x_i \to -\infty$, и

   $$F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) \to 1,$$

   если все переменные $x_i \to \infty$;

4. функции $F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$ монотонны в следующем смысле: определим оператор Δ_i взятия конечной разности по переменной x_i как

   $$\Delta_i F = F(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, ..., x_n) - F(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n), \quad h_i > 0,$$

   тогда для любого набора $h_i \ge 0$,

   $$\Delta_1 \Delta_2 ... \Delta_n F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) \ge 0;$$

5. для любой перестановки $\{k_1, ..., k_n\}$ индексов $\{1, ..., n\}$

   $$F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = F_\xi(x_{k_1}, ..., x_{k_n}; t_{k_1}, ..., t_{k_n});$$

6. для любых $1 \le k < n$ и $x_1, ..., x_k \in R$

   $$F_\xi(x_1, ..., x_k; t_1, ..., t_k) = F_\xi(x_1, ..., x_k, \infty, ..., \infty; t_1, ..., t_n).$$

О п р е д е л е н и е 1.1.9 Условия (5), (6) называются *условиями согласованности.* ■

П р и м е р 1.1.9 Доказать справедливость условий согласованности.

Р е ш е н и е Все свойства (1)-(6) непосредственно следуют из свойств вероятности. Действительно, свойство 1) - есть условие нормировки. Свойства 2) - 3) немедленно следуют из свойства непрерывности вероятности. Условие 4) - есть условие неотрицательности вероятности, поскольку

$$\Delta_1 \Delta_2 ... \Delta_n F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} \{\xi(t_i) \in (x_i, x_i + h_i]\}\right\} \ge 0;$$

наконец, свойства 5) - 6) являются свойствами совместной функции распределения случайных величин $\{\xi(t_1), ..., \xi(t_n)\}$. Полное доказательство предлагается выполнить самостоятельно (см. Задачу 1.1.1). ■

Предположим, что для любого $n \geq 1$ и любого произвольного набора $t_1, ..., t_n \in T$, заданы функции n переменных $F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$, удовлетворяющие условиям (1)-(6). Является ли это семейство функций семейством конечномерных распределений некоторого случайного процесса? Чтобы положительно ответить на этот вопрос необходимо построить пространство элементарных исходов Ω, задать на нем некоторую $\sigma-$ алгебру $\mathcal{F}$ подмножеств и вероятность $\mathbf{P}$. И наконец, построить семейство функций $\xi(t, \omega)$, определенных на $T \times \Omega$ так, чтобы семейство конечномерных распределений процесса $\xi(t, \omega)$ совпало с семейством функций F_ξ. Оказывается, что данная процедура осуществима всегда. Этот основополагающий результат теории случайных процессов известен как *Теорема Колмогорова.*

Т е о р е м а 1.1.1 *Пусть задано некоторое семейство конечномерных функций распределения*

$$F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n), \quad t_1, ..., t_n \in T, \quad x_1, ..., x_n \in R, \quad 1 \leq n < \infty,$$

удовлетворяющих условиям (1)-(6). Тогда существует вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ *и случайный процесс* $\{\xi(t),\, t \in T\}$ *такие, что семейство конечномерных распределений* ξ *совпадает с* F_ξ.

З а м е ч а н и е Теорема Колмогорова вместе с установленными выше свойствами семейства конечномерных распределений показывает, что условия (1)-(6) являются необходимыми и достаточными для существования процесса с заданными конечномерными распределениями F_ξ.

П р и м е р 1.1.10 Пусть задано семейство случайных величин $\xi(t), \quad t \in T$, со следующими характеристиками

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\} = 0, \quad \mathbf{cov}\{\xi(t)\xi(\tau)\} = R_\xi(t, \tau).$$

При каких условиях существует гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с такими характеристиками?

Р е ш е н и е Рассмотрим произвольную совокупность $\{t_1, ..., t_n\} \in T$ и семейство случайных величин $\{\xi(t_1), ..., \xi(t_n)\}$, совместное распределение которых должно быть гауссовским. Образуем из случайных величин $\xi(t_i)$, $i = 1, ..., n$ вектор $\overline{\xi}$. Ковариационная матрица вектора $\overline{\xi}$ равна

$$K_\xi = ||R_\xi(t_i, t_j)||_{i=1,...n,\, j=1,...,n}.$$

Для существования гауссовского вектора необходимо и достаточно, чтобы ковариационная матрица вектора $\overline{\xi}$, образованного из случайных величин $\xi(t_i), i = 1, ..., n$ была неотрицательно определенной. Действительно, для любого набора комплексных чисел $\{z_1, ..., z_n\}$ выполняется неравенство

$$\mathbf{M}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \xi(t_i) z_i\right|^2\right\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{cov}\{\xi(t_i), \xi(t_j)\} z_i \overline{z}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_\xi(t_i, t_j) z_i \overline{z}_j \geq 0,$$

поэтому функция $R_\xi(t, \tau)$ должна удовлетворять условию *неотрицательной определенности,*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_\xi(t_i, t_j) z_i \overline{z}_j \geq 0, \quad \forall\{t_1, ..., t_n\} \in T, \quad \{z_1, ..., \zeta_n\}, \quad n \geq 1, \tag{1.1.4}$$

которое совпадает с условием неотрицательной определенности матрицы K_ξ. С другой стороны условие (1.1.4) является достаточным для существования гауссовского вектора с ковариационной матрицей $K_\xi = ||R_\xi(t_i, t_j)||_{i=1,...,n; j=1,...,n}$, функция распределения которого $F_\xi(x_1, ..., x_n)$ совпадает с конечномерным рспределением $F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$. Действительно, если $K_\xi \geq 0$, то существует невырожденное линейное преобразование M, приводящее K_ξ к диагональному виду, то есть

$$M^* K_\xi M = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0\},$$

где $\lambda_i > 0$, а $r = rank K_\xi$. Если исходное вероятностное пространство "достаточно богато", то есть на нем определено r независимых гауссовских векторов $\eta_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $i = 1, ..., r$ с нулевым средним и единичной дисперсией, то можно определить гауссовский вектор

$$\eta = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2}\eta_1 \\ \lambda_2^{1/2}\eta_2 \\ \ldots\ldots \\ \lambda_r^{1/2}\eta_r \\ 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{cov}\{\eta, \eta^*\} = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0\} = M^* K_\xi M.$$

Вектор ξ можно определить тогда соотношением $\xi = M^{-1}\eta$, действительно, при этом вектор ξ - гауссовский, а его ковариация равна $\mathbf{cov}\{\xi, \xi^*\} = (M^{-1})^* M^* K_\xi M M^{-1} = K_\xi$. Функция распределения гауссовского вектора ξ естественным образом удовлетворяет условиям согласованности (1)-(6). Таким образом условиям согласованности удовлетворяет и семество конечномерных распределений и по теореме Колмогорова это означает существование случайного процесса, все конечномерные распределения которого являются гауссовским. Следовательно, для существования процесса с гауссовскими конечномерными распределениями необходимо и достаточно выполнения условия неотрицательной определенности (1.1.4) ковариационной функции. ■

З а м е ч а н и е Процесс, рассмотренный выше в примере 1.1.10 называется *гауссовским случайным процессом.* Свойства таких процессов рассматриваются в следующем разделе.

Семейство конечномерных распределений определяет случайный процесс лишь с некоторой точностью. Ниже мы рассматриваем различные способы определения эквивалентности случайных процессов.

Пусть $\{X(t), \quad t \in T\}$ и $\{Y(t), \quad t \in T\}$ два случайных процесса, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, и принимающие значения в одном и том же измеримом пространстве, например, $\{R, \mathcal{B}(R)\}$, где $\mathcal{B}(R)$ - $\sigma-$ алгебра борелевских подмножеств R.

О п р е д е л е н и е 1.1.10 Процессы $\{X(t), \quad t \in T\}$ и $\{Y(t), \quad t \in T\}$ называются *стохастически эквивалентными в широком смысле* если: для любых

$$n = 1, 2, ..., \quad \{t_1, t_2, ..., t_n\} \in T, \quad \{B_1, B_2, ..., B_n\} \in \mathcal{B}(R)$$

выполняется равенство

$$\mathbf{P}\{X(t_1) \in B_1, ..., X(t_n) \in B_n\} = \mathbf{P}\{Y(t_1) \in B_1, ..., Y(t_n) \in B_n\}. \tag{1.1.5}$$

■

З а м е ч а н и е Условие эквивалентности в широком смысле означает, что семейства конечномерных распределений процессов X и Y совпадают.

О п р е д е л е н и е 1.1.11 Если для любого $t \in T$

$$\mathbf{P}\{X(t) = Y(t)\} = 1, \tag{1.1.6}$$

то процессы называются *стохастически эквивалентными* или просто *эквивалентными* ■

Выполнение равенства (1.1.6) влечет за собой выполнение (1.1.5).

Т е о р е м а 1.1.2 *Эквивалентные процессы всегда эквивалентны в широком смысле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о В силу эквивалентности процессов X и Y $\mathbf{P}\{X(t) \neq Y(t)\} = 1, \forall t \in T$, поэтому для любого $t \in T$ множества $\{X(t) \leq x\}$ и $\{Y(t) \leq x\}$ различаются лишь на множество нулевой вероятности. Действительно, симметрическая разность этих множеств удовлетворяет включению

$$\{X(t) \leq x\} \otimes \{Y(t) \leq x\} = (X(t) \leq x) \bigcap (Y(t) > x) \bigcup (Y(t) \leq x) \bigcap (X(t) > x) \subseteq \{X(t) \neq Y(t)\},$$

и множество в правой части имеет нулевую вероятность. Далее

$$\{X(t_1) \le x_1, ..., X(t_n) \le x_n\} \otimes \{Y(t_1) \le x_1, ..., Y(t_n) \le x_n)\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{X(t_i) \ne Y(t_i)\},$$

следовательно,

$$\mathbf{P}\{(X(t_1) \le x_1, ..., X(t_n) \le x_n) \otimes (Y(t_1) \le x_1, ..., Y(t_n) \le x_n)\} = 0,$$

и значит,

$$\mathbf{P}\{X(t_1) \le x_1, ..., X(t_n) \le x_n\} = \mathbf{P}\{Y(t_1) \le x_1, ..., Y(t_n) \le x_n\},$$

так как множества под знаком вероятности отличаются лишь на множество нулевой меры. Отсюда следует выполнение равенства (1.1.5) на любых множествах $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$, образованных конечными объединениями и пересечениями интервалов, а затем в силу Теоремы Каратеодори о единственности продолжения меры и на любых множествах из σ - алгебры $\mathcal{B}(R)$. ■

О п р е д е л е н и е 1.1.12 Если процесс $\eta(t)$ эквивалентен процессу $\xi(t)$, то $\eta(t)$ называется *версией или модификацией* процесса $\xi(t)$. ■

Поведение двух версий одного процесса может быть совершенно различным. Следующий пример показывает, что два эквивалентных процесса могут иметь совершенно различные траектории.

П р и м е р 1.1.11 Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} - \sigma$ - алгебра борелевских подмножеств $[0,1]$, $\mathbf{P}$ - мера Лебега, и $T = [0,1]$. Рассмотрим два процесса $\{X(t), \quad t \in T\}$ и $\{Y(t), \quad t \in T\}$ на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, определенные следующим образом:

$$X(t,\omega) = 0 \quad \text{для всех} \quad (t,\omega) \in T \times \Omega,$$

$$Y(t,\omega) = 0 \quad \text{для всех} \quad (t,\omega) \in T \times \Omega, \quad \text{кроме} \quad t = \omega, \quad \text{где} \quad Y(\omega,\omega) = 1.$$

Показать, что процессы являются эквивалентными, однако их траектории отличаются ($\mathbf{P}$- п.н.).

Р е ш е н и е Для некоторого фиксированного $t \in T$

$$\{\omega : X(t,\omega) \ne Y(t,\omega)\} = \{\omega : \omega = t\} = \{t\}.$$

Поскольку мера Лебега точки t равна нулю, то

$$\mathbf{P}\{X(t) = Y(t)\} = 1, \quad \text{для любого} \quad t \in T,$$

и следовательно процессы стохастически эквивалентны. Однако, их траектории различны, поскольку $\max_{t \in T} X(t) = 0$, а $\max_{t \in T} Y(t) = 1$, поэтому

$$\mathbf{P}\{\omega : X(t,\omega) = X(t,\omega) \quad \forall t \in T\} = 0.$$

■

Следующее определение дает наиболее сильный тип эквивалентности.

О п р е д е л е н и е 1.1.13 Процессы $\{X(t), \quad t \in T\}$ и $\{Y(t), \quad t \in T\}$ называются *неотличимыми* если

$$\mathbf{P}\{X(t) = Y(t), \quad \forall t \in T\} = 1. \tag{1.1.7}$$

■

При некоторых условиях, однако, определения 1.1.11 и 1.1.13 эквивалентны. Это справедливо, например, если множество T не более чем счетно.

Т е о р е м а 1.1.3 *Пусть множество T не более, чем счетно. Тогда два эквивалентных процесса неотличимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Пусть $X(t), Y(t), \quad t \in T$ два эквивалентных процесса. Тогда

$$\mathbf{P}\{X(t) \neq Y(t), \quad \text{хотя бы для одного} \quad t \in T\} =$$

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{t\in T}\{X(t) \neq Y(t)\}\right\} \leq \sum_{t\in T}\mathbf{P}\{X(t) \neq Y(t)\} = 0.$$

■

Таким образом для случайных процессов с дискретным временем (случайных последовательностей) стохастическая эквивалентность равносильна неотличимости. Для процессов с непрерывным временем требуются некоторые дополнительные свойства, ограничивающие множество возможных траекторий.

Т е о р е м а 1.1.4 *Пусть $\{X(t), \quad t \in T\}$ и $\{Y(t), \quad t \in T\}$ два стохастически эквивалентных процесса, удовлетворяющие условию регулярности (см. Определение 1.1.6). Тогда эти процессы неотличимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Зададим некоторое счетное всюду плотное подмножество множества T. Обозначим это множество D_T. В силу Теоремы 1.1.3 процессы $X(t)$ и $Y(t)$ неотличимы на множестве D_T, то есть множество $D = \bigcup\limits_{t\in D_T}\{X(t) \neq Y(t)\}$ имеет меру нуль. В силу регулярности процессов $X(t), Y(t)$ их траектории непрерывны справа, поэтому для любого $t \in T$

$$X(t) = \lim_{\substack{\tau \in D_T, \\ \tau \downarrow t}} X(\tau), \quad Y(t) = \lim_{\substack{\tau \in D_T, \\ \tau \downarrow t}} Y(\tau) = Y(t).$$

Далее для любого $t \in T$

$$\{X(t) \neq Y(t)\} = \{\omega : \varlimsup_{\substack{\tau \in D_T, \\ \tau \downarrow t}} |X(\tau) - Y(\tau)| > 0\} \subseteq$$

$$\{\omega : \sup_{\tau\in D_T} |X(\tau) - Y(\tau)| > 0\} \subseteq \bigcup_{\tau\in D_T}\{|X(\tau) - Y(\tau)| > 0\} = D.$$

Следовательно,

$$\{X(t) \neq Y(t) \quad \text{хотя бы для одного} \quad t \in T\} = \bigcup_{t\in T}\{X(t) \neq Y(t)\} \subseteq D$$

и имеет меру нуль. ■

З а м е ч а н и е Задание совокупности конечномерных распределений в общем случае не позволяет заранее обеспечить выполнение некоторых требований относительно поведения траекторий случайных функций (например: непрерывность, монотонность, дифференцируемость и т.д.). Действительно, пусть Ω - есть множество всех действительных функций $x(t)$ параметра $t \in T$, со значениями в R. Определим $\mathcal{F}$ - алгебру подмножеств Ω, как минимальную σ - алгебру, содержащую все подмножества вида

$$\{x(\cdot) : x(t_1) \in B_1, ..., x(t_n) \in B_n\}, \tag{1.1.8}$$

где $\{t_1, ..., t_n\} \in T$, а $B_i, i = 1, ..., n$ - произвольные Борелевские подмножества действительной прямой. Эта σ - алгебра называется σ - *алгеброй цилидрических множеств.* Положим $\omega = x(\cdot)$ и определим случайный процесс $\xi(t, \omega)$ соотношением

$$\xi(t, \omega) = x(t).$$

Если задано семейство конечномерных распределений, то тем самым каждому множеству вида (1.1.8) может быть приписана некоторая вероятность. Однако, множество Ω является слишком "широким", а σ - алгебра $\mathcal{F}$ слишком "узкой", так как весьма важные подмножества Ω могут не принадлежать ей, и поэтому им нельзя приписать никакие вероятности. Другими словами, множество Ω содержит слишком много подмножеств, не являющихся *событиями* в вероятностном понимании. Например, множество всех непрерывных функций на T, вообше говоря, не есть событие, поскольку является объедиинением несчетного множества событий, состоящих в том, что функция непрерывна в фиксированной точке интервала, и поэтому, может не принадлежать σ - алгебре $\mathcal{F}$. Другим примером подмножества, возможно не принадлежащего $\mathcal{F}$, является

$$\left\{\omega : \sup_{t\in T} \xi(t,\omega) \leq x\right\} = \bigcap_{t\in T} \left\{\xi(t,\omega) \leq x\right\}.$$

Фактически любое подмножество, которое не является пересечением или объединением счетного множества событий вида (1.1.8) может не принадлежать σ - алгебре $\mathcal{F}$, то есть не являться событием.

Таким образом при построении вероятностного пространства и σ - алгебры событий на нем, должна быть обеспечена определенная согласованность. Следующий пример показывает какого рода проблемы могут возникнуть на этом пути.

П р и м е р 1.1.12 Пусть $T = [0,1]$, а $\Omega = C[0,1]$ - пространство непрерывных функций на T. Пространство элементарных исходов состоит таким образом из непрерывных функций $\omega(\cdot) \in C[0,1]$, и случайный процесс можно задать соотношением

$$\xi(t,\omega) = \omega(t).$$

Зададим семейство конечномерных распределений соотношениями

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_k) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_k} g(u)du,$$

где $g(u) > 0$, $u \in R^1$ - симметрическая плотность распределения вероятности. Легко видеть, что данное семейство конечномерных распределений удовлетворяет условиям (1)-(6), и следовательно, по теореме Колмогорова существует случайный процесс с данным семейством распределений. Однако, пространство $\Omega = C[0,1]$ является слишком "бедным", чтобы на нем можно было бы определить такой процесс. Чтобы убедиться в этом, мы покажем, что траектории процесса $X(t,\omega)$, имеющего данное семейство конечномерных распределений, не могут быть непрерывными.

Действительно, выберем некоторое $\varepsilon > 0$, и рассмотрим событие

$$A_n = \left\{X(t,\omega) \geq \varepsilon, X\left(t - \frac{1}{n}\right) \leq -\varepsilon\right\},$$

имеющее вероятность

$$\mathbf{P}\{A_n\} = \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} g(u)du\right)^2 = C > 0.$$

Траектории процесса $X(t,\omega)$ должны быть непрерывными с вероятностью 1, поэтому

$$\lim_n X\left(t - \frac{1}{n}\right) = X(t), \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

Это влечет за собой сходимость случайных величин $X\left(t - \frac{1}{n}\right)$ к $X(t)$ по вероятности, то есть выполнение равенства

$$\lim_n \mathbf{P}\left\{|X(t,\omega) - X\left(t - \frac{1}{n},\omega\right)| > 2\varepsilon\right\} = 0.$$

Однако, событие $A_n \subseteq \left\{\left|X(t,\omega) - X\left(t - \frac{1}{n},\omega\right)\right| > 2\varepsilon\right\}$, и поэтому

$$\lim_n \mathbf{P}\left\{\left|X(t,\omega) - X\left(t - \frac{1}{n},\omega\right)\right| > 2\varepsilon\right\} \geq \lim_n \mathbf{P}(A_n) = C > 0.$$

Таким образом, предположив непрерывность траекторий, мы приходим к противоречию.

Более того, даже расширив пространство Ω до пространства функций непрерывных справа и имеющих пределы слева, мы все равно придем к противоречию. Не спасает ситуацию и расширение пространства до пространства измеримых функций.

З а м е ч а н и е Эта проблема связана с необходимостью определения вероятностей событий, которые не определяются как счетное пересечение или объединение событий (1.1.8). Часто, если процесс регулярен или задан конструктивно некоторым соотношением, то мы легко определяем вероятности достаточно сложных событий. В случае процессов дискретного времени эта проблема не возникает вообще, поскольку любые события принадлежат естественной σ - алгебре, образованной событиями вида (1.1.8).

П р и м е р 1.1.13 Случайный процесс задан соотношением $\xi(t) = X^2 + 2Yt + t^2, \quad t > 0$, где X, Y - независимые гауссовские случайные величины с параметрами $\mathbf{M}\{X\} = \mathbf{M}\{Y\} = 0, \quad \mathbf{D}\{X\} = \mathbf{D}\{Y\} = 1$. Найти вероятности следующих событий:

1. $\mathcal{A}_1 = \{$Случайный процесс $\quad \xi(t), \quad t \in T \quad$ является монотонным$\}$.
2. $\mathcal{A}_2 = \{$Случайный процесс $\quad \xi(t), \quad t \in T \quad$ является неотрицательным$\}$.
3. $\mathcal{A}_3 = \{\xi(t) = 0, \quad$ хотя бы для одного $\quad t \in D\}$. где $D \subset [0, \infty)$ - некоторое конечное или счетное подмножество.
4. $\mathcal{A}_4 = \{\xi(t) = 0, \quad$ хотя бы для одного $\quad t \in [0, \infty)\}$.

Р е ш е н и е 1. Поскольку траектории процесса ξ дифференцируемы, то условие монотонности есть $\xi^{'}(t) = 2Y + 2t \geq 0, \forall t \geq 0$. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы константа Y была неотрицательной. Таким образом, $\mathbf{P}\{\mathcal{A}_1\} = \mathbf{P}\{Y \geq 0\} = 1/2$.

2. Условие неотрицательности процесса $\xi(t), \forall t \geq 0$ выполняется, если: либо $Y > 0$; либо $Y \leq 0, \quad$ но $\quad |X| \leq |Y|$.

   Таким образом в силу независимости X, Y и симметрии законов распределения получаем

$$\mathbf{P}\{\mathcal{A}_2\} = \mathbf{P}\{Y \geq 0\} + \mathbf{P}\{Y \leq 0, |Y| \leq |X|\} = 1/2 + 1/4 = 3/4.$$

3.
$$\mathbf{P}\{\mathcal{A}_3\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{t \in D} \{\xi(t) = 0\}\right\} \leq \sum_{t \in D} \mathbf{P}\{\xi(t) = 0\}.$$

   Для любого фиксированного t событие

$$\{\omega : \xi(t) = 0\} = \{(X, Y) : X^2 + 2Yt + t^2 = 0\}.$$

   Совместное распределение (X, Y) имеет плотность, а множество точек (x, y), удовлетворяющих соотношению $x^2 + 2yt + t^2 = 0$ есть парабола и имеет нулевую меру Лебега в R^2, поэтому

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi(t) = 0\} = \mathbf{P}\{(X, Y) : X^2 + 2Yt + t^2 = 0\} =$$

$$\int_{\{(x,y):\, x^2 + 2yt + t^2 = 0\}} p_{XY}(x, y) dx dy = 0.$$

   Далее, поскольку множество D не более, чем счетно, то $\mathbf{P}\{\mathcal{A}_3\} = 0$.

4. Событие $\mathcal{A}_4$ состоит в том, что функция $\xi(t)$ имеет на $[0, \infty)$ по крайней мере один корень, что выполнеяется если $Y \leq 0$ и $|Y| \geq |X|$. Поэтому $\mathbf{P}\{\mathcal{A}_4\} = \mathbf{P}\{Y \leq 0, |Y| \geq |X|\} = 1/4$.

■

1.1.4 Моментные характеристики случайного процесса.

Моментные характеристики случайного процесса задают его простейшие свойства и также, как и для случайных величин вычисляются с помощью конечномерных распределений различных порядков. Пусть $\xi(t)$ - действительный скалярный процесс.

О п р е д е л е н и е 1.1.14 Детерминированная функция, $m_\xi(t), \quad t \in T$, определяемая соотношением

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\{\xi(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x;t)$$

называется *математическим ожиданием процесса* ξ. Если математическое ожидание существует (соответствующий интеграл определен) при любом $t \in T$, то процесс называется *интегрируемым.* ■

О п р е д е л е н и е 1.1.15 Детерминированная функция, $D_\xi(t), \quad t \in T$, определяемая соотношением

$$D_\xi(t) = \mathbf{D}\{\xi(t)\} = \mathbf{M}\{(\xi(t) - m_\xi(t))^2\} = \mathbf{M}\{\xi(t))^2\} - m_\xi^2(t) =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_\xi(x;t) - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x;t)\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_\xi(x;t) - m_\xi^2(t)$$

называется *дисперсией процесса* ξ. Если дисперсия процесса конечна при любом $t \in T$, то процесс называется *квадратично интегрируемым.* ■

З а м е ч а н и е Математическое ожидание и дисперсия процесса $(m_\xi(t), D_\xi(t))$ есть математическое ожидание и дисперсия сечения случайного процесса в точке $t \in T$. Для их вычисления достаточно знать одномерное распределение случайного процесса.

О п р е д е л е н и е 1.1.16 Детерминированная функция, $R_\xi(t,\tau), \quad t,\tau \in T$, определяемая соотношением

$$R_\xi(t,\tau) = \mathbf{cov}\{\xi(t,\tau)\} = \mathbf{M}\{(\xi(t) - m_\xi(t))(\xi(\tau) - m_\xi(\tau))\} =$$

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\xi(\tau)\} - m_\xi(t)m_\xi(\tau) = \int\limits_{R^2} x_1 x_2 dF_\xi(t,\tau;x_1,x_2) - m_\xi(t)m_\xi(\tau)$$

называется *ковариационной функцией случайного процесса* ξ. ■

З а м е ч а н и е $R_\xi(t,\tau)$ численно равна ковариации сечений случайного процесса $\xi_t(\omega)$ и $\xi_\tau(\omega)$ в точках $t,\tau \in T$. $R_\xi(t,\tau)$ характеризует степень линейной зависимости между сечениями. Для вычисления $R_\xi(t,\tau)$ необходимо знать двумерное распределение $F_\xi(t,\tau;x_1,x_2)$. второго порядка.

Для существования $m_\xi(t), D_\xi(t)$ и $R_\xi(t,\tau)$ при всех $t,\tau \in T$ достаточно выполнения неравенства

$$\mathbf{M}\{|\xi(t)|^2\} < \infty, \quad \forall t \in T. \tag{1.1.9}$$

Доказательство этого факта следует из неравенства Коши-Буняковского, поскольку

$$\mathbf{M}\{\xi\eta\} \le \left(\mathbf{M}\{|\xi|^2\}\mathbf{M}\{|\eta|^2\}\right)^{1/2}. \tag{1.1.10}$$

О п р е д е л е н и е 1.1.17 Случайный процесс $\xi(t), t \in T$, удовлетворяющий условию 1.1.9 называется *процессом второго порядка* или *квадратично интегрируемым* процессом. ■

О п р е д е л е н и е 1.1.18 Пусть $\xi(t)$ - комплекснозначный процесс $\xi(t) = X(t) + iY(t)$, где $X(t), Y(t), t \in T$ - некоторые действительные случайные процессы. Если

$$\mathbf{M}\{|\xi(t)|^2\} = \mathbf{M}\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\} = \mathbf{M}\{X^2(t) + Y^2(t)\} < \infty, \quad \forall t \in T,$$

то процесс $\xi(t)$ называется *комплекснозначным процессом второго порядка.*

Функция

$$R_\xi(t,\tau) = \mathbf{M}\{(\xi(t) - m_\xi(t))\overline{(\xi(\tau) - m_\xi(\tau))}\},$$

где $\overline{\{\cdot\}}$ означает комплексное сопряжение, называется *ковариационной функцией комплекснозначного случайного процесса* ξ. ■

П р и м е р 1.1.14 Пусть $\xi(t) = X\varphi(t), \quad t \in T$, где X - некоторая действительная квадратично интегрируемая случайная величина с параметрами m_X, D_X, а $\varphi(t), \quad t \in T$ - некоторая детерминированная функция. Найти $m_\xi(t)$, $D_\xi(t)$ и $R_\xi(t,\tau)$.

Р е ш е н и е   В соответствии с Определениями 1.1.14, 1.1.15, 1.1.16 имеем

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\{X\varphi(t)\} = \mathbf{M}\{X\}\varphi(t) = m_X\varphi(t),$$

$$D_\xi(t) = \mathbf{M}\{(X\varphi(t) - m_X\varphi(t))^2\} = \mathbf{M}\{(X - m_X)^2\}\varphi^2(t) = D_X\varphi^2(t),$$

$$R_\xi(t,\tau) = \mathbf{M}\{(X\varphi(t) - m_X\varphi(t))(X\varphi(\tau) - m_X\varphi(\tau)) = D_\xi\varphi(t)\varphi(\tau).$$

■

Следующий пример является обобщением предыдущего.

П р и м е р 1.1.15 Пусть $\xi(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\varphi_i(t), \quad t \in T$, где X_i - некоторые действительные квадратично интегрируемые случайные величины с параметрами m_{X_i}, D_{X_i}, а $\varphi_i(t), \quad t \in T$ - некоторые детерминированные функции. Найти $m_\xi(t)$, $D_\xi(t)$ и $R_\xi(t,\tau)$.

Р е ш е н и е   В соответствии с Определениями 1.1.14, 1.1.15, 1.1.16 имеем

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\{\sum_{i=1}^{n} X_i\varphi_i(t)\} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\{X_i\}\varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{n} m_{X_i}\varphi_i(t),$$

$$D_\xi(t) = \mathbf{M}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_{X_i})\varphi_i(t))\right|^2\right\} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{M}\{(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})\}\varphi_i(t)\varphi_j(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{cov}\{X_i, X_j\}\varphi_i(t)\varphi_j(t),$$

$$R_\xi(t,\tau) = \mathbf{M}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_{X_i})\varphi_i(t))\sum_{j=1}^{n}(X_j - m_{X_j})\varphi_j(\tau))\right\} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{M}\{(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})\}\varphi_i(t)\varphi_j(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{cov}\{X_i, X_j\}\varphi_i(t)\varphi_j(\tau),$$

■

О п р е д е л е н и е 1.1.19 Пусть заданы два комплекснозначных квадратично интегрируемых процесса $\xi(t), \eta(t), \quad t \in T$. Детерминированная функция

$$R_{\xi\eta}(t,\tau) = \mathbf{M}\{(\xi(t) - m_\xi(t))\overline{(\eta(\tau) - m_\eta(t))}, \quad t,\tau \in T$$

называется *взаимной ковариационной функцией процессов* ξ и η. ■

З а м е ч а н и е   Существование взаимной ковариационной функции следует из условия квадратичной интегрируемости процессов ξ и η. (См. задачу 1.1.5).

Пусть $\xi(t) = \{\xi_1(t), ..., \xi_n(t)\} \in R^n$ - векторный случайный процесс.

Определение 1.1.20 Детерминированная вектор-функция, $m_\xi(t) \in R^n, \quad t \in T$, определяемая соотношением

$$m_\xi(t) = \{\mathbf{M}\{\xi_1(t)\}, ..., \mathbf{M}\{\xi_n(t)\}\} \in R^n,$$

называется *математическим ожиданием векторного случайного процесса* ξ.

Детерминированная матрично-значная функция, $R_\xi(t, \tau), \quad t, \tau \in T$, с элементами

$$R_\xi(t, \tau) = \mathbf{cov}\{\xi(t), \xi(\tau)\} = \mathbf{M}\{(\xi(t) - m_\xi(t))(\xi(\tau) - m_\xi(\tau))^*\} = \mathbf{M}\{\xi(t)\xi^*(\tau)\} - m_\xi(t)m_\xi^*(\tau).$$

называется *ковариационной функцией векторного случайного процесса* ξ. ■

Замечание Для существования $m_\xi(t)$ и $R_\xi(t, \tau)$ при всех $t, \tau \in T$ достаточно выполнения неравенства

$$\mathbf{M}\{\|\xi(t)\|^2\} < \infty, \quad \forall t \in T. \tag{1.1.11}$$

Пример 1.1.16 Пусть $\xi(t) = G(t)U, \quad t \in T$, где $U \in R^m$ - некоторый случайный вектор с квадратично интегрируемыми компонентами $\mathbf{M}\{U\} = m_U, \quad \mathbf{cov}\{U, U\} = R_U$, а $G(t)$ - детерминированная матричная функция размера $n \times m$. Найти $m_\xi(t), R_\xi(t, \tau)$.

Решение В соответствии с Определением 1.1.20

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\{\xi(t)\} = G(t)m_U,$$

$$R_\xi(t, \tau) = \mathbf{M}\{G(t)UU^*G^*(\tau)\} - G(t)m_U m_U^* G^*(\tau) = G(t)R_U G^*(\tau).$$

■

Определение 1.1.21 Детерминированная функция $m(t_1, ..., t_k), \quad t_1, ..., t_k \in T$, определяемая соотношением

$$m(t_1, ..., t_k) = \mathbf{M}\left\{\xi(t_1)\xi(t_2)...\xi(t_k)\right\} = \int\limits_{R^k} x_1 x_2 ... x_k dF_\xi(t_1, t_2, ..., t_k;\, x_1, x_2, ..., x_k)$$

называется *смешанным моментом порядка* k. ■

Определение 1.1.22 Детерминированная функция $\varphi_{t_1,...,t_k}(z_1, ..., z_k)$ переменных $(z_1, ..., z_k)$, определяемая для некоторого набора $t_1, ..., t_k \in T$ соотношением

$$\varphi_{t_1,...,t_k}(z_1, ..., z_k) = \mathbf{M}\left\{exp\left(i\sum_{j=1}^{k} z_j \xi(t_j)\right)\right\} = \int\limits_{R^k} exp\left(i\sum_{j=1}^{k} z_j x_i\right) dF_\xi(t_1, t_2, ..., t_k;\, x_1, x_2, ..., x_k)$$

называется *характеристической функцией конечномерного распределения* k *-го порядка.* ■

Замечание Для вычисления этих характеристик требуется знание конечномерного распределения k -го порядка. В этих соотношениях интегралы понимаются как интегралы Лебега в соответствующем пространстве R^k по мере, определяемой функцией распределения имеет плотность $p_\xi(t_1, t_2, ..., t_n;\, x_1, x_2, ..., x_n)$, то интегралы понимаются как интегралы по мере Лебега с весовой функцией p_ξ.

Характеристическая функция однозначно определяет функцию распределения, например, для одномерной функции распределения имеет место следующая теорема обращения.

Теорема 1.1.5 *Пусть* $F(x)$ *- функция распределения и*

$$\varphi(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

- ее характеристическая функция. Тогда:

1. *Для любых двух точек $a, b, (a < b)$, где функция $F(x)$ непрерывна,*

$$F(b) - F(a) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-c}^{c} \frac{e^{-iza} - e^{-izb}}{iz} \varphi(z)dz;$$

2. *Если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(z)|dz < \infty$, то функция распределения имеет плотность $f(x)$,*

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)dy,$$

и

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} \varphi(z)dz.$$

П р и м е р 1.1.17 Пусть $\{\xi(t), t \in T\}$ - гаусовский случайный процесс с математическим ожиданием $m_{xi}(t)$ и ковариационной функцией $R_\xi(t,\tau)$. По определению характеристическая функция k - мерного распределения гауссовского процесса имеет вид

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_k}(z_1, ..., z_k) = exp\left(i \sum_{j=1}^{k} z_j m_\xi(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} R_\xi(t_j, t_l) z_j z_l \right).$$

В следующем разделе будет показано, как характеристическая функция определяет плотность гауссовского распределения.

1.1.5 Задачи для самостоятельного решения

1.1.1 Доказать свойства (1)-(6) конечномерных распределений (1.1.1).

1.1.2 Доказать свойства (1) - (6) для семейства конечномерных распределений, найденных в Примерах 1.1.3 - 1.1.5.

1.1.3 Доказать, что для существования $m_\xi(t), D_\xi(t)$ и $R_\xi(t,\tau), \quad \forall t, \tau \in T$ достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{M}\{|\xi(t)|^2\} < \infty, \quad \forall t \in T.$$

У к а з а н и е Воспользоваться неравенством Коши-Буняковского.

1.1.4 Доказать, что $D_\xi = R_\xi(t,t)$.

1.1.5 Доказать, что из квадратичной интегрируемости процессов $\xi(t), \eta(t), \quad t \in T$ следует следует существование взаимной ковариационной функции.

1.1.6 Пусть в примере 1.1.5 X и Y имеют плотности распределения $p_X(x), p_Y(y)$. Найти плотность распределения второго порядка. Показать, что распределения порядка $k \geq 3$ плотности не имеют.

О т в е т При $t_2 > t_1$

$$p_\xi(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} p_X\left(x_1 - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right) p_Y\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right).$$

У к а з а н и е Воспользоваться формулой преобразования плотности, при невырожденном преобразовании случайных величин.

При рассмотрении распределения третьего и более высоких порядков показать, что мера совместного распределения $\{\xi(t_1), \xi(t_2), \xi(t_3), ..., \xi(t_k)\})$ локализована на некотором линейном подпространстве размерности 2.

1.1.7 Пусть в примере 1.1.15 случайные величины X_i являются независимыми и гауссовскими с распределением $\mathcal{N}(0,1)$. Найти $F_\xi(t;\, x)$.

У к а з а н и е Определить математическое ожидание и дисперсию процесса.

1.1.8 Случайный процесс $\xi(t) = Xt^2 + Yt, \quad t > 0$, где X, Y независимые случайные величины с одинаковым гауссовским распределением $\mathcal{N}(0,1)$. Является ли подмножество неубывающих траекторий событием? И если является, найти его вероятность.

О т в е т $\mathbf{P}\{\xi(t) -$ неубывающая функция$\} = \mathbf{P}\{X \ge 0, Y \ge 0\} = 1/4$.

1.1.9 В предыдущем примере найти вероятность события $\mathcal{A} = \{\min\limits_{t>0} \xi(t) < 0\}$.

О т в е т $\mathbf{P}\{\mathcal{A}\} = \mathbf{P}\{X > 0, Y < 0\} + \mathbf{P}\{X < 0, Y > 0\} = 1/2$.

1.1.10 Случайный процесс задан соотношением $\xi(t) = X + \alpha t, \quad t > 0$, где $\alpha > 1$ - детерминированная постоянная, а X - случайная величина с непрерывной функцией распределения.

Пусть $D \subset [0, \infty)$ - некоторое конечное или счетное подмножество.

Найти вероятности событий:

$$1) \quad \mathbf{P}\{\xi(t) = 0, \quad \text{хотя бы для одного} \quad t \in D\},$$

$$2) \quad \mathbf{P}\{\xi(t) = 0, \quad \text{хотя бы для одного} \quad t \in [0,1]\}.$$

О т в е т 1) 0; 2) $\mathbf{P}\{-\alpha \le X \le 0\}$.

1.1.11 Найти ковариационную функцию процесса

$$\xi(t) = X\cos(t + Y).$$

X, Y - независимы, X - гауссовский с распределением $\mathcal{N}(0,1)$, а Y имеет равномерное распределение на $[-\pi, \pi)$.

О т в е т $R_\xi(t, \tau) = \cos(t - \tau)$.

1.1.12 Найти математическое ожидание и ковариационную функцию комплексно-значного случайного процесса $\xi(t) = Ue^{iVt}$, где U, V - независимые случайные величины, $\mathbf{M}\{U\} = 0, \mathbf{D}\{U\} = D$, а случайная величина V распределена по закону Коши с плотностью вероятности $p_V(x) = \dfrac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}, \alpha > 0$.

О т в е т

$$m_\xi(t) = 0, \quad R_\xi(t, \tau) = De^{-\alpha|t-\tau|}.$$

У к а з а н и е Воспользоваться табличным интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|\beta|}.$$

1.2 Основные классы случайных процессов

В этом разделе дано предварительное описание различных классов случайных процессов. Каждый из описанный ниже типов случайных процессов имеет свою область приложений и свой класс задач, которые для данного типа случайных процессов решаются наиболее эффективным образом. Изложение начинается с гауссовских процессов, для которых задано полное описание семейства их конечномерных распределений. Это описание является достаточно простым и основано лишь на задании двух первых моментов: математического ожидания и ковариационной функции. Уникальные свойства гауссовских случайных процессов, а именно, простота описания, сохранение типа распределения при линейных преобразованиях делают их весьма удобной моделью для решения многочисленных задач теории оптимального оценивания и управления.

1.2.1 Гауссовские случайные процессы

О п р е д е л е н и е 1.2.1 *Действительный случайный процесс* $\{\xi(t,\omega), \quad t\in T\}$, *называется* гауссовским *если характеристическая функция его конечномерного распределения* k *-го порядка: допускает представление*

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_k}(z_1,...,z_k)=\mathbf{M}\,exp\left(i\sum_{j=1}^{k}z_j\xi(t_j)\right)=exp\left(i\sum_{j=1}^{k}z_jm_\xi(t_j)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}R_\xi(t_i,t_j)z_i\bar{z}_j\right),$$

где

$$m_\xi(t_j)=\mathbf{M}\{\xi(t_j)\},\quad R_\xi(t_i,t_j)=\mathbf{cov}(\xi(t_i),\xi(t_j)). \tag{1.2.1}$$

Если обозначить $(a,b)=\sum\limits_{i=1} a_ib_i$ - скалярное произведение векторов a,b, то характеристическую функцию можно представить в виде

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_k}(z_1,...,z_k)=\varphi(z)=exp\left(i(z,m_\xi)-\frac{1}{2}(R_\xi z,z)\right), \tag{1.2.2}$$

где $z=(z_1,...,z_k)$, $m_\xi=(m_\xi(t_1),...,m_{xi}(t_k))$ и $R_\xi=\|R_\xi(t_i,t_j)\|_{i,j=1,\ldots,k}$. ■

Как уже говорилось ранее, характеристическая функция полностью определяет распределение совокупности случайных величин, и тем самым задано и полное семейство конечномерных распределений.

П р и м е р 1.2.1 Пусть задан вектор $m_\xi=(m_\xi(t_1),...,m_{xi}(t_k))$ и положительно определенная матрица $R_\xi=\|R_\xi(t_i,t_j)\|_{i,j=1,\ldots,k}$. Показать, что совместное распределение случайных величин $\{\xi(t_1),...,\xi(t_n)\}$ имеет плотность и найти ее.

Р е ш е н и е Заметим, что если совместное распределение $\{\xi(t_1),...,\xi(t_n)\}$ имеет плотность, то характеристическая функция есть ее k - мерное преобразование Фурье. Если матрица R_ξ - положительно определена, то характеристическая функция $\varphi(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(z)|=\left|exp\left(i(z,m_\xi)-\frac{1}{2}(R_\xi z,z)\right)\right|\le exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{\min}(R_\xi)\|z\|^2\right), \tag{1.2.3}$$

где $\lambda_{\min}(R_\xi)>0$ - есть минимальное собственное значение матрицы R_ξ. Из неравенства (1.2.3) следует, что функция $\varphi(z)$ интегрируема на R^k, и следовательно, плотность можно определить с помощью обратного преобразования Фурье

$$p_\xi(t_1,...,t_k;\,x_1,...,x_k)=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R^k}e^{-i(x,z)}\varphi(z)dz.$$

Вначале найдем выражение для плотности при $k=1$. В этом случае, после замены переменной $v=z/\sqrt{R_\xi}$ и использования табличного интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\frac{(v-c)^2}{2}\right\}dv=1,\quad\forall c,$$

получаем

$$p_\xi(x;\,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}exp\left(-i(x-m_\xi)z-\frac{1}{2}R_\xi z^2\right)dz=$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{R_\xi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}exp\left(-\frac{1}{2}\left[v+\frac{(x-m_\xi)i}{\sqrt{R_\xi}}\right]^2-\frac{(x-m_\xi)^2}{R_\xi}\right)dv=\frac{1}{\sqrt{2\pi R_\xi}}exp\left\{-\frac{(x-m_\xi)^2}{2R_\xi}\right\}.$$

В общем случае существует ортогональное преобразование $v = Sz, \quad z = S^* v, \quad (S^{-1} = S^*)$, которое приводит квадратичную форму $(R_\xi z, z)$ к диагональному виду, то есть

$$(R_\xi z, z) = (R_\xi S^{-1} v, S^{-1} v) = (S R_\xi S^* v, v),$$

с диагональной матрицей

$$S R_\xi S^* = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}, \quad \lambda_i > 0.$$

Используем замену переменной $z = S^* v$ и приведем выражение для плотности распределения к виду

$$p_{xi}(t_1, ..., t_k;\, x_1, ..., x_k) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R^k} exp\left\{ -i(z, x - m_\xi) - \frac{1}{2}(R_\xi z, z) \right\} dz =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R^k} exp\left\{ -i(v, S(x - m_\xi)) - \frac{1}{2}(S R_\xi S^* v, v) \right\} |\, det\, S| dv =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{R^k} exp\left\{ -i\left(\sum_{j=1}^{k} v_i u_i \right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j^2 \right) \right\} dv_1 ... dv_k,$$

где $u_j = (S(x - m_\xi)_j$, а $|\, det\, S| = 1$.

По доказанному ранее соотношению для плотности в случае $k = 1$ имеем равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} exp\left\{ -i(v_j u_j) - \frac{1}{2}\lambda_j v_j^2 \right\} dv_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}} exp\left\{ -\frac{u_j^2}{2\lambda_j} \right\},$$

подстановка которого в выражение для плотности дает,

$$p_{xi}(t_1, ..., t_k;\, x_1, ..., x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}} exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{(S(x - m_\xi)_j^2}{2\lambda_j} \right\}.$$

Далее имеем соотношения

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{(S(x - m_\xi)_j^2}{2\lambda_j} = \left((S R_\xi S^*)^{-1} S(x - m_\xi), S(x - m_\xi) \right) =$$

$$\left(S^* (S R_\xi S^*)^{-1} S(x - m_\xi), x - m_\xi \right) = (R_\xi^{-1}(x - m_\xi), x - m_\xi),$$

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} = \frac{1}{\sqrt{det\{S R_\xi S^*\}}} = \frac{1}{\sqrt{det\, R_\xi}},$$

подстановка которых в выражение для плотности дает окончательный результат

$$p_\xi(t_1, ..., t_k;\, x_1, ..., x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{det\, R_\xi}} exp\left\{ -\frac{1}{2}(R_\xi^{-1}(x - m_\xi), x - m) \right\}. \qquad (1.2.4)$$

■

З а м е ч а н и е В случае, когда матрица R_ξ с элементами

$$R_{i\,j} = \mathbf{cov}(\xi(t_i), \xi(t_j) = R_\xi(t_i, t_j)$$

вырождена (т.е. $det\, R_\xi = 0$), то существует не равный нулю вектор $\bar\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ такой, что $R_\xi \bar\alpha = 0$. Это означает, что

$$\mathbf{M}\left\{ \left| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(\xi(t_j) - m_\xi(t_j)) \right|^2 \right\} = \bar\alpha^* R_\xi \bar\alpha = 0,$$

то есть
$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(\xi(t_j) - m_\xi(t_j)) = 0, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
Следовательно, совместное распределение случайных величин $\{\xi(t_j),\ j = 1, ..., k\}$ сосредоточено в R^k на некотором линейном многообразии размерности $r = rank\{R_\xi\} < k$, и поэтому плотности не имеет.

При вырожденной матрице ковариаций совокупность случайных величин $\{\xi(t_j),\ j = 1, ..., k\}$ можно представить в виде линейного преобразования совокупности меньшего числа независимых гауссовских случайных величин, совместное распределение которых имеет плотность. Действительно, при вырожденной матрице R_ξ существует ортогональное преобразование $T: \quad R^k \to R^k$, приводящее симметрическую матрицу R_ξ к диагональному виду, так что
$$T^* R_\xi T = \mathrm{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0\}, \quad \lambda_j > 0. \tag{1.2.5}$$
Рассмотрим гауссовский вектор $\eta = T^*(\xi - m_\xi)$, его ковариационная матрица равна
$$R_\eta = T^* R_\xi T,$$
и в силу (1.2.5) $\mathbf{M}\{\eta_j^2\} = 0$, при $j \geq r+1$, и следовательно, его компоненты с номерами $j = r+1, ..., k$ равны нулю ($\mathbf{P}$- п.н.). Преобразование T не вырождено, поэтому вектор ξ допускает представление
$$\xi = m_\xi + \bar{T}\bar{\eta}, \tag{1.2.6}$$
где $\bar{T}$ матрица, составленная из первых r строк матрицы T, а $\bar{\eta}$ - вектор, составленный из первых r компонент вектора η. Совместное распределение компонент вектора $\bar{\eta}$ гауссовское с матрицей ковариаций $\mathrm{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$, поэтому в силу доказанного выше результата имеет плотность
$$p_{\bar{\eta}}(x_1, ..., x_r) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}}\, exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \frac{x_j^2}{2\lambda_j} \right\} = \prod_{j=1}^{r} p_{\eta_j}(x_j).$$
Поскольку плотность представима в виде произведения плотностей случайных величин η_j, то компоненты вектора $\bar{\eta}$ независимы.

Таким образом семейство конечномерных распределений гауссовского процесса характеризуется всего двумя моментными характеристиками: математическим ожиданием и ковариационной функцией. Когда определена положительная плотность распределения, то автоматически выполняются и свойства (1) - (6) семейства конечномерных распределений (1.1.1). В случае, когда матрица ковариации вырождена, то есть $det\, R_\xi = 0$, выражение для плотности (1.2.1) теряет смысл, так как обратная матрица R_ξ^{-1} не существует. В этом случае, однако, семейство случайных величин $\{\xi(t_j),\ j = 1, ..., k\}$, можно представить, как результат афинного преобразования (1.2.6), поэтому свойства (1)-(6) также выполняются.

П р и м е р 1.2.2 Пусть $X_i, i = 1, ..., n$ совокупность случайных величин, совместное распределение которых гауссовское. Показать, что случайный процесс
$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i f_i(t),$$
где $f_i(t)$ - некоторые детерминированные функции является гауссовским. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\xi(t)$.

Р е ш е н и е Возьмем некоторую совокупность моментов времени $\{t_1, ..., t_k\}$ и найдем характеристическую функцию совместного распределения $\{\xi(t_1), ..., \xi(t_k)\}$. По определению
$$\varphi_{t_1,...t_k}(z_1, ..., z_k) = \mathbf{M}\left\{ exp\left(i\sum_{j=1}^{k} \xi(t_j) z_j \right) \right\} =$$
$$\mathbf{M}\left\{ exp\left(i\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n} X_l f_l(t_j) z_j \right) \right\} = \mathbf{M}\left\{ exp\left(i\sum_{l=1}^{n} X_l \left(\sum_{j=1}^{k} f_l(t_j) z_j \right) \right) \right\} = \mathbf{M}\left\{ exp\left(i\sum_{l=1}^{n} X_l a_l \right) \right\},$$

где $a_l = \sum\limits_{j=1}^{k} f_l(t_j) z_j$. Поскольку совместное распределение $\{X_l,\, l = 1, ..., n\}$ гауссовское, то

$$\varphi_{t_1,\ldots t_k}(z_1, ..., z_k) = exp\left\{ i \sum_{l=1}^{n} \mathbf{M}\{X_l\} a_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbf{cov}\{X_l, X_m\} a_l a_m \right\}.$$

Далее, подставляя выражения для a_l находим

$$\sum_{l=1}^{n} \mathbf{M}\{X_l\} a_l = \sum_{k=1}^{k} \mathbf{M}\{\xi(t_j)\} z_j,$$

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbf{cov}\{X_l, X_m\} a_l a_m = \sum_{j1}^{k} \sum_{p=1}^{k} \mathbf{cov}\{\xi(t_j), \xi(t_p)\} z_j z_p,$$

где

$$\mathbf{M}\xi(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M} X_i f_i(t),$$

$$\mathbf{cov}(\xi(t), \xi(s)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{cov}(X_i, X_j) f_i(t) f_j(s).$$

Конечномерное распределение $k-$ порядка в точках $\{t_1, ..., t_k\}$ имеет плотность если матрица

$$R_\xi = ||\mathbf{cov}(\xi(t_i, t_j)||_{i=1,\ldots,k\, j=1,\ldots,k}$$

положительно определена. ■

Приведем пример гауссовского процесса, не имеющего плотности распределения вероятностей $k-$ порядка $(k \geq 2)$.

П р и м е р 1.2.3 Случайный процесс

$$\xi(t) = X + t, \quad t \geq 0$$

является гауссовским, если распределение случайной величины X гауссовское с параметрами $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Случайная величина $\xi(t)-$ гауссовская с параметрами $\mathcal{N}(t, \sigma^2)$. Распределение первого порядка случайного процесса $\xi(t)$ имеет плотность

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\, exp\left\{ -\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

если, конечно, $\sigma > 0$. Однако, уже распределение второго порядка не имеет плотности, так как матрица ковариаций

$$K = ||\mathbf{cov}(\xi(t_i), \xi(t_j))||_{i=1,2;\, j=1,2} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

вырождена, то есть $det\, K = 0$. Отсутствие плотности очевидно, поскольку случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2)$ связаны соотношением

$$\xi(t_2) = \xi(t_1) + t_2 - t_1,$$

и следовательно, их совместное распределение в R^2 сосредоточено на множестве

$$x_2 = x_1 + t_2 - t_1,$$

имеющем нулевую меру Лебега.

Вырожденность матрицы ковариаций семейства гауссовских случайных величин означает наличие между ними связи в форме некоторых линейных соотношений. Поэтому, для случайного процесса в примере 1.2.2, не существует совместной плотности распределения случайных величин $\{\xi(t_1), ..., \xi(t_k)\}$ при $k > n$. Действительно, k случайных величин $\{\xi(t_i),\ i = 1, ..., k\}$ связаны линейными соотношениями с $n < k$ случайными величинами $\{X_j,\ j = 1, ..., n\}$. По теореме Кронеккера-Капелли, это может иметь место только тогда, когда случайные величины $\{\xi(t_1), ..., \xi(t_k)\}$ связаны некоторой системой линейных уравнений. Следовательно, распределение семейства случайных величин $\{\xi(t_1), ..., \xi(t_k)\}$ сосредоточено в пространстве R^k на некотором линейном многообразии, которое имеет нулевую меру Лебега, и поэтому функция совместного распределения вероятностей этих случайных величин не имеет плотности.

Следующий пример демонстрирует гауссовский процесс, у которого все совместные распределения имеют плотность.

П р и м е р 1.2.4 Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$ - гауссовский процесс с

$$\mathbf{M}\xi(t) = 0, \qquad \mathbf{cov}(\xi(t), \xi(s)) = \min(t, s).$$

Матрица ковариаций случайных величин $\{\xi(t_1), ..., \xi(t_k)\}$ равна

$$R_\xi = \begin{pmatrix} t_1, t_1, ..., t_1 \\ t_1, t_2, ..., t_2 \\ .... \\ t_1, t_2, ..., t_n \end{pmatrix}.$$

Показать, что такой гауссовский процесс существует и его конечномерные распределения имеют плотность.

Р е ш е н и е Для доказательства существования гауссовского процесса установим положительную определенность ковариационной функции. Пусть зафиксированы некоторые положительные $\{t_1, ..., t_k\}$ и заданы действительные числа $z_1, ..., z_k$, не равные одновременно нулю. Функция

$$f(s) = \sum_{i=1}^{k} z_i I\{s \leq t_i\},$$

где $I\{s \leq t_i\}$ - есть индикаторная функция отрезка $[0, t]$, интегрируема с квадратом и

$$\int_0^t f^2(s) ds > 0.$$

Однако, при $t \geq \max\{t_i\}$

$$\int_0^t f^2(s) ds = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} z_i z_j \int_0^t I\{s \leq t_i\} I\{s \leq t_j\} ds = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} z_i z_j \min\{t_i, t_j\} > 0,$$

что и означает положительную определенность ковариационной матрицы.

Матрица R_ξ положительно определена для любого набора $\{t_1, ..., t_k\}$, и поэтому распределение случайных величин $\{\xi(t_1), ..., \xi(t_k)\}$ имеет плотность. ∎

О п р е д е л е н и е 1.2.2 Гауссовский процесс с

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\} = 0, \qquad \mathbf{cov}(\xi(t), \xi(s)) = \min(t, s)$$

называется *процессом Броуновского движения.* ∎

Этот процесс обладает многими замечательными свойствами и будет подробно изучаться в главе, посвященной случайным функциям. Здесь мы приведем только некоторые его свойства, которые можно вывести непосредственно из свойств гауссовости и ковариационной функции.

П р и м е р 1.2.5 Показать, что приращения процесса Броуновского движения независимы и найти их распределение.

Р е ш е н и е Возьмем некоторые значения $t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$ и определим

$$\mathbf{cov}\{(\xi(t_4) - \xi(t_3))(\xi(t_2) - \xi(t_1)) = \min(t_4, t_2) - \min(t_3, t_2) - \min(t_4, t_1) + \min(t_3, t_1) = 0.$$

Итак приращения $\xi(t)$ не коррелированы, а поскольку это гауссовский процесс, то и не зависимы. Приращения имеют гауссовское распределение с параметрами

$$\mathbf{M}\{\xi(t) - \xi(s)\} = 0, \quad \mathbf{M}\{(\xi(t) - \xi(s))^2\} = t + s - 2\min(t, s) = |t - s|. \tag{1.2.7}$$

■

П р и м е р 1.2.6 Найти плотность конечномерного распределения процесса Броуновского движения.

Р е ш е н и е Рассмотрим совокупность приращений процесса Броуновского движения

$$\begin{aligned}
&\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) = \eta_k, \\
&\xi(t_{k-1}) - \xi(t_{k-2}) = \eta_{k-1}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\xi(t_1) - \xi(t_0) = \eta_1.
\end{aligned}$$

Поскольку $\xi(0) = 0$, то

$$\begin{aligned}
&\xi(t_1) = \eta_1, \\
&\xi(t_2) = \eta_1 + \eta_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\xi(t_k) = \eta_1 + \dots + \eta_k.
\end{aligned}$$

В силу последнего соотношения между η и ξ Якобиан линейного преобразования $\xi = \xi(\eta)$ равен по модулю 1, поэтому плотность распределения совокупности случайных величин $\xi(t_j)$ равна

$$p_\xi(t_1, ..., t_k;\, x_1, ..., x_k) = p_\eta(x_1, x_2 - x_1, ..., x_k - x_{k-1}) = p_{\eta_1}(x_1) p_{\eta_2}(x_2 - x_1) ... p_{\eta_k}(x_{k-2} - x_{k-1}),$$

что с учетом независимости η_j и соотношений (1.2.7) дает

$$p_\xi(t_1, ..., t_k;\, x_1, ..., x_k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{(2\pi(t_i - t_{i-1}))^{1/2}}\, exp\left\{ -\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right\}, \tag{1.2.8}$$

где $t_0 = 0$ и $x_0 = 0$. ■

Среди других интересных свойств процесса Броуновского движения - непрерывность его траекторий. Действительно, распределение приращений гауссовское с параметрами $\mathcal{N}(0, |t - s|)$. Отсюда немедленно следует, что

$$\mathbf{M}\{|\xi(t) - \xi(s)|^2\} = |t - s|,$$

и следовательно, процесс Броуновского движения непрерывен в среднеквадратическом смысле и по вероятности. Однако, из свойств гауссовского распределения вытекает неравенство

$$\mathbf{M}|\xi(t) - \xi(s)|^4 = 3|t - s|^2,$$

которое в силу критерия Колмогорова, см. Теорема **??**, означает, что процесс $\xi(t)$ имеет почти наверное непрерывные траектории. Эти свойства подробно обсуждаются далее в разделах (??), (??). К процессу Броуновского движения мы еще вернемся при рассмотрении теории стохастического интегрирования и стохастических дифференциальных уравнений.

1.2.2 Квадратично-интегрируемые случайные процессы.

Многие прикладные задачи в области физики и техники допускают решение, основанное лишь на использовании знания лишь первых двух моментных характеристик случайного процесса. Это тем более удобно, поскольку эти моментные характеристики достаточно просто можно извлечь из статистических данных. В данном параграфе излагаются основные свойства процессов с конечным вторым моментом (процессы второго порядка), которые будут использованы в дальнейшем в разделах, посвященным стационарным процессам и последовательностям, а также процессам с ортогональными приращениями.

В соответствии с Определением 1.1.18 мы рассматриваем комплекснозначные процессы, представляемые в виде

$$\xi(t) = X(t) + iY(t), \quad t \in T$$

где $X(t)$, $Y(t)$ - есть действительные квадратично интегрируемые случайные процессы. В дальнейшем для простоты предполагается, что $\mathbf{M}\xi(t) = 0$, для всех $t \in T$.

О п р е д е л е н и е 1.2.3 Ковариационная функция процесса $\xi(t)$ определяется как

$$R_\xi(t,s) = \mathbf{cov}(\xi(t), \xi(s)) = \mathbf{M}\{\xi(t)\bar{\xi}(s)\},$$

где $\bar{z}$ - комплексная величина, сопряженная к z. ■

Примерами процессов второго порядка являются рассмотренные в предыдущем разделе гауссовские процессы и, в частности, процесс Броуновского движения. Следующий процесс также является процессом второго порядка.

П р и м е р 1.2.7 Пусть случайный процесс $\xi(t) = Ue^{i\omega t+\varphi}$, где U - действительная случайная величина с $\mathbf{M}\{U\} = 0$, $\mathbf{D}\{U\} = D^2 > 0$, а случайная величина φ не зависит от U и распределена произвольным оьразом на $[0, 2\pi]$. Показать, что процесс $\xi(t)$, $t \in R^1$ является квадратично интегрируемым и определить его моментные характеристики и ковариационную функцию.

Р е ш е н и е В силу независимости случайных величин U и φ

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\{\xi(t)\} = \mathbf{M}\{Ue^{i\omega t+\varphi}\} = \mathbf{M}\{U\}\mathbf{M}\{e^{i\omega t+\varphi}\} = 0,$$

$$D_\xi(t) = \mathbf{M}\{|\xi(t)|^2\} = \mathbf{M}\{U^2\} = D^2 < \infty.$$

Таким образом, $\xi(t)$ - действительно процесс второго порядка. Определим его ковариационную функцию

$$R_\xi(t,s) = \mathbf{M}\{\xi(t)\overline{\xi}(s)\} = \mathbf{M}\{U^2e^{i\omega t+\varphi}e^{-i\omega s-\varphi}\} = \mathbf{M}\{U^2\}e^{i\omega(t-s)} = D^2e^{i\omega(t-s)}.$$

■

Ковариационная функция является *неотрицательно-определенной*, то есть для любых $\{t_1, ..., t_n\} \in T$ и произвольного набора комплексных чисел $\{z_1, ..., z_n\}$, $n \geq 1$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i \bar{z}_j R_\xi(t_i, t_j) \geq 0. \tag{1.2.9}$$

Это соотношение получается следующим образом:

$$0 \leq \mathbf{M}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\xi_{t_i}\right|^2\right\} = \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\xi_{t_i}\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\xi_{t_i}\right)} = \sum_{i,j=1}^{n} z_i\bar{z}_j\mathbf{M}\xi_{t_i}\bar{\xi}_{t_j} = \sum_{i,j=1}^{n} z_i\bar{z}_jR_\xi(t_i,t_j);$$

Приведем основные свойства ковариационной функции, непосредственно вытекающие из свойства неотрицательной определенности.

Т е о р е м а 1.2.1 *Пусть $R_\xi(t,s)$ является ковариационной функцией некоторого случайного процесса второго порядка $\xi(t)$, $t \in T$. Тогда она обладает следующими свойствами:*

1.
$$R_\xi(t_1,t_1) \geq 0 \quad \forall t_1 \in T; \tag{1.2.10}$$

2. Ковариационная функция является Эрмитовой, то есть удовлетворяет следующему условию симметрии
$$R_\xi(t_1,t_2) = \overline{R_\xi(t_2,t_1)} \quad \forall t_1,t_2 \in T; \tag{1.2.11}$$

3. Ковариационная удовлетворяет неравенству Коши-Буняковского
$$|R_\xi(t_1,t_2)|^2 \leq R_\xi(t_1,t_1)R_\xi(t_2,t_2) \quad \forall t_1,t_2 \in T; \tag{1.2.12}$$

4.
$$|R_\xi(t_1,t_3) - R_\xi(t_2,t_3)|^2 \leq R_\xi(t_3,t_3)[R_\xi(t_1,t_1) + R_\xi(t_2,t_2) - 2\,Re\,R_\xi(t_1,t_2)] \quad \forall t_1,t_2,t_3 \in T. \tag{1.2.13}$$

Доказательство 1. Для $n=1$ из (1.2.9) имеем
$$R_\xi(t_1,t_1)z_1\bar z_1 = R_\xi(t_1,t_1)|z_1|^2 \geq 0, \quad \forall z_1,$$
откуда непосредственно следует (1.2.10).

2. Для $n=2$ соотношение (1.2.9) дает для любых z_1,z_2 следующее неравенство
$$R_\xi(t_1,t_1)z_1\bar z_1 + R_\xi(t_1,t_2)z_1\bar z_2 + R_\xi(t_2,t_1)z_2\bar z_1 + R_\xi(t_2,t_2)z_2\bar z_2 \geq 0.$$
Следовательно, выражение
$$R_\xi(t_1,t_2)z_1\bar z_2 + R_\xi(t_2,t_1)z_2\bar z_1$$
действительно при любых z_1,z_2. Подставляя $z_1=1, z_2=i$, поскольку $\bar z_1 = 1, \bar z_2 = -i$ мы получаем, что выражение
$$i[R_\xi(t_2,t_1) - R_\xi(t_1,t_2)]$$
всегда действительное, а следовательно, выражение
$$R_\xi(t_2,t_1) - R_\xi(t_1,t_2) = [Re\,R_{xi}(t_2,t_1) - Re\,R_\xi(t_1,t_2)] + i[Im\,R_\xi(t_2,t_1) - Im\,R_\xi(t_1,t_1)],$$
всегда мнимое. Следовательно,
$$Re\,R_\xi(t_1,t_2) = Re\,R_\xi(t_2,t_1).$$
Аналогично, подставляя $z_1=1, z_2=1$ мы получаем, что выражение
$$R_\xi(t_1,t_2) + R_\xi(t_2,t_1)$$
всегда действительное, откуда следует равенство
$$Im\,R_\xi(t_1,t_2) + Im\,R_\xi(t_2,t_1) = 0.$$
Объединяя полученные соотношения для действительных и мнимых частей функции $R_\xi(t_1,t_2)$ получаем, что для любых t_1,t_2 имеет место соотношение
$$R_\xi(t_1,t_2) = \overline{R_\xi(t_2,t_1)}.$$

3. Неравенство (1.2.12) - есть условие неотрицательной определенности квадратичной формы
$$R_\xi(t_1,t_1)z_1\bar z_1 + R_\xi(t_1,t_2)z_1\bar z_2 + R_\xi(t_2,t_1)z_2\bar z_1 + R_\xi(t_2,t_2)z_2\bar z_2 \geq 0, \quad \forall (z_1,z_2),$$
которое с учетом соотношения (1.2.11), имеет вид
$$|R_\xi(t_1,t_2)|^2 - R_\xi(t_1,t_1)R_\xi(t_2,t_2) \leq 0.$$

4. Для доказательства этого неравенства рассмотрим условие неотрицательной определенности квадратичной формы $\sum\limits_{i,j=1}^{n} z_i \bar{z}_j R_\xi(t_i, t_j)$ при $n = 3$, $z_1 = z, z_2 = -z$, и z_3, где z, z_3 - произвольные комплексные числа. Подстановка соответствующих значений приводит к неравенству

$$\{R_\xi(t_1,t_1) - R_\xi(t_1,t_2) - R_\xi(t_2,t_1) + R_\xi(t_2,t_2)\}|z|^2 + \{R_\xi(t_1,t_3) - R_\xi(t_2,t_3)\}z\bar{z}_3 +$$

$$\{R_\xi(t_3,t_1) - R_\xi(t_3,t_2)\}z_3\bar{z} + R_\xi(t_3,t_3)|z_3|^2 \geq 0, \quad \forall (z, z_3).$$

Далее с учетом равенства (1.2.11) получаем

$$R_\xi(t_1,t_2) + R_\xi(t_2,t_1) = R_\xi(t_1,t_2) + \overline{R_\xi(t_1,t_2)} = 2\,Re\,R_\xi(t_1,t_2),$$

$$R_\xi(t_3,t_1) - R_\xi(t_3,t_2) = \overline{R_\xi(t_1,t_3) - R_\xi(t_2,t_3)}$$

и соответственно, условие неотрицательной определенности квадратичной формы переменных z, z_3

$$\{R_\xi(t_1,t_1) + R_\xi(t_2,t_2) - 2\,Re\,R_\xi(t_1,t_2)\}|z|^2 + \{R_\xi(t_1,t_3) - R_\xi(t_2,t_3)\}z\bar{z}_3 +$$

$$\overline{\{R_\xi(t_1,t_3) - R_\xi(t_2,t_3)\}}z_3\overline{z} + R_\xi(t_3,t_3)|z_3|^2 \geq 0, \quad \forall (z, z_3),$$

которое равносильно неравенству

$$|R_\xi(t_1,t_3) - R_\xi(t_2,t_3)|^2 - R_\xi(t_3,t_3)\{R_\xi(t_1,t_1) + R_\xi(t_2,t_2) - 2\,Re\,R_\xi(t_1,t_2)\} \leq 0.$$

■

Если даны два случайных процесса с конечными вторыми моментами, то можно определить их взаимную ковариационную функцию см. Определение 1.1.19.

Замечание Если $\xi(t) = X(t) + iY(t)$, где $X(t), Y(t)$ - действительные процессы второго порядка, с $m_X(t) = m_Y(t) = 0$, то

$$R_\xi(t,s) = R_{\xi\,\xi}(t,s) = M\{(X(t) + iY(t))(X(s) - iY(s))\} = R_X(t,s) + R_Y(t,s) - i[R_{X\,Y}(t,s) - R_{Y\,X}(t,s)].$$

Следующий результат показывает связь между гауссовскими и квадратично-интегрируемыми процессами.

Теорема 1.2.2 *Для любой неотрицательно-определенной функции $R_\xi(t,s)$, определенной на $T \times T$, существует комплекснозначный квадратично-интегрируемый случайный процесс $\{\xi(t),\, t \in T\}$ с ковариационной функцией, равной $R_\xi(t,s)$. Этот процесс может выбран гауссовским.*

Замечание Для действительной ковариационной функции результат теоремы вытекает из Примера 1.1.10. В этом случае процесс $\xi(t)$ можно выбрать действительным и гауссовским, поскольку заданная ковариационная функция обладает свойством неотрицательной определенности.

Класс ковариационных функций обладает следующими свойствами замкнутости относительно ряда операций.

Теорема 1.2.3 *Пусть R_{ξ_1}, R_{ξ_2} - есть ковариационные функции некоторых случайных процессов, определенных на одном и том же множестве T. Тогда $\alpha_1 R_{\xi_1} + \alpha_2 R_{\xi_2}$, при $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ также является ковариационной функцией некоторого квадратично-интегрируемого случайного процесса.*

Теорема 1.2.4 *Пусть $\{R_{\xi_n}, n = 1, ...\}$ - есть последовательность ковариационных функций некоторых квадратично-интегрируемых случайных процессов, определенных на одном и том же множестве T. Тогда если последовательность $R_{\xi_n}(t,s) \to R_\xi(t,s)$, для всех $(t,s) \in T$,то $R_\xi(t,s)$ также является ковариационной функцией некоторого квадратично-интегрируемого случайного процесса.*

Замечание Доказательство этих теорем становится очевидным, если принять во внимание, что при сложении ковариационных функций с положительными весами и при предельном переходе свойство неотрицательной определенности сохраняется.

Поведение траекторий квадратично-интегрируемых процессов определяется свойствами их ковариационной функции лишь в некотором усредненном смысле. Подробно свойства траекторий этого класса процессов: непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость в среднеквадратическом рассматриваются в Главе 3.

1.2.3 Стационарные случайные процессы

Важным классом случайных процессов являются стационарные процессы. Свойство стационарности означает независимость характеристик сечений процесса от времени. Конечно, для реальных процессов это условие весьма ограничительно, однако, оно выполняется довольно часто, если рассматривать процесс на достаточно коротком интервале времени, в течение которого вероятностные характеристики процесса изменяются мало.

Определение 1.2.4 Случайный процесс называется *стационарным в узком смысле*, если для любого набора $\{t_1, ..., t_k\}$ совместное распределение случайных величин $\{\xi(t_1+\tau), ..., \xi(t_k+\tau)\}$ не зависит от τ. ■

Если существует математическое ожидание такого процесса, то оно постоянно, и равно

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\} = \mathbf{M}\{\xi(0)\},$$

а ковариационная функция (при условии существования второго момента) $R_\xi(t,s)$ зависит лишь от от разности $(t-s)$.

Определение 1.2.5 *Случайный процесс называется* стационарным в широком смысле, *если для любых* $t, s \in T$

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\} = const, \quad \mathbf{cov}\{\xi(t), \xi(s)\} = C(t-s).$$

■

Примером стационарного в широком смысле процесса является рассмотренный выше процесс 1.2.7, ковариационная функция которого равна $D^2\, exp\{i\omega(t-s)\}$.

Пример 1.2.8 Пусть задан гауссовский процесс с постоянным математическим ожиданием $\mathbf{M}\xi(t) = m$ и ковариационной функцией, $R_\xi(t,s) \equiv C(t-s)$. Показать, что этот процесс является стационарным в узком смысле.

Решение Все конечномерные распределения $\{\xi(t_1), ..., \xi(t_k)\}$ имеют характеристическую функцию

$$\varphi_{t_1,...,t_k}(z_1, ..., z_k) = exp\left(i\sum_{j=1}^{k} z_j m - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} C(t_i - t_j) z_i \bar{z}_j\right),$$

которая не изменяется при замене всех t_k на $t_k+\tau$. Следовательно, и сами распределения не изменяются при замене всех t_k на $t_k+\tau$. ■

Пример 1.2.9 Пусть $w(t), \quad t \in R$ - процесс Броуновского движения, а $\tau > 0$. Показать, что процесс $Z(t) = w(t) - w(t-\tau)$ - стационарный и найти его ковариационную функцию.

Решение Определим моментные характеристики процесса $Z(t)$. Поскольку $\mathbf{M}\{w(t)\} = \mathbf{M}\{w(t-\tau)\} = 0$, то $\mathbf{M}\{Z(t)\} = 0$, а

$$\mathbf{cov}\{Z(t), Z(s)\} = \mathbf{M}\{[w(t) - w(t-\tau)][w(s) - w(s-\tau)]\} =$$

$$\min(t,s) - \min(t-\tau, s) - \min(t, s-\tau) + \min(t-\tau, s-\tau) = \begin{cases} \tau - |t-s|, & \text{если} \quad |t-s| \le \tau, \\ 0, & \text{если} \quad |t-s| > \tau. \end{cases}$$

■

Непосредственно из свойств ковариациооной функции процесса второго порядка вытекают следующие свойства ковариационной функции стационарного в широком смысле процесса.

Теорема 1.2.5 *Пусть $C(t)$ -ковариационная функция некоторого стационарного в широком смысле процесса, тогда она обладает следующими свойствами:*

1. $C(0) \geq 0$,
2. $C(t) = \overline{C(-t)}$,
3. $|C(t)| \leq \mathrm{C}(0)$,
4. $|C(t_1) - C(t_2)|^2 \leq 2C(0)[C(0) - 2\,Re\,C(t_1 - t_2)]$.

З а м е ч а н и е Доказательство теоремы немедленно следует из общих свойств ковариационной функции см. Теорему 1.2.1.

Свойства стационарных последовательностей и процессов рассматриваются в главах 2 и 3.

1.2.4 Марковские процессы

Марковские случайные процессы обладают важным свойством независимости будущего поведения от всего прошлого. Это свойство иначе называется *отсутствием последействия.* Иначе говоря, если рассматривать текущее состояние процесса $\xi(t)$ в момент времени $t \in T$ как "настоящее", совокупность всех возможных прошлых состояний $\{\xi(s),\, s < t\}$ как "прошлое", а совокупность возможных состояний $\{\xi(u),\, u > t\}$ как "будущее", то для марковского процесса, будущее не зависит от прошлого, и семейство распределений процесса при $u > t$ зависит лишь от состояния в момент времени t.

О п р е д е л е н и е 1.2.6 Случайный процесс $\{\xi(t),\, t \in T\}$ $\xi(t) \in R$ называется *марковским или процессом Маркова,* если для любых $\{0 \leq t_1 < ... < t_k\}$ и $B \in \mathcal{B}(R)$, выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B|\xi(t_1), ..., \xi(t_{k-1})\} = \mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B|\xi(t_{k-1})\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}). \tag{1.2.14}$$

Свойство (1.2.14) называется *Марковским свойством.* ■

З а м е ч а н и е Соотношение (1.2.14), в котором условная вероятность определяется по отношению к σ - алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi(t_1), ..., \xi(t_{k-1})\}$, понимается следующим образом. Для любой совокупности множеств $B_1, ..., B_{k-1} \in \mathcal{B}(R)$

$$\mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B|\xi(t_1) \in B_1, ..., \xi(t_{k-1}) \in B_{k-1}\} = \mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B|\xi(t_{k-1}) \in B_{k-1}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}),$$

и в частности, для любых $x_1, ..., x_{k-1} \in R$

$$\mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B|\xi(t_1) = x_1, ..., \xi(t_{k-1}) = x_{k-1}\} = \mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B|\xi(t_{k-1}) = x_{k-1}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

Таким образом вероятностное распределение состояния процесса в момент времени t_k зависит лишь от того в каком сотоянии находился процесс в ближайшем прошлом, то есть при $t = t_{k-1}$, но не зависит от его состояний, предшествующих моменту времени t_{k-1}. Можно показать (см. Задачу 1.2.13), что для Марковского процесса при любых $B_1,\, B_2 \in \mathcal{B}(R)$ и $s \leq t \leq u$

$$\mathbf{P}\{\xi(s) \in B_1, \xi(u) \in B_2|\xi(t)\} = \mathbf{P}\{\xi(s) \in B_1|\xi(t)\}\mathbf{P}\{\xi(u) \in B_2|\xi(t)\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}). \tag{1.2.15}$$

Для этого достаточно использовать определение условной вероятности

$$\mathbf{P}\{\xi(s) \in B_1, \xi(u) \in B_2|\xi(t) \in B\} = \mathbf{P}\{\xi(u) \in B_2|\xi(s) \in B_1, \xi(t) \in B\}\mathbf{P}\{\xi(s) \in B_1|\xi(t) \in B\},$$

и далее использовать Марковское свойство.

О п р е д е л е н и е 1.2.7 *Переходная вероятность Марковского процесса* определяется как

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B|\xi(s) = x\} = \mathbf{P}(x, s, t, B)$$

при $t > s$, $x \in R$, $B \in \mathcal{B}(R)$, и удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{P}(x, s, t, B) = \int\limits_R \mathbf{P}(x, s, u, dy)\mathbf{P}(y, u, t, B),$$

которое выполняется для $s \leq u \leq t$, $\forall (s, u, t) \in T$, и называется уравнением *Колмогорова - Чепмена.* ■

Переходная вероятность как функция множеств $\mathbf{P}(x,s,t,\cdot)$ определяет при всех (x,s,t) вероятностную меру на $\mathcal{B}(R)$, а как функция аргумента $x \in R$ переходная вероятность $\mathbf{P}(\cdot,s,t,B)$ - измерима по Борелю.

З а м е ч а н и е Уравнение Колмогорова - Чепмена - есть лишь запись формулы полной вероятности для Марковского процесса. Действительно, в силу Марковского свойства при $s \le u \le t$

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B|\xi(s)=x\} = \int_R \mathbf{P}\{\xi(t) \in B|\xi(u)=y, \xi(s)=x\}\mathbf{P}\{\xi(u) \in (y,y+dy]|\xi(s)=x\} =$$

$$\int_R \mathbf{P}\{\xi(t) \in B|\xi(u)=y\}\mathbf{P}\{\xi(u) \in (y,y+dy]|\xi(s)=x\} = \int_R \mathbf{P}(x,s,u,dy)\mathbf{P}(y,u,t,B).$$

О п р е д е л е н и е 1.2.8 *Марковский процесс называется* однородным *если*

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B|\xi(s)=x\} = \mathbf{P}(x,t-s,B).$$

■

Для однородного марковского процесса уравнение Колмогорова-Чепмена упрощается и имеет вид

$$\mathbf{P}(x,s+t,B) = \int_R \mathbf{P}(x,s,dy)\mathbf{P}(y,t,B)$$

для $s \in T$, $t+s \in T$.

Для определения конечномерных распределений марковского процесса достаточно знать его переходную вероятность, и распределение в некоторый начальный момент времени, поскольку с использованием формулы полной вероятности и Марковского свойства легко получается соотношение (см. Пример 1.2.10)

$$\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in B_1,...,\xi(t_k) \in B_k\} = \int_R \pi(dx_0)\int_{B_1}\mathbf{P}(x_0,0,t_1,dx_1)...\int_{B_k}\mathbf{P}(x_{k-1},t_{k-1},t_k,dx_k), \tag{1.2.16}$$

где $0 < t_1 < ... < t_k$, $B_1,...,B_k \in \mathcal{B}(R)$, а $\pi(B) = \mathbf{P}\{\xi(0) \in B\}$.

П р и м е р 1.2.10 Пусть для Марковского случайного процесса задано начальное распределение $\pi(B) = \mathbf{P}\{\xi(0) \in B\}$ и переходная вероятность $\mathbf{P}(x,s,t,B)$. Найти $\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in B_1,...,\xi(t_k) \in B_k\}$.

Р е ш е н и е По определению условной вероятности и в силу Марковского свойства имеем

$$\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in B_1,...,\xi(t_k) \in B_k\} = \mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B_k|\xi(t_1) \in B_1,...,\xi(t_{k-1}) \in B_{k-1}\}\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in B_1,...,\xi(t_{k-1}) \in B_{k-1}\} =$$

$$\mathbf{P}\{\xi(t_k) \in B_k|\xi(t_{k-1}) \in B_{k-1}\}\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in B_1,...,\xi(t_{k-1}) \in B_{k-1}\}$$

Продолжая эти соотношения с до $k=0$, получаем формулу

$$\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in B_1,...,\xi(t_k) \in B_k\} = \prod_{l=0}^{k-1}\mathbf{P}\{\xi(t_{l+1}) \in B_{l+1}|\xi(t_l) \in B_l\},$$

где при $l=0$

$$\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in B_1|\xi(0) \in R\} = \int_R P(x_0,0,t_1,B_1)\pi(dx_0).$$

Для определения $\mathbf{P}\{\xi(t_2) \in B_2|\xi(t_1) \in B_1\}$ с использованием формулы полной вероятности необходимо проинтегрировать переходную вероятность $\mathbf{P}(x_1,t_1,t_2,x_2)$ по распределению случайной величины $\xi(t_1)$, что дает

$$\mathbf{P}\{\xi(t_2) \in B_2|\xi(t_1) \in B_1\} = \int_{B_1}\mathbf{P}(x_1,t_1,t_2,B_2)P(dx_1,t_1).$$

Однако,

$$\mathbf{P}(dx_1, t_1) = \int\limits_R P(x_0, 0, t_1, dx_1)\pi(dx_0).$$

Далее для вычисления $\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2\}$ нужно проинтегрировать переходную вероятность по множеству B_2, что дает

$$\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2\} = \int\limits_{B_2} P(x_1, t_1, t_2, dx_2) \int\limits_{B_1} P(x_0, 0, t_1, dx_1) \int\limits_R \pi(dx_0).$$

Продолжая эти вычисления до $l = k$, получаем соотношение (1.2.16). ■

Если переходная вероятность и начальное распределение вероятностей процесса $\xi(t)$ имеют плотности,

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B | \xi(s) = x\} = \int\limits_B p(x, s, t, y)dy$$

$$\pi(B) = \int\limits_B p(x_0)dx_0$$

то и конечномерное распределение имеет плотность, вычисляемую по формуле

$$p_{t_1,\dots,t_k}(x_1, \dots, x_k) = \int\limits_R \left\{ \prod_{i=1}^{k} p(x_{i-1}, t_{i-1}, t_i, x_i) \right\} p(x_0)dx_0. \qquad (1.2.17)$$

Рассмотрим некоторые примеры Марковских процессов.

П р и м е р 1.2.11 Рассмотрим последовательность бросаний игральной кости, и пусть случайные величины $x_1, \dots, x_n, \dots$ соответственно, есть число очков, выпавшее на грани при n - ом бросании. Введем последовательность случайных величин по правилу

$$\xi(n) = \max_{k \le n} x_k.$$

Показать, что последовательность $\xi(n)$ - Марковская и определить для нее переходную вероятность.

Р е ш е н и е Пусть при некотором n, $\xi(n) = k$, где k - число от 1 до 6. При последующих бросаниях значение ξ не может уменьшится и условные вероятности для $\xi(n+1)$ равны

$$\mathbf{P}\{\xi(n+1) = l | \xi(n) = k\} = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad l < k, \\ \dfrac{6-k}{6}, & \text{при} \quad 6 \ge l > k, \\ \dfrac{k}{6}, & \text{при} \quad l = k. \end{cases}$$

В силу независимости результатов бросаний, условная вероятность перехода зависит лишь от $k = \xi(n)$ и не зависит от последовательности предыдущих значений ξ. Итак в данном случае последовательность является Марковской, а переходная вероятность описывается матрицей P, элементы которой равны

$$P_{ij} = \mathbf{P}\{\xi(n+1) = i | \xi(n) = j\}.$$

■

З а м е ч а н и е Данная случайная последовательность относится к классу дискретных цепей Маркова с конечным множеством состояний. Более подробно данный класс последовательностей изучается в Главе 2.

Следующий пример относится к классу Марковских случайных функций.

П р и м е р 1.2.12 Показать, что процесс Броуновского движения - марковский.

Р е ш е н и е В Примере 1.2.6 мы нашли плотность конечномерного распределения для процесса Броуновского движения. Воспользуемся формулой (1.2.8) для вычисления плотности переходной вероятности,

$$p_\xi(t_k; x_k|\xi(t_1) = x_1, ..., \xi(t_{k-1}) = x_{k-1}) = \frac{p_\xi(t_1, ..., t_k;\ x_1, ..., x_k)}{p_\xi(t_1, ..., t_{k-1};\ x_1, ..., x_{k-1})} =$$

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{(2\pi(t_i - t_{i-1}))^{1/2}}\, exp\left\{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(2\pi(t_i - t_{i-1}))^{1/2}}\, exp\left\{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right\}} =$$

$$\frac{1}{(2\pi(t_k - t_{k-1}))^{1/2}}\, exp\left\{-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})}\right\} = p_\xi(t_k; x_k|\xi(t_{k-1}) = x_{k-1}).$$

Таким образом процесс Броуновского движения - Марковский. ∎

В следующем примере мы получим признак того, что гауссовский процесс является Марковским.

П р и м е р 1.2.13 Рассмотрим гауссовский процесс с $m_\xi(t) = 0$, $R_\xi(t, t) > 0$, обладающий Марковским свойством. Показать, что это возможно тогда и только тогда, когда ковариационная функция процесса удовлетворяет при $t_1 \le t_2 \le t_3$ равенству

$$R_\xi(t_1, t_3) = \frac{R_\xi(t_1, t_2) R_\xi(t_2, t_3)}{R_\xi(t_2, t_2)}. \tag{1.2.18}$$

Р е ш е н и е Покажем необходимость. По теореме о нормальной корреляции (см. Пример 5.4.2 и формулу (5.4.4), примененной к совокупности гауссовских случайных величин $\{\xi(t), \xi(s)\}$ имеем

$$\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(s) = x\} = \frac{R_\xi(s, t)}{R_\xi(s, s)} x.$$

Далее с использованием соотношения (1.2.15) вычисляем

$$R_\xi(t_1, t_3) = \mathbf{M}\xi(t_1)\xi(t_3) = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi(t_1)\xi(t_3)|\xi(t_2)\}\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi(t_1)|\xi(t_2)\}\mathbf{M}\{\xi(t_3)|\xi(t_2)\}\}.$$

И, наконец, подставляя в эту формулу выражение для условного математического ожидания получаем

$$R_\xi(t_1, t_3) = \mathbf{M}\left\{\left(\frac{R_\xi(t_1, t_2)}{R_\xi(t_2, t_2)}\right)\xi(t_2)\left(\frac{R_\xi(t_2, t_3)}{R_\xi(t_2, t_2)}\right)\xi(t_2)\right\} =$$

$$\left(\frac{R_\xi(t_1, t_2) R_\xi(t_2, t_3)}{(R_\xi(t_2, t_2))^2}\right)\mathbf{M}(\xi(t_2))^2 = \frac{R_\xi(t_1, t_2) R_\xi(t_2, t_3)}{R_\xi(t_2, t_2)}.$$

Справедливо и обратное утверждение. Гауссовский процесс, ковариационная функция, которого удовлетворяет соотношению (1.2.18), является Марковским. Для того, чтобы убедиться в этом покажем вначале что при $t_1 \le t_2 \le ... \le t_{n-1} \le t_n$ выполнено соотношение

$$\mathbf{M}\{\xi(t_n)|\xi(t_1), ..., \xi(t_{n-1})\} = \mathbf{M}\{\xi(t_n)|\xi(t_{n-1})\}. \tag{1.2.19}$$

Рассмотрим случай $n = 3$, то есть определим $\mathbf{M}\{\xi(t_3)|\xi(t_1), \xi(t_2)\}$. Применим векторный вариант теоремы о нормальной корреляции приняв обозначения

$$\xi = \xi(t_3), \quad \eta = (\xi(t_1), \xi(t_2))$$

$$d_{\xi\,\eta} = (\mathbf{cov}\{\xi(t_3),\xi(t_1)\},\mathbf{cov}\{\xi(t_3),\xi(t_2)\}) = (R_\xi(t_3,t_1),R_\xi(t_3,t_2)),$$

$$d_{\eta\,\eta} = \begin{pmatrix} \mathbf{cov}\{\xi(t_1),\xi(t_1)\} & \mathbf{cov}\{\xi(t_1),\xi(t_2)\} \\ \\ \mathbf{cov}\{\xi(t_1),\xi(t_2)\} & \mathbf{cov}\{\xi(t_2),\xi(t_2)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\xi(t_1,t_1) & R_\xi(t_1,t_2) \\ \\ R_\xi(t_1,t_2) & R_\xi(t_2,t_2) \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом $m_\xi = 0$ и условия (1.2.18) получаем

$$\mathbf{M}\{\xi(t_3)|\xi(t_1),\xi(t_2)\} = \mathbf{M}\{\xi|\eta\} = d_{\xi\,\eta}d^{-1}_{\eta\,\eta}\eta =$$

$$\frac{[R_\xi(t_1,t_3)R_\xi(t_2,t_2) - R_\xi(t_1,t_2)R_\xi(t_2,t_3)]\xi(t_1) + [R_\xi(t_2,t_3)R_\xi(t_1,t_1) - R_\xi(t_1,t_3)R_\xi(t_1,t_2)]\xi(t_2)}{R_\xi(t_1,t_1)R_\xi(t_2,t_2) - R^2_\xi(t_1,t_2)} =$$

$$\frac{R_\xi(t_2,t_3)}{R_\xi(t_2,t_2)}\xi(t_2) = \mathbf{M}\{\xi(t_3)|\xi(t_2)\},$$

$$\mathbf{cov}\{\xi(t_3)|\xi(t_1),\xi(t_2)\} = R_\xi(t_3,t_3) - \frac{R^2_\xi(t_2,t_3)}{R_\xi(t_2,t_2)}.$$

Таким образом достаточность условия (1.2.18) доказана для $n = 3$ и далее доказательство проводится по индукции. Предположим, что соотношение (1.2.19) верно для любого числа моментов времени не большего, чем $n-1$. Определим $\mathbf{M}\{\xi(t_n)|\xi(t_1,...,\xi(t_{n-2}),\xi(t_{n-1})\}$. По теореме о нормальной корреляции имеем

$$\mathbf{M}\{\xi(t_n)|\xi(t_1),...,\xi(t_{n-2}),\xi(t_{n-1})\} = \mathbf{M}\{\xi(t_n)|\xi(t_1),...,\xi(t_{n-2})\} + d_{\xi\,\eta}d^{-1}_{\eta\,\eta}\left(\xi(t_{n-1}) - \mathbf{M}\{\xi(t_{n-1})|\xi(t_1),...,\xi(t_{n-2})\}\right).$$

По предположению индукции имеем соотношения

$$\mathbf{M}\{\xi(t_n)|\xi(t_1),...,\xi(t_{n-2})\} = \frac{R_\xi(t_{n-2},t_n)}{R_\xi(t_{n-2},t_{n-2})}\xi(t_{n-2}),$$

$$\mathbf{M}\{\xi(t_{n-1})|\xi(t_1),...,\xi(t_{n-2})\} = \frac{R_\xi(t_{n-2},t_{n-1})}{R_\xi(t_{n-2},t_{n-2})}\xi(t_{n-2}),$$

$$d_{\xi\,\eta}d^{-1}_{\eta\,\eta}\xi(t_{n-1}) = \frac{R_\xi(t_{n-1},t_n)}{R_\xi(t_{n-1},t_{n-1})}\xi(t_{n-1}),$$

поэтому с учетом (1.2.18) получаем

$$\mathbf{M}\{\xi(t_n)|\xi(t_1),...,\xi(t_{n-2}),\xi(t_{n-1})\} =$$

$$\frac{R_\xi(t_{n-2},t_n)}{R_\xi(t_{n-2},t_{n-2})}\xi(t_{n-2}) + \frac{R_\xi(t_{n-1},t_n)}{R_\xi(t_{n-1},t_{n-1})}\xi(t_{n-1}) - \frac{R_\xi(t_{n-1},t_n)}{R_\xi(t_{n-1},t_{n-1})}\frac{R_\xi(t_{n-2},t_{n-1})}{R_\xi(t_{n-2},t_{n-2})}\xi(t_{n-2}) =$$

$$\frac{R_\xi(t_{n-1},t_n)}{R_\xi(t_{n-1},t_{n-1})}\xi(t_{n-1}) = \mathbf{M}\{\xi(t_n)|\xi(t_{n-1})\}.$$

Поскольку условное математическое ожидание гауссовской случайной величины есть снова гауссовская случайная величина, то тем самым показано, что условная вероятность

$$\mathbf{P}\{\xi(t_n)\in B_n|\xi(t_1),...,\xi(t_{n-1})\} = \mathbf{P}\{\xi(t_n)\in B_n|\xi(t_{n-1})\}$$

есть гауссовская и параметры распределения зависят лишь от $\xi(t_{n-1})$. По определению это и означает Марковость, что и завершает доказательство.

■

З а м е ч а н и е   Теперь, для того чтобы проверить Марковское свойство процесса Броуновского движения достаточно убедится, что его ковариационная функция $R_\xi(t,s) = \min(t,s)$ удовлетворяет равенству

$$\min(t_1,t_3) = \frac{\min(t_1,t_2)\min(t_2,t_3)}{\min(t_2,t_2)},$$

которое очевидно при $t_1 \le t_2 \le t_3$.

1.2.5 Диффузионные процессы

Важным подклассом марковских процессов являются процессы с непрерывным временем и имеющие непрерывное множество состояний. Такие процессы являются естественной моделью для описания эволюции динамических систем, подверженных случайным воздейсвиям. Наиболее изученными в настоящее время, являются *процессы диффузионного типа* или просто *диффузионные процессы.*

О п р е д е л е н и е 1.2.9 Случайный однородный марковский процесс $\xi(t)$ называется *процессом диффузионного типа,* если его переходная вероятность $\mathbf{P}(x,t,B)$ удовлетворяет следующим условиям: для любого $\delta > 0$ и $x \in R$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x|>\delta}\mathbf{P}(x,t,dy)=0,$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x|\le\delta}(y-x)\mathbf{P}(x,t,dy)=b(x), \tag{1.2.20}$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x|\le\delta}(y-x)^2\mathbf{P}(x,t,dy)=\sigma^2(x).$$

■

З а м е ч а н и е Первое условие обеспечивает (**P**- п.н.) непререрывность траекторий процесса. Функция $b(x)$ характеризует среднюю скорость смещения за малое время из состояния $\xi(0) = x$ и называется *коэффициентом сноса* или *дрейфа.* Функция $\sigma(x)$ характериризует среднеквадратичское отклонение процесса от его усредненного движения, определяемого коэффициентом сноса, и называется *коэффициентом диффузии.*

Если для процесса $\{\xi(t),\, t \ge 0\}$ задана его переходная вероятность и соответствующие пределы в (1.2.20) определены, то тем самым определены его коэффициенты сноса и диффузии. Однако, центральный результат теории диффузионных процессов состоит в том, что задав достаточно регулярные функции $b(x)$ и $\sigma(x)$, можно однозначно определить и переходную вероятность процесса. Тем самым, локальное описание свойств траектории на языке коэффициентов сноса и диффузии позволяет определить и общие свойства процесса на всей временной оси. Метод построения переходной вероятности предложен А.Н. Колмогоровым. Общая теория диффузионых процессов весьма сложна, поэтому мы изложим этот метод не вдаваясь в технические детали.

Пусть $\mathbf{P}(x,t,B)$ имеет плотность, то есть

$$\mathbf{P}(x,t,B)=\int\limits_B p(x,t,y)dy,$$

и функция плотности имеет непрерывные производные $\dfrac{\partial p(x,t,y)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial p(x,t,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 p(x,t,y)}{\partial x^2}$. Тогда $p(x,t,y)$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных

$$\frac{\partial p(x,t,y)}{\partial t}-b(x)\frac{\partial p(x,t,y)}{\partial x}-\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 p(x,t,y)}{\partial x^2}=0.$$

Если коэффициенты сноса и диффузии достаточно регулярны, например, удовлетворяют условию Липшица

$$|b(x)-b(y)|+|\sigma^2(x)-\sigma^2(y)|\le C|x-y|, \tag{1.2.21}$$

и $\sigma^2(x) \ge \sigma > 0$, то уравнение для плотности переходной вероятности имеет единственное решение. Это уравнение называется прямым уравнением Колмогорова.

П р и м е р 1.2.14 Показать, что процесс Броуновского движения является диффузионным Марковским процессом.

Р е ш е н и е Действительно, пусть $\{\xi(t),\, t \geq 0\}$ - процесс Броуновского движения. Его переходная вероятность равна

$$\mathbf{P}(x,t,B) = \int\limits_B \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}}\, exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\} dy.$$

Для вывода соотношений (1.2.20) воспользуемся известными оценками для функции распределения гауссовской случайной величины: если $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, то ее функция распределения $\Phi(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) < \mathbf{P}\{\xi \geq x\} = 1 - \Phi(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{x}.$$

Далее с учетом выражения для гауссовской переходной плотности имеем

$$\frac{1}{t} \int\limits_{|y-x|>\delta} \mathbf{P}(x,t,dy) = \frac{2(1-\Phi(\delta/\sqrt{t})}{t} < \frac{2}{\delta\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\delta^2}{2t}} \to 0,$$

при $t \downarrow 0$, поскольку в этом случае $u = \delta/\sqrt{t} \to \infty$ и $u^{1/2} e^{-u} \to 0$, при $u \to \infty$. Таким образом получаем соотношение

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int\limits_{|y-x|>\delta} \mathbf{P}(x,t,dy) = 0. \tag{1.2.22}$$

Далее, используя замену переменной $z = \dfrac{y-x}{\sqrt{t}}$, вычисляем

$$\frac{1}{t} \int\limits_{|y-x|\leq\delta} (y-x)\mathbf{P}(x,t,dy) = \int\limits_{|z|\leq\delta/\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int\limits_{|z|\leq\delta/\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} d\left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)\Bigg|_{-\delta/\sqrt{t}}^{\delta/\sqrt{t}} = 0.$$

Таким образом

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int\limits_{|y-x|\leq\delta} (y-x)\mathbf{P}(x,t,dy) = 0. \tag{1.2.23}$$

И наконец, используя ту же замену переменной $z = \dfrac{y-x}{\sqrt{t}}$ получаем

$$\frac{1}{t} \int\limits_{|y-x|\leq\delta} (y-x)^2\mathbf{P}(x,t,dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|z|\leq\delta/\sqrt{t}} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} \to 1,$$

поскольку при $t \to 0$ множество $\left\{z : |z| \leq \dfrac{\delta}{\sqrt{t}}\right\} \uparrow R$. Тем самым доказано равенство

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int\limits_{|y-x|\leq\delta} (y-x)^2\mathbf{P}(x,t,dy) = 1. \tag{1.2.24}$$

Таким образом коэффициент сноса процесса Броуноского движения равен нулю, а коэффициент диффузии постоянен.

Плотность переходной вероятности процесса броуновского движения удовлетворяет уравнению, известному в физике, как *уравнение диффузии*

$$\frac{\partial p(x,t,y)}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(x,t,y)}{\partial x^2} = 0, \quad s < t,$$

откуда собственно и пошло название данного класса процессов. ■

В главе 3 мы рассматриваем класс диффузионных процессов, которые порождаются с помощью стохастических дифференциальных уравнений.

1.2.6 Процесс белого шума

Выше в примерах 1.1.7 и 1.1.8 рассматривались процессы дискретного белого шума. Модель такого процесса хорошо описывает последовательность хаотических независимых воздействий. Для описания аналогичных процессов в непрерывном времени используется модель процесса "белого шума". В данном разделе мы не даем строгого опрделения, а лишь описываем некоторые свойства данного процесса. Строгая математическая теория данного класса процессов строится на основе процесса Броуновского движения и стохастического интегрирования. Эти вопросы детально рассматриваются в Главе 3. Термин "белый шум" применяется для описания флуктуаций, имеющих следующие свойства:

а) случайная величина $\xi(t)$ имеет при любом $t \in T$ приблизительно гауссовское распределение;

б) случайные величины $\xi(t)$, $\xi(s)$ некоррелированы при $|t-s| > \delta_0$, когда δ_0 мало.

Можно попытаться формально построить такой процесс, задав семейство его конечномерных распределений, а именно: предположив гауссовость задать ковариационную функцию вида

$$R_\xi(t,s) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad t = s, \\ \\ 0, & \text{при} \quad t \neq s. \end{cases}$$

Этот процесс удовлетворяет условиям согласованности теоремы Колмогорова, поскольку ковариационная функция неотрицательно определена. Однако процесс с такими конечномерными распределениями должен обладать весьма нерегулярными траекториями, например, для любых $t, s \in T$

$$\mathbf{M}\{|\xi(t) - \xi(s)|^2\} = 2,$$

поэтому процесс не является непрерывным в среднем квадратическом. Кроме того вся его энергия "сконцентрирована" на бесконечных частотах, так что если пропустить процесс $\xi(t)$ через фильтр с конечной шириной полосы, то на выходе сигнал будет равным нулю. Эти проблемы являются следствием требования отсутствия корреляции даже для очень близких моментов времени. Можно ослабить эти требования и выбрать ковариационную функцию вида

$$R_\xi(t,s) = \sigma^2 e^{-\alpha|t-s|} = C(t-s).$$

Преобразование Фурье этой функции равно

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} C(x)dx = \frac{2\sigma^2/\alpha}{1 + (\lambda^2/\alpha^2)} > 0,$$

поэтому по Теореме 3.1.1 функция $R_\xi(t,s)$ неотрицательно определена, и следовательно, существует гауссовский процесс с данной ковариационной функцией. Сечения этого процесса будут слабо коррелированы при $|t-s| \gg 1/\alpha$, поэтому, чтобы ослабить корреляцию и добится равномерного распределения спектральной плотности устремим $\alpha \to \infty$, сохраняя $2\sigma^2/\alpha = const = 1$. Предельная спектральная плотность будет равна 1, а обратное преобразование Фурье есть δ - функция. Можно проверить, что случайный процесс $\xi(t)$, для которого выполняются такие соотношения должен обладать следующими свойствами:

а) $\xi(t)$ - гауссовский процесс;

б) $\mathbf{M}\{\xi(t)\} = 0, \quad \mathbf{D}\{\xi(t)\} = \infty;$

с) $\mathbf{cov}\{\eta(t), \eta(s)\} = 0, \quad t \neq s.$

О п р е д е л е н и е 1.2.10 Гипотетический процесс, обладающий вышеперечисленными свойствами называется *белым шумом.* ■

Хотя сам процесс $\eta(t)$ не может быть корректно определен, тем не менее существует процесс, обладающий свойствами интеграла от этого процесса. Действительно, предположим, что каким-то образом определен процесс

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \xi(s)ds.$$

Тогда при $s < t$

$$\mathbf{cov}\{\varepsilon(t), \varepsilon(s)\}) = \mathbf{M}\{\varepsilon(t)\varepsilon(s)\} = \mathbf{M}\{\int_0^t \xi(u)du \int_0^s \xi(v)dv\} =$$

$$\int_0^t \int_0^s \mathbf{M}\{\xi(u)\xi(v)\}dudv = \int_0^t \int_0^s \delta(u-v)dudv = \int_0^t I\{v : v \leq s\}dv = s.$$

Таким образом $\mathbf{cov}\{\varepsilon(t), \varepsilon(s)\} = \min\{t, s\} = \mathbf{cov}\{\xi(t), \xi(s)\}$, где $\{\xi(t),\, t \geq 0\}$ - процесс Броуновского движения. Теперь становится ясна причина некорректности определения процесса "белого шума" - он есть формальная производная процесса Броуновского движения. Однако, хотя траектории процесса Броуновского движения непрерывны, они являются весьма нерегулярными и нигде не дифференцируемы. Тем не менее можно придать вполне строгий смысл результату воздействия процесса "белого шума" на динамическую систему, если описывать это воздействие с помощью стохастического интеграла по процессу Броуновского движения. Результат такого воздействия - есть некоторый процесс диффузионного типа, который, в свою очередь, описывается стохастическим дифференциальным уравнением. Теория таких процессов рассматривается в Главе 3.

1.2.7 Задачи для самостоятельного решения

1.2.1 Пусть $\xi(t)$ - гауссовский процесс с параметрами $m_\xi(t)$, $R_\xi(t,s)$. Вывести соотношение для плотности двумерного распределения. Привести условие существования плотности двумерного распределения.

О т в е т

$$p_\xi(t_1, t_2;\, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_\xi(t_1,t_1)R_\xi(t_2,t_2) - R_\xi^2(t_1,t_2)}}$$

$$exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_\xi^2(t_1,t_2))}\left(\frac{(x_1 - m_\xi(t_1))^2}{R_\xi(t_1,t_1)} - \frac{2\rho(x_1 - m_\xi(t_1))(x_2 - m_\xi(t_2))}{\sqrt{R_\xi(t_1,t_1)R_\xi(t_2,t_2)}} + \frac{(x_2 - m_\xi(t_2))^2}{R_\xi(t_2,t_2)}\right)\right\},$$

где

$$\rho_\xi(t_1,t_2) = \frac{R_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{R_\xi(t_1,t_1)R_\xi(t_2,t_2)}}$$

коэффициент корреляции. Плотность существует если $|\rho(t_1,t_2)| < 1$.

У к а з а н и е Воспользоваться (1.2.4) и условием положительной определенности матрицы

$$R_\xi = \begin{pmatrix} R_\xi(t_1,t_1) & R_\xi(t_1,t_2) \\ R_\xi(t_1,t_2) & R_\xi(t_2,t_2) \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Для случайного процесса

$$\xi(t) = X\cos(\omega t + Y).$$

где X, Y - независимы, слчайная величина X имеет распределение с плотностью

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x\,exp\{-\frac{1}{2}x^2\}, & \end{cases}$$

а Y имеет равномерное распределение на $[-\pi, \pi)$, доказать, что процесс $\xi(t)$ является гауссовским и найти его ковариационную функцию. Какими еще свойствами обладает процесс $\xi(t)$?

У к а з а н и е   Убедиться, что совместное распределение случайных величин $A = X\cos Y$, $B = X\sin Y$ - гауссовское. Далее использовать результат Примера 1.2.2.

О т в е т   Процесс $\xi(t)$ является стационарным.

1.2.3 Пусть $\{\xi(t), t \geq 0\}$ - процесс Броуновского движения. Показать, что процесс

$$X(t) = t\xi(t^{-1}),\ t > 0,\ X(0) = 0$$

также является процессом Броуновского движения.

У к а з а н и е   Проверить гауссовость и вычислить ковариационную функцию.

1.2.4 Пусть $\{\xi(t), t \geq 0\}$ - процесс Броуновского движения. Показать, что процесс

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{c}}\xi(\mathrm{c}t)$$

также является процессом Броуновского движения.

У к а з а н и е   Проверить гауссовость и вычислить ковариационную функцию.

1.2.5 Пусть $\{\xi(t), t \geq 0\}$ - процесс Броуновского движения. Процесс

$$Z(t) = \xi(t) - t\xi(1)$$

называется *Броуновским мостом* и удовлетворяет соотношению $Z(0) = Z(1) = 0$. Найти $\mathbf{cov}\{Z(t_1), Z(t_2)\}$.

О т в е т

$$\mathbf{cov}\{Z(t_1), Z(t_2)\} = \min(t_1, t_2) - t_1 t_2.$$

1.2.6 Пусть $\{Z(t), t \geq 0\}$ - Броуновский мост (см. Задачу 1.2.5

Определим процесс

$$Y(t) = (1+t)Z(\frac{t}{1+t}),\ t \geq 0.$$

Показать, что $\{Y(t), t \geq 0\}$ - есть процесс Броуновского движения.

1.2.7 Пусть $\{\xi(t), t \geq 0\}$ - процесс Броуновского движения. Процесс

$$Z(t) = \int\limits_0^t \xi(s)ds.$$

Найти ковариационную функцию процесса $Z(t)$.

О т в е т

$$\mathbf{cov}\{Z(t), Z(s)\} = \frac{ts}{2}\min(t, s) - \frac{1}{6}\min(t^3, s^3).$$

1.2.8 Какие из нижеперечисленных функций являются неотрицательно определенными

а) $C(t,s) = \begin{cases} 1 - |t-s|, \; |t-s| \le 1, \\ \\ 0, \; |t-s| > 1 \end{cases}$;

б) $C(t,s) = exp\{-i\omega(t-s)\}$, $-\infty < t, s < \infty$, $\omega \in R$;

в) $C(t,s) = exp\{|t-s|\}$, $-\infty < t, s < \infty$;

г) $C(t,s) = \begin{cases} 1, \; |t-s| \le 1, \\ \\ 0, \; |t-s| > 1 \end{cases}$;

д) $C(t,s) = exp\{-|t-s|\}$, $-\infty < t, s < \infty$

е) $C(t,s) = \min(t,s)$, $t, s \ge 0$

ж) $C(t,s) = \min(t,s) - ts$, $t, s \in [0,1]$.

О т в е т а), б), д), е), ж).

У к а з а н и е В случаях а), б) функция $C(t,s)$ соответствует ковариационной функции стационарных случайных процессов, расссмотренных ранее. См. Примеры 1.2.9 и 1.2.7.

г) д) Можно проверить неотрицательную определенность ковариационной функции путем вычисления ее преобразования Фурье. См. Теорему 3.1.1.

В случае в) нарушается неравенство $C(t,t) \ge |C(t,s)|$. Объяснить почему должно выполняться такое неравенство.

Случаи е), ж) также соответствуют ковариационным функциям уже изученных случайных процессов. См. Пример 1.2.4 и задачу 1.2.5.

1.2.9 Доказать теорему 1.2.2 для случая действительной ковариационной функции.

У к а з а н и е См. замечание после формулировки теоремы.

1.2.10 Доказать теорему 1.2.3.

У к а з а н и е См. замечание после формулировки теоремы.

1.2.11 Доказать теорему 1.2.4.

У к а з а н и е См. замечание после формулировки теоремы.

1.2.12 Доказать свойства ковариационной функции стационарного в широком смысле процесса.

У к а з а н и е См. Теорему 1.2.1 и замечание к ней.

1.2.13 Доказать, что для Марковского процесса при любых B_1, $B_2 \in \mathcal{B}(R)$ и $s < t < u$ выполняется соотношение (1.2.15)

$$\mathbf{P}\{\xi(s) \in B_1, \xi(u) \in B_2 | \xi(t)\} = \mathbf{P}\{\xi(s) \in B_1 | \xi(t)\} \mathbf{P}\{\xi(u) \in B_2 | \xi(t)\}. (\mathbf{P} - \text{п.н.})$$

У к а з а н и е Воспользоваться соотношением (1.2.14).

1.2.14 Пусть $\{\xi(t), \, t \ge 0\}$ - марковский процесс, со значениями в R. Привести пример, функции $F(x)$ такой, что процесс $F(\xi(t))$ не является Марковским. Показать, что если функция $F(\cdot)$ взаимнооднозначна, то процесс $F(\xi(t))$ обладает Марковским свойством.

1.2.15 Пусть $\{\xi(t), t \geq 0\}$ - процесс Броуновского движения. Показать, что процесс

$$Z(t) = \xi(t) - t\xi(1)$$

является марковским. Найти его среднее значение и ковариационную функцию.

О т в е т

$$m_Z(t) = 0, \quad R_Z(t,s) = \min(t,s) - ts.$$

У к а з а н и е Проверить условие (1.2.18).

1.2.16 (Продолжение) Показать, что $Z(t)$ и $Z(1-t)$ имеют одинаковое распределение.

1.2.17 Вывести соотношение (1.2.17) из общей формулы (1.2.16).

1.2.18 Пусть задан Марковский процесс $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ с переходной вероятностью $\mathbf{P}(x,t,B)$, имеющей плотность

$$p(x,t,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}}\, exp\left\{-\frac{(y-x-at)^2}{2t}\right\}.$$

Показать, что данный процесс является диффузионным и найти для него коэффициенты сноса и диффузии.

О т в е т $b(x) = a, \quad \sigma = 1.$

У к а з а н и е При вычислении коэффициента сноса находим, что

$$\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x|\leq\delta}(y-x)\mathbf{P}(x,t,dy) = \int\limits_{|z|\leq\delta/\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}ze^{-\frac{(z-a\sqrt{t})^2}{2}}dz.$$

далее используем замену переменной $v = z - a\sqrt{t}$ и разбиваем интеграл на сумму двух интегралов

$$a\int\limits_{-(\delta/\sqrt{t})-a\sqrt{t}}^{(\delta/\sqrt{t})-a\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv \to a, \quad \text{при} \quad t\to\infty,$$

и

$$\int\limits_{-(\delta/\sqrt{t})-a\sqrt{t}}^{(\delta/\sqrt{t})-a\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}ve^{-\frac{v^2}{2}}dv \to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

Коэффициент диффузии вычисляется аналогично Примеру 1.2.14.

Глава 2

Случайные последовательности

2.1 Стационарные в широком смысле случайные последовательности (ССП)

Понятие стационарности трактуется в теории случайных процессов в узком и широком смысле. Случайная последовательность или процесс называются стационарными в узком смысле если все их вероятностные характеристики не зависят от времени. Стационарность в широком смысле предъявляет к процессу значительно более слабые требования: предполагается лишь независимость от текущего времени первых двух моментов: математического ожидания и ковариационной функции. Более того, можно построить содержательную теорию стационарных в штроком смысле процессов лишь на основе этих двух характеристик или эквивалентных им. Тем не менее, весьма удивительно насколько многого можно достигнуть зная лишь свойства ковариационной функции и матожидания. Так эта теория позволяет решить задачи оптимальной линейной фильтрации, интерполяции и экстраполяции, задачи оптимального управления для линейных систем с квадратичным критерием качества. Кроме того, сами вероятностные характеристики стационарного в широком смысле процесса весьма просто восстанавливаются по наблюдениям, что само по себе важно при построении моделей реальных процессов. Эти обстоятельства делают теорию стационарных (в широком смысле) процессов весьма популярной в различных приложениях.

2.1.1 Основные определения и моментные характеристики ССП

Пусть задано пространство $H^2 = H^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ комплекснозначных случайных величин $\xi = \alpha + i\beta$, α, $\beta \in R$ таких, что $\mathbf{M}\{|\xi|^2\} < \infty$, где $|\xi|^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Для случайных величин $\xi, \eta \in H^2$ можно определить скалярное произведение и норму

Определение 2.1.1

$$(\xi, \eta) = \mathbf{M}\{\xi\bar{\eta}\}, \tag{2.1.1}$$

где $\bar{\eta} = \alpha - i\beta$ - комплексно-сопряженная величина к $\eta = \alpha + i\beta$, и

$$||\xi|| = (\xi, \xi)^{1/2}. \tag{2.1.2}$$

■

Пространство H^2 со скалярным произведением (2.1.1) и нормой (2.1.2) является полным и в соответствии с терминологией, принятой в функциональном анализе называется гильбертовым пространством случайных величин, рассматриваемых на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Определение 2.1.2 *Ковариацией случайных величин* ξ, $\eta \in H^2$

$$\mathbf{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\xi)\overline{(\eta - \mathbf{M}\eta)}\}. \tag{2.1.3}$$

■

Из соотношений (2.1.1), (2.1.3) следует, что при $\mathbf{M}\{\xi\} = \mathbf{M}\{\eta\} = 0$

$$\mathbf{cov}\{\xi, \eta\} = (\xi, \eta). \tag{2.1.4}$$

Рассмотрим последовательность комплексных случайных величин $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathcal{Z}}$, где $\mathcal{Z} = \{... - 1, 0, 1, 2...\}$ - множество всех целых чисел, и $\xi_n \in H^2$.

О п р е д е л е н и е 2.1.3 Последовательность $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathcal{Z}}$ называется *стационарной в широком смысле* (в дальнейшем просто стационарной), если для любых $n, k \in \mathcal{Z}$

$$\mathbf{M}\{\xi_n\} = \mathbf{M}\{\xi_0\}, \quad \mathbf{cov}\{\xi_{k+n}, \xi_k\} = \mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_0\}. \tag{2.1.5}$$

■

Далее для удобства изложения и не умаляя общности мы полагаем $\mathbf{M}\{\xi_0\} = 0$. Это предположение позволяет отождествить ковариацию со скалярным произведением и применять методы и результаты теории гильбертовых пространств.

О п р е д е л е н и е 2.1.4 Функция

$$R(n) = \mathbf{cov}(\xi_n, \xi_0), \quad n \in \mathcal{Z}, \tag{2.1.6}$$

называется *ковариационной функцией стационарной (в широком смысле) последовательности* ξ.

Если $R(0) = \mathbf{M}\{|\xi_0|^2\} \neq 0$, то функция

$$\rho(n) = \frac{R(n)}{R(0)}, \quad n \in \mathcal{Z}, \tag{2.1.7}$$

называется *корреляционной функцией стационарной (в широком смысле) последовательности* ξ. ■

Ковариационная функция обладает следующими свойствами, которые следуют непосредственно из Определения 2.1.4 и Теорем 1.2.1, 1.2.5.

1. Ковариационная функция является неотрицательно-определенной, то есть для любых комплексных чисел $\{a_1, ..., a_m\}$ и $t_1, ..., t_m \in \mathcal{Z}, \quad m \geq 1$, имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_i \bar{a}_j R(t_i - t_j) \geq 0. \tag{2.1.8}$$

2.

$$R(0) = \mathbf{M}\{|\xi_0|^2\} \geq 0;$$

3.

$$R(-n) = \mathbf{M}\{\xi_0 \bar{\xi}_n\} = \mathbf{M}\{\overline{\xi_n \bar{\xi}_0}\} = \overline{\mathbf{M}\{\xi_n \bar{\xi}_0\}} = \overline{R(n)}$$

;

4.

$$|R(n)| = |\mathbf{M}\{\xi_n \bar{\xi}_0\}| = (\xi_n, \xi_0) \leq R(0); \tag{2.1.9}$$

5.

$$|R(n) - R(m)|^2 \leq 2R(0)[R(0) - Re R(n-m)]. \tag{2.1.10}$$

2.1.2 Примеры стационарных (в широком смысле) последовательностей

Приведем примеры некоторых наиболее часто встречающихся стационарных (в широком смысле) последовательностей.

П р и м е р 2.1.1 Пусть $\xi_n = \xi_0 g(n)$, где $\mathbf{M}\{\xi_0\} = 0$, $\mathbf{M}\{\xi_0^2\} = 1$ и $g = g(n)$ - некоторая комплекснозначная детерминированная функция. При каких функциях $g(n)$ последовательность ξ_n стационарна? Определить ковариационную функцию такой последовательности.

Р е ш е н и е Последовательность $\xi = (\xi_n)$ имеет $\mathbf{M}\{\xi_n\} = 0$ и $\mathbf{cov}\{\xi_{n+k}, \xi_k\} = g(n+k)\overline{g(k)}$, и следовательно, будет стационарной в широком смысле если и только если функция $g(n+k)\overline{g(k)}$ зависит лишь от n. Отсюда следует, что

$$g(n+k)\overline{g(k)} = g(n)\overline{g(0)}, \quad \forall n \in \mathcal{Z},$$

и следовательно,

$$\frac{g(k+1)}{g(k)} = \frac{\overline{g(0)}}{\overline{g(1)}} = \alpha = const\,.$$

Поэтому

$$g(k) = g(0)\alpha^k.$$

Далее, поскольку

$$\mathbf{M}\{|\xi_n|^2\} = \mathbf{M}\{|\xi_0|^2\}|g(0)|^2|\alpha|^n = const,$$

то $|\alpha|^n = |\alpha| = 1$ и существует действительное число $\lambda \in [-\pi, \pi)$ такое, что $\alpha = e^{i\lambda}$. Таким образом, последовательность случайных величин $\xi_n = \xi_0 g(n)$ является стационарной только если $g(n) = g(0)\alpha^n$, то есть

$$\xi_n = \xi_0 g(0) e^{i\lambda n}$$

и ее ковариационная функция равна

$$R(n) = \mathbf{M}\{|\xi_0|^2\}|g(0)|^2 e^{i\lambda n} = |g(0)|^2 e^{i\lambda n}.$$

■

Следующий пример обобщает предыдущий.

П р и м е р 2.1.2 [Почти периодическая последовательность] Пусть задан набор комплексных случайных величин $\{z_1, ..., z_N\} \in H^2$, с нулевыми средними и удовлетворяющими условию ортогональности, то есть

$$\mathbf{M} z_i \bar{z}_j = \begin{cases} \sigma_i^2 > 0, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{2.1.11}$$

Пусть $\{\lambda_1, ..., \lambda_N\}$ некоторые различные действительные числа из полуинтервала $[-\pi, \pi)$.

Последовательность случайных величин ξ_n определена соотношением

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\lambda_k n}. \tag{2.1.12}$$

Показать, что последовательность ξ_n - стационарна.

Р е ш е н и е Последовательность ξ_n имеет имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию

$$\begin{aligned} R(n) = \mathbf{M}\left\{ \left(\sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\lambda_k(n+m)}\right) \overline{\left(\sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\lambda_k m}\right)} \right\} = \mathbf{M}\left\{ \sum_{k,l=1}^{N} z_k \bar{z}_l e^{i\lambda_k(n+m)} e^{-i\lambda_l(m)} \right\} = \\ \sum_{k,l=1}^{N} \mathbf{M}\{z_k \bar{z}_l\} e^{i\lambda_k(n+m)} e^{-i\lambda_l(m)} = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 e^{i\lambda_k n}, \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

зависящую только от n. Следовательно, последовательность $\xi = (\xi_n)$ - стационарна. ■

Данный пример можно обобщить, взяв

$$\xi_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k n}, \tag{2.1.14}$$

со случайными величинами z_k, удовлетворяющими условию (2.1.11). Если ряд из σ_k^2 сходится, то есть $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$, то последовательность

$$S^{M,N} = \sum_{k=-M}^{N} z_k e^{i\lambda_k n}$$

фундаментальна в среднеквадратическом смысле, и поэтому ряд в правой части (2.1.14) сходится в среднеквадратическом смысле при любом $n \in \mathcal{Z}$.

Ковариационная функция стационарной последовательности ξ равна

$$R(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k^2 e^{i\lambda_k n}. \tag{2.1.15}$$

Введем функцию

$$F(\lambda) = \sum_{\{k:\lambda_k \le \lambda\}} \sigma_k^2, \tag{2.1.16}$$

которая является непрерывной справа и имеет на $[-\pi, \pi]$ ограниченную вариацию, и следовательно, определяет неотрицательную счетно-аддитивную меру $F(d\lambda)$ на σ - алгебре борелевских множеств $[-\pi, \pi]$. Ковариационную функцию (2.1.15) можно представить с помощью интеграла Лебега-Стилтьеса по этой мере

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} dF(\lambda). \tag{2.1.17}$$

Представление ковариационной функции интегралом Лебега-Стилтьеса напоминает разложение в интеграл Фурье, а ряд (2.1.14) дает представление стационарной последовательности в виде суммы "гармоник" $e^{i\lambda_k n}$ с "частотой" λ_k и случайными "амплитудами" z_k "интенсивности" $\sigma_k^2 = \mathbf{M}|z_k|^2$. Это представление, конечно, более естественно для процессов в непрерывном времени, однако и в дискретном времени спектральное представление (2.1.16) полностью определяет свойства последовательности.

П р и м е р 2.1.3 [Дискретный белый шум] Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ - последовательность ортонормированных случайных величин, то есть $\mathbf{M}\varepsilon_n = 0$ и

$$\mathbf{M}\varepsilon_i \bar{\varepsilon}_j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \ne j. \end{cases} \tag{2.1.18}$$

Такая последовательность является стационарной и имеет ковариационную функцию

$$R(n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = 0, \\ 0, & \text{если} \quad n \ne 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись соотношением

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} d\lambda = \begin{cases} 2\pi, & \text{если} \quad n = 0, \\ 0, & \text{если} \quad n \ne 0, \end{cases} \tag{2.1.19}$$

мы получаем для ковариационой функции $R(n)$ спектральное представление

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} dF(\lambda), \tag{2.1.20}$$

где

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda, \quad f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi). \tag{2.1.21}$$

Спектральное представление (2.1.21) показывает, что "спектральная" плотность последовательности ε равномерна в интервале $[-\pi, \pi)$, что и послужило основанием для термина "белый шум" по аналогии с радиофизикой, где белым шумом называется шумовой сигнал с равномерным спектром.

Последовательность белого шума позволяет сформировать различные виды стационарных последовательностей.

О п р е д е л е н и е 2.1.5 [Последовательности скользящего среднего] Пусть задана последовательность белого шума $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ и последовательность комплексных чисел a_k, $k \in \mathcal{Z}$ таких, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty. \tag{2.1.22}$$

Последовательность

$$\xi_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} \tag{2.1.23}$$

называется последовательностью *двустороннего скользящего среднего* из последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_n)$.

Если $a_k = 0$ при $k < 0$, то есть

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{2.1.24}$$

то последовательность называется последовательностью *одностороннего скользящего среднего* из последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_n)$.

Наконец, если $a_k = 0$ при $k < 0$ и $k > p$, то есть

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{p} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{2.1.25}$$

то последовательность называется последовательностью *скользящего среднего порядка p*. ■

П р и м е р 2.1.4 Показать, что последовательности скользящего среднего действительно удовлетворяют условиям стационарности.

Р е ш е н и е Достаточно рассмотреть случай двусторонней последовательности скользящего среднего, так как остальные являются ее частными случаями. В силу условия (2.1.22) ряд (2.1.23) сходится в среднеквадратическом смысле и

$$\xi_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} \varepsilon_k,$$

вычисляя ковариационную функцию с учетом свойства ортогональности последовательности белого шума (2.1.18) находим

$$\mathbf{cov}\{\xi_{n+m}, \xi_m\} = \mathbf{M}\left\{ \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+m-k} \varepsilon_k \right) \overline{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} \varepsilon_k \right)} \right\} = \mathbf{M}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{n+m-k} \varepsilon_k \overline{a_{n-l} \varepsilon_l} \right\} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty} \infty a_{n+m-k} \overline{a}_{n-l} \mathbf{M}\{\varepsilon_k \bar{\varepsilon}_l\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+m-k} \bar{a}_{m-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+k} \bar{a}_k. \tag{2.1.26}$$

Ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+k}\bar{a}_k$ сходится поскольку $|a_{n+k}\bar{a}_k| \le |a_{n+k}|^2 + |a_k|^2$, и следовательно, ковариационная функция определена соотношением (2.1.26) и зависит лишь от параметра сдвига n. ■

П р и м е р 2.1.5 Найти спектральное представление для ковариационной функции последовательности скользящего среднего порядка p.

Р е ш е н и е Для последовательности скользящего среднего порядка p ковариационная функция равна

$$R(n) = \sum_{k=0}^{p} a_{n+k}\bar{a}_k$$

и имеет спектральное представление

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda, \tag{2.1.27}$$

со спектральной плотностью

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|P(e^{-i\lambda})|^2, \tag{2.1.28}$$

где

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_p z^p = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k.$$

Чтобы убедиться в этом вычислим

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{p} a_k e^{-i\lambda k} \right) \overline{\left(\sum_{k=0}^{p} a_k e^{-i\lambda k} \right)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} a_l \bar{a}_k e^{-i\lambda(l-k)} d\lambda =$$

$$\sum_{l=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} a_l \bar{a}_k e^{i\lambda(n-l+k)} d\lambda.$$

Воспользовавшись соотношением (2.1.19), замечаем, что интеграл отличен от нуля лишь для слагаемых с номерами (l, k), удовлетворяющими соотношению $n - l + k = 0$ и при фиксированном $k = 0, ..., p$ равен $a_{n+k}\bar{a}_k$. Таким образом

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda = \sum_{k=0}^{p} a_{n+k}\bar{a}_k = R(n).$$

■

О п р е д е л е н и е 2.1.6 [Авторегрессионная схема] Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ - последовательность белого шума. Случайная последовательность подчиняется *авторегрессионной схеме* порядка q, если

$$\xi_n + b_1\xi_{n-1} + ... + b_q\xi_{n-q} = \varepsilon_n. \tag{2.1.29}$$

■

З а м е ч а н и е В отличие от предыдущего случая скользящих средних последовательность ξ задана рекуррентным уравнением, то есть если заданы значения $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}$, то из уравнения (2.1.29) можно последовательно выразить $\xi_n, \xi_{n+1}, ...$ через "начальные значения" $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}$ и $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, ...$

Рассмотрим вопрос существования стационарной последовательности, удовлетворяющей уравнению (2.1.29), в котором ξ_n выражаются через ε_k, $k \le n$.

Т е о р е м а 2.1.1 *Если полином*

$$Q(z) = 1 + b_1 z + ... + b_q z^q \tag{2.1.30}$$

имеет корни, лежащие вне единичного круга, то уравнение авторегрессии (2.1.29) имеет единственное стационарное решение, представимое в виде одностороннего скользящего среднего. При этом ковариационная функция $R(n)$ представима в виде

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda, \tag{2.1.31}$$

где

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|Q(e^{-i\lambda})|^2}. \tag{2.1.32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о Будем искать решение (2.1.29) в виде (2.1.24) одностороннего скользящего среднего, то есть в виде $\xi_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}$. Приравнивая тогда в уравнении (2.1.29) коэффициенты при ε_k, $k = n, n-1, ...$, получаем следующую рекуррентную систему

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 + b_1 a_0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_l + b_1 a_{l-1} + ... + b_l a_0 = 0 \quad \text{при} \quad l \le q \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_l + b_1 a_{l-1} + ... + b_q a_{l-q} = 0, \quad \text{при} \quad l > q. \end{cases} \tag{2.1.33}$$

Введем производящие функции $A(z), B(z)$ последовательностей $\{a_n, b_n\}$

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad Q(z) = \sum_{n=0}^{q} b_n z^n,$$

где $b_0 = 1$. Умножая равенства (2.1.33) на $1, z, z^2, ...$ и суммируя их, получаем уравнение

$$A(z)Q(z) = 1$$

или

$$A(z) = \frac{1}{Q(z)} = 1 + \frac{zC_1(z)}{Q(z)},$$

где $C_1(z)$ - полином степени не выше $q-1$.

Пусть все корни $Q(z)$ простые, тогда существует разложение на простые дроби вида

$$\frac{C_1(z)}{Q(z)} = \frac{c_1}{z_1 - z} + \frac{c_2}{z_2 - z} + ... + \frac{c_q}{z_q - z},$$

откуда с использованием тождества

$$\frac{z}{z_k - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_k}\right)^n,$$

справедливого при $\left|\frac{z}{z_k}\right| < 1$, получаем

$$A(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_1}{z_1^n} + \frac{c_2}{z_2^n} + ... + \frac{c_3}{z_q^n}\right) z^n.$$

Таким образом коэффициенты a_n равны

$$a_0 = 1, \quad a_n = \sum_{k=1}^{q} c_k z_k^{-n}, \quad \text{при} \quad n \geq 1. \tag{2.1.34}$$

Поскольку все корни z_k лежат вне единичного круга ряд (2.1.24) будет сходится в среднеквадратическом смысле.

Случай кратных корней рассматривается аналогично с использованием тождеств

$$\frac{z}{(z_k - z)^m} = z_k^{-m+1} \frac{\left(\frac{z}{z_k}\right)}{\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^m},$$

и

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^m} = (-1)^{m-1}(m-1)! \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(m-1)} \Bigg|_{x = \frac{z}{z_k}},$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ...,$$

справедливых при $|x| = \left|\frac{z}{z_k}\right| < 1$. Таким образом можно также установить, что представление в виде односторонего скользящего среднего имеет место.

Единственность стационарного решения следует из единственности решения для производящей функции, а спектральное представление для ковариационной функции будет доказано ниже в разделе 2.1.5. ■

В качестве простого примера модели авторегресии рассмотрим случай $q = 1$.

П р и м е р 2.1.6 Для модели авторегресси $q = 1$ найти представление последовательности в форме одностороннего скользящего среднего. Найти ковариационную функцию такой последовательности.

Р е ш е н и е Положив $\alpha = -b_1$ имеем рекуррентное соотношение

$$\xi_n = \alpha \xi_{n-1} + \varepsilon_n. \tag{2.1.35}$$

Система уравнений (2.1.33) сводится к виду

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \\ &a_1 - \alpha a_0 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &a_l - \alpha a_{l-1} = 0, \quad \text{при} \quad l \geq 1, \end{aligned}$$

которая имеет решение

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \alpha, \quad \dots \quad a_n = \alpha^n, \dots.$$

Отсюда следует, что при $|\alpha| < 1$ стационарное решение имеет вид

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}, \tag{2.1.36}$$

что соответствует следующим соотношениям для производящих функций

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z)^n = \frac{1}{1 - \alpha z}, \quad Q(z) = 1 - \alpha z.$$

Единственный корень уравнения

$$Q(z) = 1 - \alpha z = 0$$

равен $\frac{1}{\alpha}$ и при $|\alpha| < 1$ лежит вне единичного круга. Находим ковариационную функцию с использованием соотношения (2.1.26) для ковариационной функции последовательности одностороннего скользящего среднего с учетом того, что $a_k = 0$ при $k < 0$,

$$R(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}\bar{a}_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{n+k}\bar{\alpha}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^n \alpha^k \bar{\alpha}^k = \alpha^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{\alpha}^k = \alpha^n \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^{2k} = \frac{\alpha^n}{1-|\alpha|^2}, \quad \text{при} \quad n \geq 0, \tag{2.1.37}$$

при этом спектральная плотность определяется по формуле (2.1.32) и равна

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|1-\alpha e^{-i\lambda}|^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1-\alpha\cos\lambda)^2 + \alpha^2\sin^2\lambda}. \tag{2.1.38}$$

■

О п р е д е л е н и е 2.1.7 Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего порядка (p, q) определяется соотношением

$$\xi_n + b_1\xi_{n-1} + ... + b_q\xi_{n-q} = a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + ... + a_p\varepsilon_{n-p}. \tag{2.1.39}$$

■

Стационарное решение $\xi = (\xi_n)$ существует при тех же предположениях относительно корней полинома, что и в Теореме 2.1.1, а ковариационная функция $R(n)$ представима в виде

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda, \quad f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})}\right|^2, \tag{2.1.40}$$

где

$$P(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^p.$$

2.1.3 Спектральное представление ковариационной функции

В предыдущем разделе мы видели, что во всех рассмотренных примерах ковариационная функция допускает спектральное представление. Возможность представления ковариационной функции с помощью спектрального представления является универсальным свойством ССП. Справедлива следующая

Т е о р е м а 2.1.2 *[Герглоц] Пусть $R(n)$ - ковариационная функция стационарной (в широком смысле) случайной последовательности с нулевым средним.*

Тогда на измеримом пространстве $([-\pi, \pi), \mathcal{B}([-\pi, \pi)))$, найдется такая конечная неотрицательная мера $F(B)$, определенная на множествах борелевской σ - алгебры $\mathcal{B}([-\pi, \pi))$, что для любого $n \in \mathcal{Z}$

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} F(d\lambda). \tag{2.1.41}$$

Мера $F = F(B)$ называется *спектральнай мерой*, а ее функция распределения $F(\lambda) = F([-\pi, \lambda])$ - *спектральной функцией* последовательности с ковариационной функцией $R(n)$. Спектральная мера однозначно определяется по ковариационной функции и если $\xi = (\xi_n)$ - последовательность, состоящая из действительных случайных величин, то ковариационная функция действительна и

$$R(n) = Re\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} F(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda n) F(d\lambda).$$

Если спектральная мера имеет плотность $f(\lambda) \geq 0$, то ковариационная функция равна

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda,$$

и ее значения $R(n)$ равны коэффициентам разложения функции $f(\lambda)$ в ряд Фурье по системе функций $\{e^{i\lambda n},\ n \in \mathcal{Z}\}$, ортогональных на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Обратно, если $\sum\limits_{n \in \mathcal{Z}} |R(n)| < \infty$, то для любого $\lambda \in [-\pi, \pi]$ ряд Фурье, с коэффициентами $R(n)$, абсолютно сходится к некоторой функции

$$f_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathcal{Z}} e^{-i\lambda n} R(n).$$

Далее по теореме Фубини и с учетом равенства (2.1.19) получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m} f_1(\lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m} \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathcal{Z}} e^{-i\lambda n} R(n) = \sum_{n \in Z} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m} e^{-i\lambda n} R(n) = R(m),$$

откуда следует, что $f_1(\lambda)$ - спектральная плотность, соответствующая ковариационной функции $R(n)$.

2.1.4 Ортогональные стохастические меры. Стохастический интеграл.

Спектральное распределение ковариационной функции определяет распределение “энергии” последовательности по частотам $\lambda \in [-\pi, \pi)$. В случае почти периодической последовательности (Пример 2.1.2) мы видели, что сумме гармоник со случайными амплитудами соответствует дискретное представление спектра в виде ступенчатой функции спектрального распределения со скачками в точках, где сосредоточен спектр. Таким образом почти периодическую последовательность можно было представить в спектральной области как сумму гармоник со случайными амплитудами, то есть такая последовательнось имеет дискретный “случайный спектр”. Оказывается, что любая ССП допускает такое спектральное представление со “случайным спектром”, хотя в общем случае спектр уже не будет дискретным. Это представление весьма удобно в приложениях и основано на вводимых ниже понятиях стохастической меры и стохастического интеграла.

Стохастические меры.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ - вероятностное пространство, E - некоторое множество с алгеброй $\mathcal{E}_0$ его подмножеств и $\sigma-$ алгеброй $\mathcal{E}$. Для наших целей будет достаточно считать, что $E = R$, $\mathcal{E}_0$ - алгебра, образованная конечными наборами полуинтервалов, а $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E}_0) = \mathcal{B}(R)$ - борелевская $\sigma-$ алгебра на R.

О п р е д е л е н и е 2.1.8 *Комплекснозначная случайная функция множеств* $Z(\Delta) = Z(\omega; \Delta)$, *определенная для* $\omega \in \Omega$, $\Delta \in \mathcal{E}_0$ *называется* конечно-аддитивной стохастической мерой, *если:*

1. *для любого* $\Delta \in \mathcal{E}_0, \quad \mathbf{M}\{|Z(\Delta)|^2\} < \infty$;
2. *для любых двух непересекающихся множеств* Δ_1 *и* Δ_2 *из* $\mathcal{E}_0$

$$Z(\Delta_1 + \Delta_2) = Z(\Delta_1) + Z(\Delta_2) \qquad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

■

П р и м е р 2.1.7 Простейший пример конечно-аддитивной стохастической меры можно построить взяв последовательность случайных величин z_k, $k = 1, \ldots$ такую, что $\sum\limits_k \mathbf{M}\{|z_k|^2\} < \infty$ и последовательность различных чисел $\tau_k \in R$. Определим меру на полуинтервалах $\Delta \in R$ соотношением

$$Z(\Delta) = \sum_{\tau_k \in \Delta} z_k.$$

Нетрудно проверить, что свойства (1), (2) выполнены.

П р и м е р 2.1.8 Аналогичный пример можно построить с помощью непрерывного ($\mathbf{P}-$п.н.) случайного процесса $\eta(t,\omega)$, имеющего интегируемые с квадратом приращения, то есть такого, что для любых t_1, t_2 имеет место соотношение $\mathbf{M}\{|\eta(t_1)-\eta(t_2)|^2\} \leq |V(t_1)-V(t_2)|$, где $V(t)$ - некоторая неубывающая функция $0 \leq V(t) < \infty$. Меру на полуинтервалах $< a, b >$, где $< \cdot, \cdot >$ - означает любой из возможных (открытый, замкнутый или полуоткрытый интервал) можно определить соотношением

$$Z(< a, b >) = \eta(b) - \eta(a),$$

а меру на множествах из алгебры $\mathcal{E}$, являющихся объединением непересекающихся интервалов

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} < a_i, b_i >$$

соотношением

$$Z(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} Z(< a_i, b_i >) = \sum_{i=1}^{n} [\eta(b_i) - \eta(a_i)].$$

Условие (1) выполняется в силу квадратичной интегрируемости приращений, поскольку

$$\mathbf{M}\{|Z(\Delta)|^2\} \leq |V(\max_i b_i) - V(\min_i a_i)| < \infty,$$

а условие (2) следует из соотношения

$$Z(< a, b >) = \eta(b) - \eta(a) = \eta(b) - \eta(c) + \eta(c) - \eta(a) = Z(< a, c >) + Z(< c, b >),$$

справедливого при $a \leq c \leq b$ в силу непрерывности ($\mathbf{P}-$п.н.) процесса $\eta(t)$.

О п р е д е л е н и е 2.1.9 Конечно-аддитивная стохастическая мера $Z(\Delta)$ называется *элементарной стохастической мерой* если для любых непресекающихся множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ из $\mathcal{E}_0$ таких, что $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k \in \mathcal{E}_0$,

$$\mathbf{M}\left\{\left|Z(\Delta) - \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta_k)\right|^2\right\} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{2.1.42}$$

■

З а м е ч а н и е Данное свойство является аналогом счетой аддитивности в среднеквадратическом смысле. Это свойство также эквивалентно непрерывности (в среднеквадратическом смысле) в "нуле".

Л е м м а 2.1.1 *Элементарная стохастическая мера непрерывна (в среднеквадратическом смысле) в "нуле", то есть*

$$\mathbf{M}\{|Z(\Delta_n)|^2\} \to 0, \quad \text{при} \quad \Delta_n \downarrow \emptyset, \quad \Delta_n \in \mathcal{E}_0. \tag{2.1.43}$$

Обратно, если мера непрерывна (в среднеквадратическом смысле) в "нуле", то она удовлетворяет (2.1.42).

Д о к а з а т е л ь с т в о Пусть мера $Z(\cdot)$ элементарна и задана последовательность множеств из $\mathcal{E}_0$ такая, что

$$\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n, \quad n \geq 1, \quad \bigcap_{n}^{\infty} \Delta_n = \emptyset.$$

Тогда для любого $n \geq 1$

$$\Delta_1 = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (\Delta_k \setminus \Delta_{k+1})\right) \bigcup \Delta_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta_k \setminus \Delta_{k+1}) + \Delta_n. \tag{2.1.44}$$

Поскольку $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \Delta_k = \Delta_n \downarrow \emptyset$, то

$$\Delta_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta_k \setminus \Delta_{k+1}).$$

Воспользовавшись (2.1.44) и свойством конечной аддитивности меры $Z(\cdot)$, имеем соотношение

$$\mathbf{M}\{|Z(\Delta_n)|^2\} = \mathbf{M}\left\{\left|Z(\Delta_1) - \sum_{k=1}^{n-1} Z(\Delta_k \setminus \Delta_{k+1})\right|^2\right\} \to 0,$$

правая часть которого стремится к нулю в силу условия (2.1.42) для элементарной стохастической меры.

Обратно, пусть мера непрерывна в "нуле" и $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k \in \mathcal{E}_0$. Тогда последовательность множеств $\Delta \setminus \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_k \downarrow \emptyset$ и в силу непрерывности

$$\mathbf{M}\left\{\left|Z(\Delta) - \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta_k)\right|^2\right\} \downarrow 0, \text{при} \qquad n \to \infty.$$

■

О п р е д е л е н и е 2.1.10 Элементарная стохастическая мера $Z(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{E}_0$, называется *ортогональной* или *мерой с ортогональными значениями* если для любых двух непресекающихся множеств Δ_1 и Δ_2 из $\mathcal{E}_0$

$$\mathbf{M}\{Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}\} = 0. \tag{2.1.45}$$

■

Л е м м а 2.1.2 *Ортогональность меры $Z(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{E}_0$, эквивалентна тому, что для любых Δ_1 и Δ_2 из $\mathcal{E}_0$*

$$\mathbf{M}\{Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}\} = \mathbf{M}\{|Z(\Delta_1 \cap \Delta_2|^2\}. \tag{2.1.46}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о Пусть мера $Z(\cdot)$ ортогональна. Для любых множеств Δ_1 и Δ_2 из $\mathcal{E}_0$ в силу конечной аддитивности меры имеем

$$Z(\Delta_1 \cup \Delta_2) = Z(\Delta_1) + Z(\Delta_2) - Z(\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}\{|Z(\Delta_1 \cup \Delta_2)|^2\} = \mathbf{M}\{|Z(\Delta_1)|^2\} + \mathbf{M}\{|Z(\Delta_2)|^2\} + \mathbf{M}\{|Z(\Delta_1 \cap \Delta_2)|^2\}+ \\
&\mathbf{M}\{Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}\} + \mathbf{M}\{\overline{Z(\Delta_1)}Z(\Delta_2)\} - \mathbf{M}\{Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_1 \cap \Delta_2)}\}- \qquad (2.1.47)\\
&\mathbf{M}\{Z(\Delta_2)\overline{Z(\Delta_1 \cap \Delta_2)}\} - \mathbf{M}\{\overline{Z(\Delta_1)}Z(\Delta_2 \cap \Delta_2)\} - \mathbf{M}\{\overline{Z(\Delta_2)}Z(\Delta_1 \cap \Delta_2)\}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку $\Delta_1 \cup \Delta_2$ можно представить как сумму непресекающихся множеств

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 = (\Delta_1 \setminus (\Delta_1 \cap \Delta_2)) + (\Delta_1 \setminus (\Delta_1 \cap \Delta_2)) + (\Delta_1 \cap \Delta_2),$$

и из условия (5.6.2) следует, что для непересекающихся множеств A и B

$$\mathbf{M}\{|Z(A+B)|^2\} = \mathbf{M}\{|Z(A) + Z(B)|^2\} = \mathbf{M}\{|Z(A)|^2\} + \mathbf{M}\{|Z(B)|^2\} + \mathbf{M}\{Z(A)\overline{Z(B)}\} + \mathbf{M}\{\overline{Z(A)}Z(B)\} =$$

$$\mathbf{M}\{|Z(A)|^2\} + \mathbf{M}\{|Z(B)|^2\},$$

то поэтому

$$\mathbf{M}\{|Z(\Delta_1 \setminus (\Delta_1 \cap \Delta_2))|^2\} =$$

$$\mathbf{M}\{|Z(\Delta_1)|^2\} + \mathbf{M}\{|Z(\Delta_1 \cap \Delta_2)|^2\} - \mathbf{M}\{Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_1 \cap \Delta_2)}\} - \mathbf{M}\{\overline{Z(\Delta_1)}Z(\Delta_1 \cap \Delta_2)\},$$

и следовательно,

$$\mathbf{M}\{|Z(\Delta_1\cup\Delta_2)|^2\} = \mathbf{M}\{|Z(\Delta_1\setminus(\Delta_1\cap\Delta_2))|^2\} + \mathbf{M}\{|Z(\Delta_2\setminus(\Delta_1\cap\Delta_2))|^2\} + \mathbf{M}\{|Z(\Delta_1\cap\Delta_2)|^2\} =$$

$$\mathbf{M}\{|Z(\Delta_1)|^2\} + \mathbf{M}\{|Z(\Delta_1\cap\Delta_2)|^2\} - \mathbf{M}\{Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_1\cap\Delta_2)}\} - \mathbf{M}\{\overline{Z(\Delta_1)}Z(\Delta_1\cap\Delta_2)\} +$$

$$\mathbf{M}\{|Z(\Delta_2)|^2\} + \mathbf{M}\{|Z(\Delta_1\cap\Delta_2)|^2\} - \mathbf{M}\{Z(\Delta_2)\overline{Z(\Delta_1\cap\Delta_2)}\} - \mathbf{M}\{\overline{Z(\Delta_2)}Z(\Delta_1\cap\Delta_2)\} + \mathbf{M}\{|Z(\Delta_1\cap\Delta_2)|^2\}.$$

Сравнивая равенства для $\mathbf{M}\{|Z(\Delta_1\cup\Delta_2)|^2\}$ получаем соотношение (5.6.3).

Обратно, если соотношение (5.6.3) имеет место, то для непересекающихся множеств из (2.1.47) вытекает равенство

$$\mathbf{M}\{|Z(\Delta_1\cap\Delta_2)|^2\} = \mathbf{M}\{|Z(\emptyset)|^2\} = 0.$$

■

О п р е д е л е н и е 2.1.11 Функция множеств $m(\Delta) = \mathbf{M}|Z(\Delta)|^2$, определенная для $\Delta \in \mathcal{E}_0$, называется *структурной функцией* элементарной стохастической меры $Z(\cdot)$. ■

Функция $m(\cdot)$, определенная на множествах из алгебры $\mathcal{E}_0$ является, в силу (2.1.43), конечной и непрерывной в "нуле", а следовательно, по теореме Каратеодори может быть продолжена на σ - алгебру $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E}_0)$. Элементарная ортогональная стохастическая мера также допускает такое продолжение, причем $\mathbf{M}|Z(\Delta)|^2 = m(\Delta)$, для множеств из $\mathcal{E}$. Продолжение стохастической меры приводит к понятию стохастического интеграла.

П р и м е р 2.1.9 Пусть в примере (2.1.7) случайные величины z_k, $k = 1, \ldots$ ортогональны, то есть $\mathbf{M}z_k\bar{z}_m = 0$ при $m \neq k$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbf{M}\{|z_k|^2\} < \infty$. Показать, что мера, определенная на подмножествах $\Delta \in \mathcal{B}(R)$, соотношением

$$Z(\Delta) = \sum_{\tau_k\in\Delta} z_k$$

является элементарной ортогональной стохастической мерой. Вычислить структурную функция этой меры.

Р е ш е н и е Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbf{M}\{|z_k|^2\}$ сходится, то для любого конечного набора непересекающихся множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, в силу условия ортогональности z_k имеем

$$\mathbf{M}\left\{\left|Z\left(\sum_{k=1}^{n}\Delta_k\right)\right|^2\right\} = \mathbf{M}\{|\sum_{\tau_l\in\sum_{k=1}^{n}\Delta_k} z_l|^2\} = \mathbf{M}\{\sum_{\tau_l,\tau_m\in\sum_{k=1}^{n}\Delta_k} z_l\bar{z}_m\} =$$

$$\sum_{\tau_l\in\sum_{k=1}^{n}\Delta_k}\mathbf{M}\left\{|z_l|^2\right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{M}\{|z_k|^2\}.$$

Следовательно, для любой последовательности непересекающихся множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{M}\{|Z(\Delta_n)|^2\} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{M}\{|z_k|^2\},$$

и следовательно, сходится.

Если $\Delta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, то

$$\mathbf{M}\left\{\left|Z(\Delta) - \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta_k)\right|^2\right\} = \mathbf{M}\left\{\left|\sum_{k=n+1} Z(\Delta_k)\right|^2\right\} = \mathbf{M}\left\{\sum_{k,l=n+1} Z(\Delta_k)\overline{Z(\Delta_l)}\right\} =$$
$$\sum_{k,l=n+1} \mathbf{M}\left\{Z(\Delta_k)\overline{Z(\Delta_l)}\right\}. \tag{2.1.48}$$

Однако, в силу ортогональности случайных величин z_k для непересекающихся множеств Δ_k, Δ_l справедливо соотношение

$$\mathbf{M}\left\{Z(\Delta_k)\overline{Z(\Delta_l)}\right\} = \mathbf{M}\left\{\sum_{\tau_m\in\Delta_k}\sum_{\tau_p\in\Delta_l} z_m\bar{z}_p\right\} = \sum_{\tau_m\in\Delta_k}\sum_{\tau_p\in\Delta_l} \mathbf{M}\left\{z_m\bar{z}_p\right\} =$$
$$\begin{cases} 0, \quad \text{если}, \quad k\neq l, \\ \sum\limits_{\tau_m\in\Delta_k} \mathbf{M}\{|z_m|^2\} = \mathbf{M}\{|Z(\Delta_k)|^2\}, \quad \text{если}, \quad k = l. \end{cases} \tag{2.1.49}$$

Подставляя (2.1.49) в (2.1.48), получаем оценку

$$\mathbf{M}\left\{\sum_{k,l=n+1} Z(\Delta_k)\overline{Z(\Delta_l)}\right\} = \sum_{k,l=n+1} \mathbf{M}\left\{Z(\Delta_k)\overline{Z(\Delta_l)}\right\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbf{M}\left\{|Z(\Delta_k)|^2\right\} \downarrow 0.$$

Таким образом показано свойство (2.1.43), и следовательно, мера $Z(\cdot)$ - элементарна. Попутно (см. соотношение (2.1.49)) бало показано, что мера $Z(\cdot)$ является ортогональной. Соотношение (2.1.49) дает также выражение для структурной функции меры $Z(\cdot)$

$$m(\Delta) = \mathbf{M}\{|Z(\Delta)|^2\} = \sum_{\tau_m\in\Delta} \mathbf{M}\{|z_m|^2\}.$$

■

Стохастический интеграл

Пусть $Z(\Delta)$ - элементарная ортогональная стохастическая мера, определенная на множествах $\Delta \in \mathcal{E}_0$, со структурной функцией $m(\Delta)$, продолженной на множества $\Delta \in \mathcal{E}$.

О п р е д е л е н и е 2.1.12 Стохастический интеграл $\mathcal{J}(f)$ *определяется на множестве* простых функций *вида*

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{M} f_k I_{\Delta_k},$$

где $f_1, ..., f_M$ *- некоторые комплексные числа,*

$$\bigcup_{k=1}^{M} \Delta_k = E, \qquad \Delta_k \cap \Delta_m = \emptyset, \quad \text{при} \quad k \neq m,$$

соотношением

$$\mathcal{J}(f) = \sum_{k=1}^{M} f_k Z(\Delta_k). \tag{2.1.50}$$

■

Покажем, что стохастический интеграл задает отображение гильбертова пространства функций $L^2 = L^2(E, \mathcal{E}, m)$, интегрируемых с квадратом по мере $m(d\lambda)$, то есть функций $f(\lambda)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_E |f(\lambda)|^2 m(d\lambda) < \infty,$$

в гильбертово пространство квадратично интегрируемых случайных величин $H^2 = H^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Скалярное произведение в $L^2(E, \mathcal{E}, m)$ определяется соотношением

$$< f, g >= \int\limits_E f(\lambda)\bar{g}(\lambda)m(d\lambda), \tag{2.1.51}$$

а норма $\|f\| =< f, f >^{1/2}$. Скалярное произведение и норма в пространстве $H^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определяются соотношенииями (2.1.1), (2.1.2), то есть

$$(\xi, \eta) = \mathbf{cov}\{\xi, \eta\}, \quad \|\xi\| = (\xi, \xi)^{1/2}.$$

Л е м м а 2.1.3 *Для любых простых функций $f, g \in L^2(E, \mathcal{E}, m)$, выполняются соотношения*

$$(\mathcal{J}(f), \mathcal{J}(g)) =< f, g >,$$

$$\|\mathcal{J}(f)\|^2 = \|f\|^2 = \int\limits_E |f(\lambda)|^2 m(d\lambda), \tag{2.1.52}$$

$$\mathcal{J}(af + bg) = a\mathcal{J}(f) + b\mathcal{J}(g), \quad (\mathbf{P} - \textit{п.н.}).$$

Доказательство. Установим первое соотношение, так как второе есть прямое следствие первого, а третье очевидно. Пусть $f(\lambda) = \sum\limits_k f_k I_{\Delta_k}$, а $g(\lambda) = \sum\limits_l g_l I_{\Delta_l}$. По определению стохастического интеграла и в силу свойства (5.6.3) ортогональной стохастической меры

$$(\mathcal{J}(f), \mathcal{J}(g)) = \mathbf{M}\left\{\sum_k f_k Z(\Delta_k)\overline{\sum_l g_l Z(\Delta_l)}\right\} = \sum_{k,l} f_k \bar{g}_l \mathbf{M}\{Z(\Delta_k)\overline{Z(\Delta_l)}\} = \sum_{k,l} f_k \bar{g}_l \quad \mathbf{M}\{|Z(\Delta_k \cap \Delta_l)|^2\} =$$

$$\sum_{k,l} f_k \bar{g}_l \, m(\Delta_k \cap \Delta_l) = \int\limits_E f(\lambda)\bar{g}(\lambda)m(d\lambda) =< f, g > .$$

Множество простых функций плотно в метрике гильбертова пространства L^2, то есть для любой функции $f \in L^2$ существует последовательность простых функций $f_n \in L^2$ такая, что $\|f - f_n\| \to 0$, при $n \to \infty$. Эта последовательность фундаментальна в L^2, поэтому в силу соотношений (5.6.6)

$$\|\mathcal{J}(f_n) - \mathcal{J}(f_m)\| = \|\mathcal{J}(f_n - f_m\| = \|f_n - f_m\| \to 0, \qquad n, m \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\{\mathcal{J}(f_n)\}$ фундаментальна в среднеквадратическом смысле, и в силу полноты пространства H^2 существует случайная величина (обозначаемая $\mathcal{J}(f)$) такая, что $\mathcal{J}(f) \in H^2$ и $\|\mathcal{J}(f_n) - \mathcal{J}(f)\| \to 0, \quad n \to \infty$.

О п р е д е л е н и е 2.1.13 Случайная величина $\mathcal{J}(f)$ называется *стохастическим интегралом* от функции $f \in L^2$ по элементарной стохастической мере Z и обозначается

$$\mathcal{J}(f) = \int\limits_E f(\lambda)Z(d\lambda).$$

■

Так введенный интеграл не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$. Действительно, пусть имеются две различные последовательности $\{f_n\}$ и $\{f_n^{'}\}$, сходящиеся в среднеквадратическом смысле к одной и той же функции $f \in L^2$. При этом определяются две случайные величины

$$\mathcal{J}(f) = l.i.m.\, \mathcal{J}(f_n), \qquad \mathcal{J}^{'}(f) = l.i.m.\, \mathcal{J}(f_n^{'}).$$

Покажем, что они равны ($\mathbf{P}$ – п.н.). Непосредственно из определения вытекает

$$\|\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}^{'}(f)\| \leq \|\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}(f_n)\| + \|\mathcal{J}(f_n) - \mathcal{J}(f_n^{'})\| + \|\mathcal{J}^{'}(f) - \mathcal{J}(f_n^{'})\| \leq$$

$$\|\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}(f_n)\| + \|f_n - f_n^{'}\| + \|\mathcal{J}^{'}(f) - \mathcal{J}(f_n^{'})\| \to 0,$$

откуда $\mathbf{M}\{|\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}^{'}(f)|^2\} = 0$, и следовательно, $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}^{'}(f), \quad (\mathbf{P}$ – п.н.). Непосредственно из определения следует, что стохастический интеграл удовлетворяет соотношениям (5.6.6) не только для простых функций, но и для произвольных функций $f, g \in L^2$.

П р и м е р 2.1.10 Показать, что соотношения (5.6.6) выполняются для любых функций $f, g \in L^2$.

Р е ш е н и е Покажем первое соотношение, так как остальные очевидны. Пусть есть некоторые последовательности $f_n, g_n \in L^2$, аппроксимирующие соответственно f и g в смысле сходимости в среднеквадратическом пространства L^2.

Тогда последовательности $\|f_n\|, \|g_n\|$ равномерно ограничены и последовательности функций $f_n(\lambda), g_n(\lambda)$ сходятся к f, g по мере $m(d\lambda)$. Действительно, в силу неравенства Чебышева, например, для последовательности f_n имеем

$$m\{\lambda : |f_n(\lambda) - f(\lambda)| > \varepsilon\} \leq \frac{\int\limits_E |f_n(\lambda) - f(\lambda)|^2 m(d\lambda)}{\varepsilon^2}.$$

Поэтому произведение $f_n(\lambda)\overline{g_n(\lambda)}$ сходится к $f(\lambda)\overline{g(\lambda)}$ по мере $m(d\lambda)$, откуда следует сходимость

$$\lim_n < f_n, g_n > = \lim_n \int\limits_E f_n(\lambda)\overline{g_n(\lambda)} m(d\lambda) = \int\limits_E f(\lambda)\overline{g(\lambda)} m(d\lambda) = < f, g > .$$

Далее, поскольку

$$\mathcal{J}(f) = l.i.m._n\, (f_n), \quad \mathcal{J}(g) = l.i.m._n\, (g_n),$$

то

$$\|\mathcal{J}(f)\| < \infty, \|\mathcal{J}(f - f_n)\| \to 0, \quad \|\mathcal{J}(g)\| < \infty, \|\mathcal{J}(g - g_n)\| \to 0.$$

Долее, имеем соотношение

$$(\mathcal{J}(f_n), \mathcal{J}(g_n)) = (\mathcal{J}(f), \mathcal{J}(g)) + (\mathcal{J}(f_n - f), \mathcal{J}(g_n)) + (\mathcal{J}(f), \mathcal{J}(g_n - g)),$$

в котором, в силу неравенства Коши-Буняковского,

$$|(\mathcal{J}(f_n - f), \mathcal{J}(g_n))| \leq \|\mathcal{J}(f_n - f)\| \|\mathcal{J}(g_n)\| \to 0,$$

$$|(\mathcal{J}(f), \mathcal{J}(g_n - g))| \leq \|\mathcal{J}(f)\| \|\mathcal{J}(g_n - g)\| \to 0.$$

Следовательно,

$$\lim_n (\mathcal{J}(f_n), \mathcal{J}(g_n)) = \lim_n < f_n, g_n > = < f, g > = (\mathcal{J}(f), \mathcal{J}(g)).$$

■

Продолжение элементарной стохастической меры

Таким образом стохастический интеграл определен на произвольных множествах $\sigma-$ алгебры $\mathcal{E}$. Причем на множествах $\Delta \in \mathcal{E}_0$ выполняется равенство $Z(\Delta) = \mathcal{J}(I_\Delta)$. Стохастический интеграл определяет продолжение элементарной ортогональной меры и на $\sigma-$ алгебру $\mathcal{E}$.

О п р е д е л е н и е 2.1.14 Для произвольного множества $\Delta \in \mathcal{E}$ определим *продолжение элементарной ортогональной стохастической меры* Z соотношением

$$\tilde{Z}(\Delta) = \mathcal{J}(I_\Delta).$$

■

Из конструкции интеграла следует, что стохастический интеграл удовлетворяет соотношениям (5.6.6), поэтому если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset, \quad \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{E}$, то

$$\tilde{Z}(\Delta_1 + \Delta_2) = \tilde{Z}(\Delta_1) + \tilde{Z}(\Delta_2), \qquad (\mathbf{P} - \text{п.н.}),$$

$$\mathbf{M}\{\tilde{Z}(\Delta_1)\overline{\tilde{Z}(\Delta_2)}\} = 0,$$

$$\mathbf{M}\{|\tilde{Z}(\Delta)|^2\} = m(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{E}.$$

О п р е д е л е н и е 2.1.15 Совокупность комплекснозначных случайных величин $\{Z_\lambda\}, \qquad \lambda \in R^1$, называется *случайным процессом с ортогональными приращениями,* если:

1. $\mathbf{M}\{|Z_\lambda|^2\} < \infty, \quad \lambda \in R^1$;
2. для любого $\lambda \in R$
$$\mathbf{M}\{|Z_\lambda - Z_{\lambda_n}|^2\} \to 0, \quad \text{при} \quad \lambda_n \downarrow 0, \quad \lambda_n \in R;$$
3. для любых $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$
$$\mathbf{M}\{(Z_{\lambda_4} - Z_{\lambda_3})\,\overline{(Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1})}\} = 0.$$

■

Нетрудно видеть (см. Пример 2.1.8), что процесс с ортогональными приращениями определяет элементарную стохастическую меру с ортогональными значениями. Обратно, всякая ортогональная стохастическая мера $Z(\Delta)$ со структурной функцией $m(\Delta)$ задает процесс с ортогональными приращениями

$$Z_\lambda = Z((-\infty, \lambda]).$$

Действительно,

1. $$\mathbf{M}\{|Z_\lambda|^2\} = m((-\infty, \lambda]) < \infty;$$
2. $$\mathbf{M}\{|Z_\lambda - Z_{\lambda_n}|^2\} = m((\lambda, \lambda_n]) \downarrow 0, \quad \text{при} \quad \lambda_n \downarrow \lambda;$$
3. $$\mathbf{M}\{(Z_{\lambda_4} - Z_{\lambda_3})\,\overline{(Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1})}\} = m(\emptyset) = 0.$$

Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между процессами с ортогональными приращениями и ортогональными стохастическими мерами.

2.1.5 Спектральное представление ССП

Понятие ортогональной стохастической меры является центральным при определении спектрального представления стационарных (в широком смысле) случайных последовательностей.

Т е о р е м а 2.1.3 *Пусть задана стационарная в широком смысле последовательность* $\xi = (\xi_n)$, *с ковариационной функцией* $R(n) = \mathbf{cov}\{\xi_n \xi_0\}$, *допускающей спектральное представление*

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} F(d\lambda).$$

Тогда существует такая ортогональная стохастическая мера $Z = Z(\Delta)$, *определенная на множествах* $\Delta \in \mathcal{B}([-\pi, \pi])$ *борелевской* σ *- алгебры отрезка* $[-\pi, \pi]$, *что для любого* $n \in \mathcal{Z}$ *имеет место представление*

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} Z(d\lambda), \tag{2.1.53}$$

при этом

$$\mathbf{M}|Z(\Delta)|^2 = F(\Delta). \tag{2.1.54}$$

З а м е ч а н и е Таким образом спектральная мера $F(d\lambda)$ является структурной функцией ортогональной стохастической меры $Z(d\lambda)$, определенной на Борелевской $\sigma-$ алгебре отрезка $[-\pi, \pi]$. Спектральное представление ССП играет важную роль в задачах оценивания и прогнозирования случайных последовательностей. Это связано с тем, что результат любого линейного преобразования ССП можно представить с помощью стохастического интеграла, по мере $Z(d\lambda)$.

О п р е д е л е н и е 2.1.16 Будем говорить, что случайная величина $\zeta \in H(\xi)$, если она является пределом в среднеквадратическом смысле некоторой последовательность случайных величин ζ^n, образованных линейными комбинациями элементов последовательности ξ. ■

З а м е ч а н и е Иными словами, случайная величина ζ принадлежит замкнутому в смысле сходимости в $L^2\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ линейному многообразию, порожденному случайными величинами ξ_n.

Т е о р е м а 2.1.4 *Пусть случайная величина* $\zeta \in H(\xi)$, *тогда существует функция*

$$\varphi(\lambda) \in L^2\{[-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), F\}$$

такая, что случайная величина ζ *допускает представление*

$$\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) Z(d\lambda).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о Действительно, пусть

$$\zeta = \underset{n}{l.i.m.}\, \zeta_n,$$

где

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{N^n} \alpha_k^n \xi_{l_k}.$$

Используя спектральное представление элементов последовательности ξ, получаем для ζ_n следующее спектральное представление

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{N^n} \alpha_k^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda l_k} Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^{N^n} \alpha_k^n e^{i\lambda l_k} \right] Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\lambda) Z(d\lambda).$$

Последовательность функций φ_n фундаментальна в метрике пространства L^2, поскольку в силу свойств стохастического интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n - \varphi_m|^2 F(d\lambda) = \mathbf{M}\{|\zeta_n - \zeta_m|^2\} \to 0, \quad \text{при} \quad m, n \to \infty.$$

Поэтому существует $\lim_n \varphi_n(\lambda) = \varphi_n(\lambda) \in L^2$, и

$$\underset{n}{l.i.m.}\, \zeta_n = \underset{n}{l.i.m.} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\lambda) Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) Z(d\lambda) = \zeta, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

■

О п р е д е л е н и е 2.1.17 Пусть ξ некоторая ССП, имеющая спектральное представление (2.1.53). Если некоторая последовательность $\zeta = (\zeta_n)_{n \in \mathcal{Z}}$, допускает представление

$$\zeta_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \varphi(\lambda) Z(d\lambda), \tag{2.1.55}$$

с некоторой функцией $\varphi(\lambda) \in L^2\{[-\pi,\pi], \mathcal{B}([-\pi,\pi]), F\}$, то говорят, что ССП ζ получена из ξ с помощью линейного преобразования. Функция φ в (2.1.55) называется *частотной характеристикой* этого преобразования. ■

Последовательность ζ также принадлежит классу ССП, причем соотношение (2.1.55) задает ее спектральное представление. При этом ковариационная функция последовательности ζ равна

$$\mathbf{cov}\{\zeta_n, \zeta_0\} = (\zeta_n, \zeta_0) = < e^{i\lambda n}\varphi(\lambda), \varphi(\lambda) > = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} |\varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda), \tag{2.1.56}$$

П р и м е р 2.1.11 [Последовательности скользящего среднего (Пример 2.1.5), авторегресии (Пример 2.1.6), смешанной авторегрессии и скользящего среднего (Пример 2.1.7)] Используя спектральное представление показать, что эти последовательности являются линейными пребразованиями процесса белого шума. Найти соотношения, выражающие связь между спектральными плотностями этих последовательностей и спектральной плотностью белого шума. Определить спектральное представление для ковариационной функции.

Р е ш е н и е Рассмотрим наиболее общий случай модели (2.1.39). Предположим, что последовательность ξ принадлежит классу ССП и имеет спектральное представление (2.1.53). Тогда, поставляя это представление в уравнение (2.1.39)

$$\xi_n + b_1\xi_{n-1} + ... + b_q\xi_{n-q} = a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + ... + a_p\varepsilon_{n-p}$$

получаем соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} Q(e^{-i\lambda}) Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} P(e^{-i\lambda}) \tilde{Z}(d\lambda),$$

где $\tilde{Z}(d\lambda)$ - ортогональная стохастическая мера последовательности белого шума. Если функция $Q(e^{-i\lambda})$ не обращается в нуль, то данное соотношение выполняется при любом n, если меры связаны соотношением

$$Z(d\lambda) = \frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})} \tilde{Z}(d\lambda).$$

Таким образом последовательность ξ является результатом линейного преобразования последовательности белого шума с частотной характеристикой

$$\varphi(\lambda) = \frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})},$$

и выполняется соотношение

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})} \tilde{Z}(d\lambda).$$

Отсюда по формуле (2.1.56) для ковариационной функции последовательности ξ получаем

$$\mathbf{cov}\{\xi(n), \xi(0)\} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})} \right|^2 \frac{d\lambda}{2\pi},$$

которое соответствует приведенному ранее соотношению (2.1.40). Это также проясняет и смысл условия, состоящего в отсутствии корней многочлена $Q(z)$ внутри единичного круга. При этих условиях функция $\varphi(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ является аналитической в некотором круге радиуса $r > 1$, поэтому интеграл в представлении для функции ковариации существует при любом n. Кроме того, поскольку функция $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ аналитическая, то есть

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

то при $z = e^{-i\lambda}$ она представима своим рядом Тейлора и поэтому

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-i\lambda k},$$

и ряд сходится абсолютно. Подставляя это соотношение в спектральное представление для последовательности ξ получаем

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-i\lambda k} \tilde{Z}(d\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-k)} \tilde{Z}(d\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}.$$

Таким образом, последовательность ξ допускает представление в виде одностороннего скользящего среднего. ■

Соотношение (2.1.55) описывает линейное преобразование последовательности в спектральной области. Однако, как показывают примеры последовательностей скользящего среднего и авторегрессии можно дать и другое более естественное определение понятия линейного преобразования.

О п р е д е л е н и е 2.1.18 Пусть ξ - некоторая последовательность, поступающая на вход линейной системы (*линейного фильтра*). Если в момент $t = m$ входной сигнал равен ξ_m, то отклик линейной системы на этот сигнал есть $h(n-m)\xi_m$, где $h = h(n)$, $n \in \mathcal{Z}$, и комплекснозначная функция $h(\cdot)$ называется *импульсным откликом* линейного фильтра. По принципу суперпозиции, сигнал на выходе линейной системы равен сумме всех откликов и его можно записать в виде

$$\zeta_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)\xi_m. \qquad (2.1.57)$$

■

П р и м е р 2.1.12 [Физически реализуемые линейные системы] Если мы имеем дело с реальной физически реализуемой системой и параметр $n \in \mathcal{Z}$ соответствует времени, то естественно считать, что выходной сигнал не может зависеть от будущих значений входного сигнала. Импульсный отклик такой системы обладает тем свойством, что $h(n) = 0$ при $n < 0$, поэтому уравнение (2.1.57) принимает вид

$$\zeta_n = \sum_{m=-\infty}^{n} h(n-m)\xi_m = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)\xi_{n-m}. \tag{2.1.58}$$

О п р е д е л е н и е 2.1.19 Функция

$$\varphi(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda m} h(m) \tag{2.1.59}$$

называется *частотной характеристикой* или *передаточной функцией* линейного фильтра. ■

Для сходимости в среднеквадратическом смысле рядов в формулах (2.1.57), (2.1.58) достаточно выполнения следующих условий

$$\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} h(k)R(k-h)\bar{h}(l) < \infty, \tag{2.1.60}$$

и эквивалентного условия, выраженного в терминах частотных характеристик

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda) < \infty. \tag{2.1.61}$$

Из соотношений (2.1.58), (2.1.59) следует спектральное представление для последовательности ζ

$$\zeta_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\varphi(\lambda)Z(d\lambda) \tag{2.1.62}$$

и спектральное представление (2.1.56) для ее ковариационной функции. Действительно,

$$\zeta_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)\xi_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\xi_{n-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-m)}Z(d\lambda) =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-i\lambda m}\right]Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\varphi(\lambda)Z(d\lambda),$$

и следовательно,

$$\mathbf{cov}\{\zeta_n, \zeta_0\} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}|\varphi(\lambda)|^2 F(d\lambda).$$

П р и м е р 2.1.13 Пусть на линейный фильтр с частотной характеристикой

$$\varphi = \varphi(\lambda) \in L^2\{[-\pi,\pi], \mathcal{B}([-\pi,\pi]), d\lambda\}$$

подается белый шум $\varepsilon = \varepsilon_n$. Тогда функция $\varphi(\lambda)$ допускает разложение в ряд Фурье

$$\varphi(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda m} h(m),$$

где

$$h(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}\varphi(\lambda)d\lambda.$$

При этом выходной сигнал представляется в виде

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\varphi(\lambda)Z(d\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-m)}Z(d\lambda),$$

что соответсвует представлению в форме последовательности скользящего среднего

$$\xi_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\varepsilon_{n-m} \tag{2.1.63}$$

и спектральная плотность последовательности ξ равна

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|\varphi(\lambda)|^2.$$

Следующий очень важный результат показывает, что всякая стационарная последовательность, имеющая спектральную плотность может быть представлена, как результат прохождения белого шума через некоторую линейную систему.

Т е о р е м а 2.1.5 *Пусть ξ стационарная последовательность со спектральной плотностью $f_\xi(\lambda)$. Тогда, если спектральная плотность невырождена, то есть $f_\xi(\lambda) > 0$ для почти всех (относительно меры Лебега) $\lambda \in [-\pi, \pi]$, то существует последовательность белого шума ε и линейный фильтр h такие, что последовательность ξ допускает представление* (2.1.63) *в виде двустороннего скользящего среднего.*

Если условие невырожденности нарушается, то представление (2.1.63) *имеет место, если только вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ достаточно богато, то есть на нем определена последовательность белого шума, некоррелированная с последовательностью ξ.*

Если $f_\xi(\lambda) > 0$ почти всюду по мере Лебега и

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|\varphi(\lambda)|^2,$$

где

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i\lambda k}h(k), \qquad \sum_{k=0}^{\infty}|h(k)|^2 < \infty,$$

то последовательность ξ допускает представление в виде одностороннего скользящего среднего

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\varepsilon_{n-k}.$$

Еще одним важным следствием спектрального представления является теорема о возможности определения значения спектральной меры любой точки $\nu \in [-\pi, \pi)$.

Т е о р е м а 2.1.6 *Пусть ξ стационарная последовательность с $\mathbf{M}\xi_n = 0$, ковариационной функцией $F(d\lambda)$ и ортогональной спектральной мерой $Z(d\lambda)$. Тогда*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{-k}e^{i\nu k} \to Z(\{\nu\}), \\ &\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}R(-k)e^{i\nu k} \to F(\{\nu\}). \end{aligned} \tag{2.1.64}$$

Сходимость с первом соотношении понимается в среднеквадратическом смысле, $Z(\{\nu\})$ - есть спектральная мера точки $\nu \in [-\pi, \pi)$, а $F(\{\nu\}) = \mathbf{M}|Z(\{\nu\})|^2$.

Доказательство. Используя спектральное представление последовательности ξ получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{-k}e^{i\nu k} = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-i(\lambda-\nu)k}Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(\lambda)Z(d\lambda),$$

где

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-i(\lambda-\nu)k} = \frac{1-e^{-i(\lambda-\nu)n}}{1-e^{-i(\lambda-\nu)}}.$$

Функции $\varphi_n(\lambda)$ удовлетворяют очевидному неравенству $|\varphi_n(\lambda)| \leq 1$ и на интервале $[-\pi,\pi)$

$$\lim_n \varphi_n(\lambda) = I_{\{\nu\}}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = \nu, \\ 0, & \lambda \neq \nu. \end{cases} \tag{2.1.65}$$

Таким образом последовательность функций φ_n сходится к $I_{\{\nu\}}(\lambda)$ в $L^2([-\pi,\pi])$. Следовательно,

$$\mathbf{M}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi_n(\lambda) - I_{\{\nu\}}(\lambda)]Z(d\lambda)\right|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(\lambda) - I_{\{\nu\}}(\lambda)|^2 F(d\lambda) \to 0,$$

а поскольку,

$$\int_{-\pi}^{\pi} I_{\{\nu\}}(\lambda)]Z(d\lambda) = Z(\{\nu\}),$$

то первое утверждение теоремы доказано. Вторая часть соотношения (2.1.64) доказывается аналогично.

З а м е ч а н и е Точно также устанавливаются и соотношения

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k e^{-i\nu k} \to Z(\{\nu\}), \\ &\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}R(k)e^{-i\nu k} \to F(\{\nu\}). \end{aligned} \tag{2.1.66}$$

2.1.6 Регулярные и сингулярные ССП. Разложение Волда.

Случайные последовательности являются удобными моделями недетерминированных процессов, развивающихся во времени, и существует множество прикладных задач, в которых необходимо предсказывать поведение последовательности в будущем на основе наблюдения прошлых значений. В данном разделе мы рассматриваем ССП с точки зрения предсказуемости их будущего поведения по прошлым значениям.

Рассмотрим ССП (Пример 2.1.1) $\xi_n = z_0 e^{i\lambda n}$. Эта последовательность обладает свойством предсказуемости ее поведения в будущем, по наблюдению всего лишь одного значения в любой момент времени m. Действительно, для любого $k \geq m$

$$\xi_k = \xi_m e^{i\lambda(k-m)}.$$

Аналогичным свойством обладает и почти периодическая последовательность (Пример 2.1.2)

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{m} z_k e^{i\lambda_k n} \tag{2.1.67}$$

с ортогональными случайными величинами z_k и известными детерминированными параметрами λ_k, где $k = 1, ..., m$. Пусть нам известно прошлое поведение последовательности, то есть значения $\{...\xi_{-m}, ...\xi_{-1}\}$. Если на основе наблюдения прошлого, можно определить случайные величины z_k, то тогда все будущие значения $\xi_0, ...$ расчитываются по формуле (2.1.67). Оказывается, что для определения z_k, $k = 1, ..., m$ достаточно знать любые m последовательно взятые значения последовательности ξ, например, $\xi_{-m}, ..., \xi_{-1}$.

Если рассматривать соотношение (2.1.67) как уравнение, связывающее z_k и ξ_n, то легко видеть, что z_k удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m} z_k e^{-i\lambda_k m} = \xi_{-m}, \\ \sum_{k=1}^{m} z_k e^{-i\lambda_k (m-1)} = \xi_{-m+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{m} z_k e^{-i\lambda_k} = \xi_{-1}, \end{cases}$$

Определитель этой линейной системы при различных λ_k равен

$$det \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_1 m} & e^{-i\lambda_2 m} & \dots & e^{-i\lambda_m m} \\ e^{-i\lambda_1 (m-1)} & e^{-i\lambda_2 (m-1)} & \dots & e^{-i\lambda_m (m-1)} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & .. & \dots\dots\dots \\ e^{-i\lambda_1)} & e^{-i\lambda_2} & \dots & e^{-i\lambda_m} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{m} e^{-i\lambda_k} \prod_{k \neq l} (e^{-i\lambda_k} - e^{-i\lambda_l}) \neq 0.$$

Поэтому система уравнений относительно z_k имеет единственное решение, и следовательно, последовательность ξ предсказуема по своему прошлому.

Таким образом обе эти последовательности обладают свойством предсказуемости, и в некотором смысле ведут себя детерминированным образом. Однако, не все ССП обладают этим свойством. Простые примеры последовательностей, порожденных белым шумом, да и сама, последовательность гауссовского белого шума, конечно же, не обладают свойством предсказуемости, поскольку каждое следующее значение последовательности гауссовского белого шума не зависит от прошлых значений, поэтому никакое точное предсказание невозможно.

З а м е ч а н и е Ясно, что свойство точной предсказуемости должно быть как-то связано с тем, насколько сильна корреляция между значениями последовательности, и поскольку эта корреляция определяется ковариационной функцией, то должно определяется ею, и соответственно, ее спектральным представлением.

Если сравнить спектры почти периодической последовательности (предсказуемой) и последовательности белого шума (непредсказуемой), то они имеют совершенно разный вид: спектр первой последовательности - дискретный, а спектр второй - непрерывный (существует невырожденная спектральная плотность). Оказывается, что это простое наблюдение имеет весьма глубокий смысл. Поскольку всякая мера разложима в сумму абсолютно непрерывной и сингулярной (по отношению к мере Лебега) мер, то этому разложению соответствует и возможность разложения ССП на две некоррелированные последовательности, одна из которых полностью предсказуема по прошлому, а другая порождается некоторой последовательностью белого шума и имеет невырожденную спектральную плотность. При этом последовательность с сингулярной спектральной мерой является предсказуемой, а последовательность с абсолютно непрерывным невырожденным спектром нет.

Эти результаты являются весьма важными для практики, поскольку служат основой для построения многих статистических алгоритмов анализа и оценивания параметров случайных последовательностей.

Введем обозначения $H_n(\xi) = \bar{L}^2(\xi^n)$ и $H(\xi) = \bar{L}^2(\xi)$ для замкнутых в среднеквадратическом линейных многообразий, порожденных соответственно, $\xi^n = (..., \xi_{n-1}, \xi_n)$ и $\xi = (..., \xi_{n-1}, \xi_n, ...)$. То есть в первом случае мы имеем пространство случайных величин, являющихся линенйными комбинациями и их пределами в среднеквадратическом от элементов последовательности от бесконечно далекого прошлого до текущего момента времени n, во втором случае пространство образовано всеми элементами последовательности от бесконечно далекого прошлого до бесконечно далекого будущего. Ясно, что для любого n

$$H_{n-1}(\xi) \subseteq H_n(\xi) \subseteq ...H(\xi).$$

Обозначим

$$S(\xi) = \bigcap_n H_n(\xi),$$

при этом $H_n(\xi)$ и $S(\xi)$ являются подпространствами гильбертова пространства $H(\xi)$, поэтому для любого $\eta \in H(\xi)$ существуют

$$\hat{\pi}_n(\eta) = \hat{\mathbf{M}}\{\eta | H_n(\xi)\}$$

проекция элемента η на подпространство $H_n(\xi)$, и также

$$\hat{\pi}_{-\infty}(\eta) = \hat{\mathbf{M}}\{\eta | S(\xi)\}.$$

З а м е ч а н и е   Напомним, что *проекцией элемента* x гильбертова пространства H со скалярным произведением $< \cdot, \cdot >$ и нормой $\|x\| =< x, x >^{1/2}$ на некоторое подпространство $L \subseteq H$ называется элемент $\hat{\pi}_L(x) \in L$ такой, что

$$\forall y \in L, \quad \|y - x\| \geq \|\hat{\pi}_L(x) - x\|.$$

При этом

$$< \hat{\pi}_L(x), \hat{\pi}_L(x) - x >= 0.$$

В теории гильбертовых пространств показывается, что такой элемент является единственным, а условия

$$\hat{\pi}_L(x) \in L, \quad < \hat{\pi}_L(x), \hat{\pi}_L(x) - x >= 0, \tag{2.1.68}$$

определяют проекцию единственным образом.

Поскольку для любого $x \in H$

$$x = (x - \hat{\pi}_L(x)) + \hat{\pi}_L(x),$$

то тем самым определяется разложение любого элемента $x \in H$ на сумму двух ортогональных элементов, и следовательно, пространство H разложимо в прямую сумму

$$H = L \oplus L^{\perp},$$

пространства L и его ортогонального дополнения $L^{\perp}$.

Оператор $\hat{\pi}_L(x)$, который ставит в соответствие каждому элементу $x \in H$ его проекцию на подпространство L, является линейным и удовлетворяет следующему естественному свойству

$$\hat{\pi}_L(\hat{\pi}_L(x)) = \hat{\pi}_L(x).$$

Любой элемент $\eta \in H(\xi)$, гильбертова пространства $H(\xi)$ со скалярным произведением $(\xi, \eta) = \mathbf{cov}\{\xi, \eta\}$ допускает представление

$$\eta = \hat{\pi}_{-\infty}(\eta) + (\eta - \hat{\pi}_{-\infty}(\eta)),$$

где элементы $\eta - \hat{\pi}_{-\infty}(\eta)$ и $\hat{\pi}_{-\infty}(\eta)$ ортогональны, то есть $\mathbf{cov}\{\eta - \hat{\pi}_{-\infty}(\eta), \hat{\pi}_{-\infty}(\eta)\} = 0$. Таким образом пространство $H(\xi)$ разложимо в прямую сумму подпространств

$$H(\xi) = S(\xi) \oplus S(\xi)^{\perp} = S(\xi) \oplus R(\xi),$$

первое из которых состоит из элементов вида $\hat{\pi}_{-\infty}(\eta)$ с $\eta \in H(\xi)$, а второе из элементов $\eta - \hat{\pi}_{-\infty}(\eta)$.

О п р е д е л е н и е 2.1.20 ССП ξ называется *регулярной,* если

$$H(\xi) = R(\xi),$$

и *сингулярной,* если

$$H(\xi) = S(\xi).$$

■

З а м е ч а н и е Сингулярная последовательность называется еще иначе *детерминированной*, а регулярная *чисто* или *полностью недетерминированной.* Если же $S(\xi)$ является собственным подпространством $H(\xi)$, то последовательность называется *недетерминированной.*

Как следует из определения поведение сингулярной последовательности полностью определяется ее бесконечно далеким прошлым, и следовательно, все будущее поведение должно однозначно восстанавливаться по предшествующим наблюдениям.

Т е о р е м а 2.1.7 *Любая ССП ξ допускает единственное представление*

$$\xi_n = \xi_n^r + \xi_n^s, \tag{2.1.69}$$

где последовательность $\xi^r = (\xi_n^r)$ - регулярна, а последовательность $\xi^s = (\xi_n^s)$ - сингулярна. Последовательности ξ^r, ξ^s - ортогональны, то есть для любых n, m $\mathbf{cov}\{\xi_n^r, \xi_m^s\} = 0$.

О п р е д е л е н и е 2.1.21 Пусть $\xi = (\xi_n)$ невырожденная стационарная последовательность. Последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ называется *обновляющей для ξ*, если:

1. Последовательность ε - есть последовательность белого шума.
2. Для любого $n \in \mathcal{Z}$, $H_n(\xi) = H_n(\varepsilon)$.

■

Т е о р е м а 2.1.8 *Для того, чтобы невырожденная последовательность ξ была регулярной необходимо и достаточно, чтобы существовала обновляющая последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ и последовательность комплексных чисел a_n, $n \geq 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ такая, что*

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \quad (\mathbf{P} - \textit{п.н.}).$$

Следующая теорема, которая непосредственно вытекает из Теорем 2.1.7, 2.1.8, определяет так называемое *разложение Волда* для ССП.

Т е о р е м а 2.1.9 *Любая ССП ξ допускает единственное представление*

$$\xi_n = \xi_n^s + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{2.1.70}$$

где последовательность $\xi^s = (\xi_n^s)$ - сингулярна, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ и $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ - обновляющая для ξ^r.

Важность разложения Волда и введенных понятий регулярной и сингулярной последовательностей становится более ясной при расссмотрении задачи прогнозирования или *экстраполяции* ССП. Как и выше определим $H_0(\xi) = \bar{L}^2(\xi^0)$ - замкнутое в среднеквадратическом смысле линейное многообразие, порожденное случайными величинами $(..., \xi_{-1}, \xi_0)$. Предположим, что мы хотим оценить наилучшим в среднеквадратическом смысле образом значение случайной величины ξ_n, $n > 0$ по наблюдениям до момента времени $t = 0$. При этом оценки выбираются лишь в классе линейных. Другими словами, мы хотим найти элемент $\hat{\xi}_n \in H_0(\xi)$, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{M}\{|\xi_n - \hat{\xi}_n|^2\} \leq \mathbf{M}\{|\xi_n - \eta|^2\}, \quad \forall\, \eta \in H_0(\xi).$$

Этот элемент - есть проекция ξ_n на подпространство $H_0(\xi)$ или

$$\hat{\xi}_n = \hat{\mathbf{M}}\{\xi_n | H_0(\xi)\}.$$

Разложение Волда дает возможность получить явное выражение для этой оценки в терминах обновляющей последовательности.

Л е м м а 2.1.4 *Оптимальная в среднеквадратическом смысле линейная оценка экстраполяции последовательности ξ допускает представление*

$$\hat{\xi}_n = \xi_n^s + \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}. \tag{2.1.71}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о Оптимальная оценка есть результат применения операции проектирования элемента ξ_n на подпространство $H_0(\xi)$. В силу линейности оператора проектирования и Теоремы Волда (Теорема 2.1.9) имеем

$$\hat{\xi}_n = \hat{\mathbf{M}}\{\xi_n | H_0(\xi)\} = \hat{\mathbf{M}}\{\xi_n^s + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} | H_0(\xi)\} = \hat{\mathbf{M}}\{\xi_n^s | H_0(\xi)\} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \hat{\mathbf{M}}\{\varepsilon_{n-k} | H_0(\xi)\}.$$

Далее поскольку

$$\xi_n^s \in S(\xi) \subseteq H_0(\xi),$$

то

$$\hat{\mathbf{M}}\{\xi_n^s | H_0(\xi)\} = \xi_n^s.$$

В слу того, что последовательность ε является обновляющей для ξ (см. Определение 2.1.21),

$$H_0(\xi) = H_0(\varepsilon), \quad H_0(\varepsilon) \perp \varepsilon_k, \text{ при } k \geq 1.$$

Поэтому

$$\hat{\mathbf{M}}\{\varepsilon_{n-k} | H_0(\xi)\} = \begin{cases} \varepsilon_{n-k}, \text{ при } k \geq n, \\ \\ 0, \text{ при } k < n, \end{cases}$$

и следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \hat{\mathbf{M}}\{\varepsilon_{n-k} | H_0(\xi)\} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}.$$

■

Сравнивая выражение для оценки $\hat{\xi}_n$ с разложением Волда последовательности ξ_n получаем выражение для среднеквадратической ошибки экстраполяции

$$\sigma_n^2 = \mathbf{M}\{|\xi_n - \hat{\xi}_n|^2\} = \mathbf{M}\left\{\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k \varepsilon_{n-k}\right|^2\right\} = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2. \tag{2.1.72}$$

Иэ выражения (2.1.72) следует, что

a) Если последовательность ξ - сингулярна, то для любого $n > 0$ ошибка экстраполяции равна нулю, то есть можно безошибочно предсказать значение ξ_n по ее "прошлому" $\xi^0 = (..., \xi_{-1}, \xi_0)$.

b) Если последовательность ξ - регулярна, то $\sigma_n^2 \leq \sigma_{n+1}^2$, и

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \mathbf{M}|\xi_n|^2.$$

в среднеквадратическом смысле.

Связь между разложением Вольда и спектральным разложением ковариационной функции определяется следующей теоремой.

Т е о р е м а 2.1.10 [Колмогоров]. *Пусть спектральная мера ССП ξ - есть $F(d\lambda) = f(\lambda)d\lambda + F^s(d\lambda)$, где первое слагаемое - есть компонента, абсолютно непрерывная по отношению к мере Лебега и $f(\lambda)$ - ее спектральная плотность, второе слагаемое - есть компонента, сингулярная по отношению к мере Лебега. Тогда:*

1. *Если* $\xi_n = \xi_n^r + \xi_n^s$, *и* $\xi_n^r \neq 0$, *то спектральная мера последовательности* ξ^r *- есть компонента* $f(\lambda)d\lambda$, *а спектральная мера последовательности* ξ^s *- есть компонента* $F^s(d\lambda)$.

2. *ССП* ξ *регулярна тогда и только тогда, когда* $F^s(d\lambda) = 0$, $f(\lambda) > 0$ *для почти всех* $\lambda \in [-\pi, \pi]$ *и*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda > -\infty. \tag{2.1.73}$$

3. *Если* $f(\lambda) = 0$ *на множестве положительной меры Лебега, то последовательность* ξ *- сингулярна.*

4. *Если* $f(\lambda) > 0$ *для почти всех* $\lambda \in [-\pi, \pi]$, *но*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda = -\infty, \tag{2.1.74}$$

то последовательность ξ *- сингулярна.*

З а м е ч а н и е Полное доказательство этой теоремы весьма громоздко и опирается на некоторые результаты теории аналитических функций, поэтому далее в Примере 2.1.20 мы рассматриваем частный случай регулярной последовательности, который однако, позволяет прояснить смысл условий теоремы.

2.1.7 Прогнозирование ССП

В данном разделе мы рассмотрим применение полученных выше теоретических результатов к решению конкретных задач прогнозирования ССП. Необходимо подчеркнуть, что в силу разложения Волда любая последовательность представима в виде суммы регулярной и сингулярной, причем сингулярная последовательность прогнозируется точно по всем прошлым значениям последовательности. Уравнение (2.1.71) показывает как в принципе может быть устроена оценка оптимального прогноза и дает выражение для ошибки прогноза. С практической точки зрения, для того чтобы воспользоваться уравнением (2.1.71) необходимо каким-то образом найти коэффициенты a_k, $k = n, \ldots$ и вычислить из предыдущих наблюдений $(\ldots, \xi_{-1}, \xi_0)$ значения последовательности белого шума $(\ldots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)$ и значение ξ_n^s. В результате мы должны получить соотношение вида

$$\hat{\xi}_n = \xi_n^s + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{c}_{-k} \xi_{-k}, \tag{2.1.75}$$

где случайная величина $\xi_n^s \in H_0(\xi)$, а ряд в (2.1.75) сходится в среднеквадратическом смысле.

Поскольку случайная величина $\hat{\xi}_n \in H_0(\xi) \subseteq H(\xi)$, то в силу Теоремы 2.1.4 существует функция $\hat{\varphi}_n(\lambda) \in L^2\{[-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), F(d\lambda)\}$ такая, что случайная величина $\hat{\xi}_n$ допускает представление

$$\hat{\xi}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}_n(\lambda) Z(d\lambda).$$

При этом должны выполняться два условия, обеспечивающие оптимальность оценки прогнозирования:

1. случайная величина $\hat{\xi}_n \in H_0(\xi)$,

2. разность $\hat{\xi}_n - \xi_n$ должна быть ортогональна пространству $H_0(\xi)$, а следовательно и любому элементу этого пространства, то есть любой случайной величине ξ_{-k}, $k = 0, 1, \ldots$

Эти условия выглядят достаточно очевидными с точки зрения геометрических представлений (см. Замечание в предыдущем разделе), и если выразить эти условия в терминах спектральных представлений, то мы получим, что

1. $\hat{\varphi}_n(\lambda) \in H_0(F)$ - замкнутой линейной оболочке системы функций вида $\{e^{-i\lambda k},\ k = 0, 1, ..\}$. Иными словами, функция $\hat{\varphi}_n(\lambda)$ должна быть представима в виде линейной комбинации функций вида $\{e^{-i\lambda k},\ k = 0, 1, ..\}$, или их предела в $L^2\{[-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), F(d\lambda)\}$.

2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}(e^{i\lambda n}-\hat{\varphi}_n(\lambda))e^{i\lambda k}F(d\lambda)=0, \quad \forall k\geq 0.$

Из этих условий также ясно, что препятствует построению "идеального" прогноза для любой последовательности. Казалось бы для того, чтобы обеспечить выполнение условия (2), достаточно взять $\hat{\varphi}_n(\lambda)=e^{i\lambda n}$. Эта функция, однако, не принадлежит подпространству $H_0(F)$ при любой F. В качестве примера можно указать случай последовательности белого шума с $F(d\lambda)=\frac{d\lambda}{2\pi}$, когда функция $e^{i\lambda n}$, $n\geq 1$ ортогональна подпространству $H_0(F)$.

Следующие примеры показывают как условия (1), (2) позволяют синтезировать оптимальный экстраполятор.

П р и м е р 2.1.14 [ССП, имеющая невырожденную спектральную плотность]. Пусть ССП имеет спектральную плотность $f(\lambda)$, представимую в виде

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}|\Phi(e^{-i\lambda})|^2,$$

где аналитическая функция $\Phi(z)$ задана своим разложением в ряд Тейлора $\Phi(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kz^k$, причем радиус сходимости ряда $r>1$, и $\Phi(z)$ не имеет корней при $|z|\leq 1$. Показать, что оптимальный прогноз обеспечивается функцией

$$\hat{\varphi}_n(\lambda)=e^{i\lambda n}\frac{\Phi_n(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \tag{2.1.76}$$

где

$$\Phi_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}b_kz^k.$$

Р е ш е н и е Проверим выполнение условий (1), (2). Числитель в выражении для $\hat{\varphi}_n(\lambda)$ равен

$$e^{i\lambda n}\Phi_n(\lambda)=e^{i\lambda n}[b_ne^{-i\lambda n}+b_{n+1}e^{-i\lambda(n+1)}+\ldots]\in H_0(F),$$

знаменатель $1/\Phi(e^{-i\lambda})$ также принадлежит $H_0(F)$. Действительно, по условию, аналитическая функция $\Phi(z)$ не имеет корней внутри единичного круга, следовательно обратная к ней функция $1/\Phi(z)$ не имеет полюсов внутри единичного круга и представима в круге $|z|\leq 1$ своим разложением в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$, то есть в круге $|z|\leq 1$ $1/\Phi(z)=c_0+c_1z+\ldots.$ и ряд сходится равномерно. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\Phi(e^{-i\lambda})}=c_0+c_1e^{-i\lambda}+\ldots\in H_0(F),$$

поскольку из равномерной сходимости ряда для $1/\Phi(z)$ при $|z|=1$ следует и сходимость ряда для $1/\Phi(e^{-i\lambda})$ в среднеквадратическом. Наконец, произведение двух функций из $H_0(F)$ - есть функция из $H_0(F)$, таким образом, $\hat{\varphi}_n(\lambda)\in H_0$.

Проверим теперь условие ортогональности. Непосредственное вычисление

$$I_k=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(e^{i\lambda n}-\hat{\varphi}_n(\lambda))e^{i\lambda k}f(\lambda)d\lambda$$

при $k\geq 0$ дает

$$I_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda(n+k)}\left[1-\frac{\Phi_n(e^{-i\lambda})}{\Phi(e^{-i\lambda})}\right]|\Phi(e^{-i\lambda}|^2d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda(n+k)}\left[\Phi(e^{-i\lambda})-\Phi_n(e^{-i\lambda})\right]\overline{\Phi(e^{-i\lambda})}d\lambda=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda(n+k)}\left(\sum_{m=0}^{n-1}b_me^{-i\lambda m}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\bar{b}_le^{i\lambda l}\right)d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda k}\left(\sum_{m=0}^{n-1}b_me^{i\lambda(n-m)}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\bar{b}_le^{i\lambda l}\right)d\lambda=0.$$

Последний интеграл равен нулю, поскольку подинтегральное выражение есть линейная комбинация экспонент с показателями $k+(n-m)+l \geq 1$, где $k \geq 0$, $l \geq 0$, $n-m \geq 1$, см. соотношение (2.1.19).

Разложив функцию $\hat{\varphi}_n(\lambda)$ в ряд Фурье по системе ортогональных функций $\{e^{i\lambda n},\ n \in \mathcal{Z}\}$ в силу того, что $\hat{\varphi}_n(\lambda) \in H_0(F)$, мы получим разложение вида

$$\hat{\varphi}_n(\lambda) = C_0 + C_{-1}e^{-i\lambda} + ...,$$

и подставив это разложение в спектральное представление для оценки прогноза получим искомое представление

$$\hat{\xi}_n = \int_{-\pi}^{\pi} [C_0 + C_{-1}e^{-i\lambda} + ...]Z(d\lambda) = C_0\xi_0 + C_{-1}\xi_{-1} + ...$$

■

П р и м е р 2.1.15 [Прогнозирование ССП с рациональным спектром] Пусть спектральная плотность последовательности ξ допускает представление

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})}\right|^2,$$

где функции $P(z), Q(z)$ являются полиномами, конечной степени, не имеющими корней при $|z| \leq 1$. Тогда можно представить функцию $\Phi(z)$ следующим образом

$$\Phi(\lambda) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

где радиус сходимости ряда больше 1. Таким образом задача сводится к предыдущему примеру и оптимальный прогноз получается с помощью функции $\hat{\varphi}_n(\lambda)$ по формуле (2.1.76).

П р и м е р 2.1.16 Рассмотрим пример вычисления оптимального прогноза для последовательности с ковариационной функцией $R(n) = a^n$, $|a| < 1$, для $n \geq 0$. При $n < 0$, $R(n) = \overline{R(-n)} = (\bar{a})^{-n}$. ССП с такой ковариационной функцией рассматривалась в Примере 2.1.6, ее спектральная плотность равна

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-i\lambda}|^2} = \frac{1}{2\pi}|\Phi(e^{-i\lambda}|^2,$$

где

$$\Phi(z) = \frac{(1-|a|^2)^{1/2}}{1-az} = (1-|a|^2)^{1/2}\sum_{k=0} a^k z^k.$$

Отсюда находим, что $\hat{\varphi}_n(\lambda) = a^n$, и следовательно,

$$\hat{\xi}_n = \int_{-\pi}^{\pi} a^n Z(d\lambda) = a^n \xi_0.$$

П р и м е р 2.1.17 [Прогнозирование сингулярной последовательности] Общая теория говорит о том, что сингулярные последовательности можно прогнозировать сколь угодно точно по их прошлому. Покажем, как построить оптимальный прогноз для почти периодической последовательности. Рассмотрим последовательность из Примера 2.1.2. Последовательность случайных величин

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\lambda_k n}$$

где z_i ортогональны, имеет нулевое среднее и ковариационную функцию

$$R(n) = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 e^{i\lambda_k n} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} F(d\lambda),$$

и ее спектральная мера $F(d\lambda)$ дискретна и сосредоточена в точках $\lambda_i \in [-\pi,\pi)$, с весами σ_k^2. Для решения задачи оптимального прогноза, например, на один шаг, мы должны выбрать функцию $\hat{\varphi}(\lambda) \in H_0(F)$, которая минимизирует ошибку прогноза

$$\mathbf{M}|\hat{\xi}_1 - \xi_1|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\lambda} - \hat{\varphi}(\lambda)|^2 F(d\lambda) = \sum_{k=1}^{N} |e^{i\lambda_k} - \hat{\varphi}(\lambda_k)|^2 \sigma_k^2.$$

Из Теоремы 2.1.10 следует, что минимальная ошибка прогноза равна нулю, следовательно, существует функция $\hat{\varphi}(\lambda) \in H_0(F)$ такая, что

$$\hat{\varphi}(\lambda_k) = e^{i\lambda_k} \quad \text{для всех} \quad k = 1, ..., N. \tag{2.1.77}$$

Будем искать эту функцию в виде

$$\hat{\varphi}(\lambda_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e^{-i\lambda k}. \tag{2.1.78}$$

Соотношение (2.1.77) приводит к следующей линейной системе уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты α_k

$$e^{i\lambda_k} = \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l e^{-i\lambda_k l}.$$

Если все λ_k различны, то определитель этой линейной системы

$$det \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\lambda_1} \ldots & e^{-i\lambda_1(N-1)} \\ \ldots & & \\ 1 & e^{-i\lambda_N} \ldots & e^{-i\lambda_N(N-1)} \end{pmatrix} = \prod_{k \neq l} (e^{-i\lambda_k} - e^{-i\lambda_l}) \neq 0,$$

и следовательно, система уравнений относительно α_k имеет решение. Найдя его и подставив в (2.1.78), получим выражение для оценки прогноза на один шаг, которое дает точное значение ξ_1.

Следующие примеры также описывают сингулярные последовательности.

П р и м е р 2.1.18 Показать, что последовательность случайных величин из Примера 2.1.2

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k n},$$

где все $\lambda_k \in [-\pi,\pi), k = 1, ..., \infty$, а $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}|z_k|^2$ также является сингулярной.

Р е ш е н и е По Теореме 2.1.10 последовательность ξ_n - сингулярна, то есть ее можно прогнозировать сколь угодно точно на любое количество шагов. Покажем, как непосредственно построить такой прогноз на один шаг. Спектральная мера последовательности ξ_n сосредоточена на счетном множестве точек $\{\lambda_k, k = 1, 2, ...\}$ поэтому функция $\varphi(\lambda)$, обеспечивающая точный прогноз на один шаг должна быть равна

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} e^{i\lambda_k}, \quad \text{при} \quad \lambda = \lambda_k, \\ \\ \text{произвольна или равна нулю при} \quad \lambda \neq \lambda_k. \end{cases}$$

Покажем, что функция

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\{\lambda_k\}}(\lambda) e^{i\lambda_k} \in H_0(F),$$

то есть существует последовательность $\varphi_n(\lambda) \in H_0(F)$, сходящаяся к $\varphi(\lambda)$ в метрике пространства $L^2 = L^2([-\pi,\pi], \mathcal{B}([-\pi,\pi]), F(d\lambda))$.

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$ и определим такое число $N_1(\varepsilon)$, что

$$\left(\mathbf{M}\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k n} - \sum_{k=1}^{m} z_k e^{i\lambda_k n}\right|^2\right\}\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \mathbf{M}\{|z_k|^2\}\right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

при $m > N_1(\varepsilon)$.

Этого всегда можно добиться в силу сходимости ряда из $\mathbf{M}\{|z_k|^2\}$. Это неравенство означает, что функция $\varphi^m(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{m} I_{\{\lambda_k\}}(\lambda) e^{i\lambda_k}$ удовлетворяет неравенству

$$\|\varphi^m(\lambda) - \varphi(\lambda)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{при} \quad m > N_1(\varepsilon). \tag{2.1.79}$$

По Теореме 2.1.6 для каждого фиксированного k

$$z_k = Z(\{\lambda_k\}) = \underset{N}{l.i.m.} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} \xi_{-l} e^{i\lambda_k l} = \underset{N}{l.i.m.} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_N^k(\lambda) Z(d\lambda).$$

При этом, если $N \to \infty$, то

$$\varphi_N^k(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-i(\lambda-\lambda_k)l} \to I_{\{\lambda_k\}}(\lambda),$$

функция $\varphi_N^k(\lambda) \in H_0(F)$ поскольку является суммой экспонент с отрицательными показателями, и

$$e^{i\lambda_k} \varphi_N^k(\lambda) \to e^{i\lambda_k} I_{\{\lambda_k\}}(\lambda),$$

причем сходимость понимается в смысле метрики пространства L^2. Поэтому для любого фиксированного m при $N \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{m} e^{i\lambda_k} \varphi_N^k(\lambda) \to \sum_{k=1}^{m} e^{i\lambda_k} I_{\{\lambda_k\}}(\lambda) = \varphi^m(\lambda).$$

Следовательно, при любом фиксированном $m > N_1(\varepsilon)$ найдется такое $N_2(m,\varepsilon)$, что при $N > N_2(m,\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} e^{i\lambda_k} \varphi_N^k(\lambda) - \varphi^m(\lambda)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.1.80}$$

причем в силу линейности пространства $H_0(F)$

$$g_N^m(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} e^{i\lambda_k} \varphi_N^k(\lambda) \in H_0(F).$$

Объединяя неравенства (2.1.79), (2.1.80) получаем, что выбрав $m > N_1(\varepsilon)$, $N > N_2(m,\varepsilon)$, в силу неравенства треугольника для нормы, получим для функции $g_N^m(\lambda)$ неравенство

$$\|g_N^m(\lambda) - \varphi(\lambda)\| \leq \varepsilon.$$

Выбрав некоторую последовательность значений $\varepsilon \downarrow 0$, мы получим последовательнсть функций $g_{N(\varepsilon)}^{m(\varepsilon)}(\lambda)$ из $H_0(F)$, аппроксимирующих функцию $\varphi(\lambda)$ в метрике пространства L^2.

Точный прогноз на один шаг можно представить в виде

$$\hat{\xi}_1 = \underset{\varepsilon\downarrow 0}{l.i.m.} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{N(\varepsilon)}^{m(\varepsilon)}(\lambda) Z(d\lambda) = \underset{\varepsilon\downarrow 0}{l.i.m.} \sum_{k=1}^{m(\varepsilon)} \frac{1}{N(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{N(\varepsilon)-1} \xi_{-l} e^{i\lambda_k l}. \tag{2.1.81}$$

■

П р и м е р 2.1.19 Последовательность случайных величин, имеющая спектральную плотность

$$f(\lambda) = 0, \quad 1 < |\lambda| \le \pi,$$

также сингулярна в силу Теоремы 2.1.10. Показать это, непосредственно построив точный прогноз на один шаг.

Р е ш е н и е Функция $f(\lambda)$ обращается в нуль на множестве положительной Лебеговой меры, поэтому в силу Теоремы 2.1.10 последовательность ξ сингулярна и существует точный прогноз на любое количество шагов. Для того чтобы построить такой прогноз нужно найти спектральную функцию прогнозирующего фильтра $\hat{\varphi}_1(\lambda)$,, которая равна $e^{i\lambda}$ при $|\lambda| \le 1$ и произвольна на остальной части отрезка $[-\pi, \pi]$.

При этом, в силу того, что $f(\lambda)$ обращается в нуль вне отрезка $[-1, 1]$, выполняется соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} |e^{ila} - \hat{\varphi}_1(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda = \int_{-1}^{1} |e^{ila} - \hat{\varphi}_1(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda = 0,$$

и требуется лишь обеспечить выполнение условия

$$\hat{\varphi}_1(\lambda) \in H_0(F),$$

то есть на отрезке $[-1, 1]$ функция $\hat{\varphi}_1(\lambda)$ должна аппроксимироваться в L^2 суммой экспонент с отрицательными показателями.

Покажем как построить такую функцию. Заметим, что

$$e^{i\lambda} = [1 - (1 - e^{-i\lambda})]^{-1},$$

и кроме того

$$|1 - e^{-\lambda}| \le r < 1, \quad \text{при} \quad |\lambda| \le 1.$$

З а м е ч а н и е На самом деле это неравенство выполняется и при $|\lambda| \le \delta < \frac{\pi}{3}$.

Поскольку ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = (1 - z)^{-1}$$

сходится равномерно на любом круге радиуса $r < 1$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-i\lambda})^k = [1 - (1 - e^{-i\lambda})]^{-1} = e^{i\lambda},$$

сходится равномерно, а значит и в L^2, при $|\lambda| \le 1$. По формуле бинома Ньютона каждый член ряда представим в виде суммы экспонент с отрицательными показателями

$$(1 - e^{-i\lambda})^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l (-1)^l e^{-i\lambda l} \in H_0(F)$$

поэтому $\hat{\varphi}_1(\lambda)$, обеспечивающая точный прогноз на один шаг представима в виде

$$\hat{\varphi}_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} C_k^l (-1)^l e^{-i\lambda l} \in H_0(F), \tag{2.1.82}$$

и используя спектральное разложение последовательности ξ, получаем точный прогноз в виде ряда, сходящегося в среднеквадратическом смысле

$$\hat{\xi}_1 = \xi_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}_1(\lambda) Z_\xi(d\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} C_k^l (-1)^l \xi_{-l}.$$

Аналогично показывается, Задача 2.2.19, что функция $\hat{\varphi}_n(\lambda)$, обеспечивающая точный прогноз на n шагов равна

$$\hat{\varphi}_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} C_{n+k}^{k} C_{k}^{l} (-1)^{l+k} e^{-i\lambda l} \in H_0(F). \tag{2.1.83}$$

■

П р и м е р 2.1.20 [Общий случай оценивания регулярной ССП. Теорема Зего-Колмогорова-Крейна.] Пусть задана регулярная последовательность ξ, которая имеет спектральную плотность $f(\lambda) > 0$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Эта спектральная плотность представима в виде

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \Phi(e^{-i\lambda}) \right|^2$$

с функцией

$$\Phi(z) = \sqrt{2\pi}\, exp \left\{ \frac{1}{2} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \right\},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} \ln f(\lambda) d\lambda.$$

Функция $\hat{\varphi}_n(\lambda)$, обеспечивающая оптимальный прогноз на n шагов представима в виде (2.1.76)

$$\hat{\varphi}_n(\lambda) = e^{i\lambda n} \frac{\Phi_n(\lambda)}{\Phi(\lambda)},$$

где $\Phi_n(z) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} b_k z^k$, а b_k - есть коэффициенты разложения функции $\Phi(z)$ в ряд Тейлора. Ошибка прогноза равна

$$\mathbf{M}\{|\xi_n - \hat{\xi}_n|^2\} = \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^2.$$

В частности, поскольку

$$b_0 = \Phi(0) = \sqrt{2\pi}\, exp \left(\frac{1}{2} c_0 \right),$$

получаем, что ошибка прогноза на один шаг равна

$$\mathbf{M}\{|\xi_1 - \hat{\xi}_1|^2\} = 2\pi\, exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda \right]. \tag{2.1.84}$$

Этот результат проясняет смысл Теоремы 2.1.10, так как, если интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda = -\infty,$$

то ошибка прогноза на один шаг равна нулю, и следовательно, последовательность сингулярна. Формула (2.1.84) - есть известная *формула Колмогорова* для ошибки прогноза регулярной ССП.

П р и м е р 2.1.21 Вывести формулу Колмогорова для случая действительной регулярной последовательности ξ имеющей спектральную плотность $f(\lambda) > 0$ и $\min\limits_{[-\pi,\pi]} f(\lambda) > 0$.

Р е ш е н и е Предположим вначале, что последовательность ξ подчиняется регрессионной схеме порядка q, (см. Определение 2.1.6 и Теорему 2.1.1) то есть

$$\xi_n + b_1\xi_{n-1} + \ldots + b_q\xi_{n-q} = \varepsilon_n, \tag{2.1.85}$$

где полином $Q(z) = 1 + b_1 z + \ldots + b_q z^k$ не имеет корней внутри единичного круга, а ε - последовательность белого шума с $\mathbf{M}\{|\varepsilon_n|^2\} = \sigma^2$. Для такой последовательности ошибка прогноза на один шаг определяется элементарно, поскольку по формуле (2.1.85) и из ортогональности ε_n и пространства $H_{n-1}(\xi)$ следует, что наилучший линейный прогноз есть

$$\hat{\xi}_n = -b_1\xi_{n-1} - \ldots - b_q\xi_{n-q},$$

а ошибка такого прогноза равна

$$\mathbf{M}\{|\xi_n - \hat{\xi}_n|^2\} = \mathbf{M}\{|\varepsilon_n|^2\} = \sigma^2.$$

С другой стороны для последовательности ξ можно легко подсчитать значение выражения в правой части формулы (2.1.84).

Спектральная плотность последовательности ξ равна

$$f_\xi(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|Q(e^{-i\lambda}|^{-2} = \frac{\sigma^2}{2\pi}\prod_{k=1}^{q}|1 - a_k e^{-i\lambda}|^{-2},$$

где a_k^{-1} - корни полинома $Q(z)$, лежащие вне единичного круга, и следовательно, $|a_k| < 1$. Вычисляем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln f_\xi(\lambda)d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{\sigma^2}{2\pi}d\lambda - \sum_{k=1}^{q}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|1 - a_k e^{-i\lambda}|^2 d\lambda.$$

Однако, используя разложение в ряд Тейлора функции

$$\ln(1 - z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k},$$

справедливое при $|z| < 1$, имеем при $|a_k| < 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln|1 - a_k e^{-i\lambda}|^2 d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi}\ln(1 - a_k e^{-i\lambda})(1 - \bar{a}_k e^{i\lambda})d\lambda =$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^m e^{-im\lambda}}{m} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\bar{a}^m e^{im\lambda}}{m}\right)d\lambda = 0,$$

поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda m}d\lambda = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0.$$

Таким образом для последовательности авторегрессии получаем соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln f_\xi(\lambda)d\lambda = 2\pi\ln\frac{\sigma^2}{2\pi},$$

из которого следует (2.1.84).

Далее мы используем результат о возможности аппроксимации невырожденной спектральной плотности, спектральными плотностями последовательностей авторегресии. Приведем этот результат без доказательства.

Л е м м а 2.1.5 *Пусть спектральная плотность некоторой ССП* $f(\lambda) > 0$, *и* $\min\limits_{[-\pi,\pi]} f(\lambda) = c > 0$. *Тогда для любого* $0 < \varepsilon < c$, *существуют последовательности авторегрессии со спектральными плотностями* $g^1_\varepsilon(\lambda)$ *и* $g^2_\varepsilon(\lambda)$, *удовлетворяющие при всех* $\lambda \in [-\pi,\pi]$ *соотношениям*

$$f(\lambda) - \varepsilon \le g^1_\varepsilon(\lambda) \le f(\lambda) \le g^2_\varepsilon(\lambda) \le f(\lambda) + \varepsilon.$$

Если обозначить через

$$\sigma^2(f(\cdot)) = \inf_{\{c_0,\dots,c_n\}} \mathbf{M}\left\{\left|\xi_1 - \sum_{k=0}^{n} c_k \xi_{-k}\right|^2\right\} =$$

$$\inf_{\{c_0,\dots,c_n\}} \int_{-\pi}^{\pi} \left|e^{i\lambda} - \sum_{k=0}^{n} c_k e^{-i\lambda k}\right|^2 f(\lambda) d\lambda,$$

а именно, ошибку прогноза на один шаг, то очевидно, что

$$\sigma^2(g^1_\varepsilon) \le \sigma^2(f) \le \sigma^2(g^2_\varepsilon).$$

Однако, для любого ε, в силу уже доказанной формулы Колмогорова для последовательности авторегресии, мы имеем соотношения

$$\sigma^2(g^i_\varepsilon) = 2\pi\, exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln g^i_\varepsilon(\lambda) d\lambda\right], \quad \text{для} \quad i = 1, 2.$$

Поэтому переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ получаем требуемый результат

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sigma^2(g^1_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sigma^2(g^2_\varepsilon) = \sigma^2(f) = 2\pi\, exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda\right].$$

■

2.1.8 Задачи для самостоятельного решения

2.2.1 Показать, что последовательность $\xi = (\xi_n)$ случайных величин

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \sin \lambda_k n + \beta_k \cos \lambda_k n),$$

где α_k, β_k - действительные случайные величины, допускает представление

$$\xi_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k n}.$$

2.2.2 Доказать, что стохастическая мера в Примере 2.1.7 конечно-аддитивна.

2.2.3 Доказать следующие свойства ортогональной спектральной меры $Z(d\lambda)$, имеющей структурную функцию $m(d\lambda)$. Для любых множеств $A_1, A_2 \in \mathcal{B}([-\pi,\pi])$ выполняются соотношения:

(a)
$$\|Z(A_1) - Z(A_2)\|^2 = m(A_1 \Delta A_2) =$$

$$m(A_1) + m(A_2) - 2m(A_1 \cap A_2).$$

(b) Если $A_2 \subseteq A_1$, то $\|Z(A_1) - Z(A_2)\|^2 = m(A_1) - m(A_2)$.

(c) Если $A_2 \subseteq A_1$, то $\|Z(A_2)\| \leq \|A_1)\|$.
(d) Если $A_2 \subseteq A_1$, и $Z(A_1) = 0$ то $Z(A_2) = 0$.
(e) $Z(A_1 \setminus A_2) = Z(A_1) - Z(A_1 \cap A_2)$.
(f) Если $A_2 \subseteq A_1$, то $Z(A_1 \setminus A_2) = Z(A_1) - Z(A_2)$.
(g) $Z(A_1 \cup A_2) = Z(A_1) + Z(A_2) - Z(A_1 \cap A_2)$.
(h) $Z(A_1 \Delta A_2) = Z(A_1) + Z(A_2) - 2Z(A_1 \cap A_2)$.

2.2.4 Показать, что последовательность $\xi_n = e^{i\theta n}$, где случайная величина θ имеет равномерное распределение на $[-\pi, \pi]$ является стационарной. Найти ее ковариационную функцию и спектральную плотность.

Ответ

$$\mathbf{M}\{\xi_n\} = 0, \quad R_\xi(n) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad n = 1, \\ \\ 0, & \text{при} \quad n = 0, \end{cases}$$

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}.$$

2.2.5 Показать, что ССП $\xi = (\xi_n)$ случайных величин, обладающая свойством $\xi_n = \xi_{n+N}$ для всех $n \in \mathcal{Z}$ и некоторого N, может быть представлена в виде (2.1.12).

Указание Если последовательность ξ допускает представление (2.1.12) то ее спектральная мера должна быть сосредоточена в точках

$$\lambda_k = \frac{2\pi}{N}k, \; k = 0, ..., N-1.$$

Используя Теорему 2.1.6, соотношение (2.1.66) и свойство периодичности последовательности ξ находим, что

$$z_k = Z(\{\lambda_k\}) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} \xi_l e^{-i\lambda_k l} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} \xi_l e^{-i\frac{2\pi}{N}kl}.$$

Для завершения доказательства нужно показать, что справедливо представление

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{i\lambda_k n},$$

которое следует из соотношения (доказать самостоятельно)

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(m-n)l} = \begin{cases} N, & \text{при} \quad m = n, \\ \\ 0, & \text{при} \quad m \neq n. \end{cases}$$

2.2.6 Пусть ζ_1 некоторая ССП, полученая из ξ с помощью линейного преобразования с частотной характеристикой $\varphi_1(\lambda)$, а ζ_2 некоторая ССП, полученая из ζ_1 с помощью линейного преобразования с частотной характеристикой $\varphi_2(\lambda)$. Показать, что ζ_2 может быть получена из ξ с помощью линейного преобразования с частотной характеристикой $\varphi_2(\lambda)\varphi_1(\lambda)$.

2.2.7 Пусть $X(n) = \frac{1}{3}[Y(n) + Y(n-1) + Y(n-2)]$ найти частотную характеристику преобразования ССП Y в X.

2.2.8 Пусть ξ_n - последовательность, которая подчиняется регрессионной схеме второго порядка

$$\xi_n - (\alpha_1 + \alpha_2)\xi_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\xi_{n-2} = \varepsilon_n,$$

где ε_n - последовательность белого шума с $\mathbf{M}\{|\varepsilon_n|^2\} = 1$ и $|\alpha_1| < 1, \; |\alpha_2| < 1, \; \alpha_1 \neq \alpha_2$.

(a) Найти спектральную плотность ξ_n.

(b) Найти выражение для оценки оптимального прогноза $\hat{\xi}_n$ в терминах ξ_{n-1}, ξ_{n-2}.

(c) Найти ошибку прогноза на один шаг.

(d) Найти представление последовательности ξ в виде одностороннего скользящего среднего и выражение для ошибки прогноза на n шагов.

О т в е т (a) $f_\xi(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi|(1-\alpha_1 e^{-i\lambda})(1-\alpha_2 e^{-i\lambda})|^2}$.

(b) $\hat{\xi}_n = (\alpha_1+\alpha_2)\xi_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\xi_{n-2}$.

(c) $\sigma_1^2 = \mathbf{M}\{|\varepsilon_n|^2\} = 1$.

(d) $\xi_n = \sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l \varepsilon_{n-l}$,

где

$$b_l = \begin{cases} 1, \quad \text{при} \quad l = 0, \\ \dfrac{\alpha_2^{l+1} - \alpha_1^{l+1}}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad \text{при} \quad l > 0. \end{cases}$$

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |b_l|^2.$$

2.2.9 Пусть $0 < a < \pi$, показать, что

$$R(n) = \begin{cases} (\pi n)^{-1} \sin an, \quad n \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}, \\ \frac{a}{\pi}, \quad n = 0, \end{cases}$$

есть ковариационная функция некоторой ССП. найти спектральную плотность этой последовательности.

У к а з а н и е Показать, что

$$R(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} e^{i\lambda n} d\lambda,$$

откуда следует, что последовательность с ковариационной функцией $R(n)$ есть результат прохождения последовательности белого шума через линейный фильтр с частотной характеристикой

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 1, \quad \text{при} \quad |\lambda| \le a, \\ 0, \quad \text{при} \quad a < |\lambda| \le \pi, \end{cases}$$

2.2.10 Найти ковариационную функцию ССП, имеющей спектральную плотность $f(\lambda) = \dfrac{\pi - |\lambda|}{\pi^2}$, $|\lambda| \le \pi$.

У к а з а н и е

$$R(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda.$$

О т в е т

$$R(n) = \begin{cases} 1, \quad \text{при} \quad n = 0, \\ \dfrac{2(-1)^n}{(\pi n)^2} \quad \text{при} \quad n \ne 0. \end{cases}$$

2.2.11 Пусть ξ_n, ζ_n - некоррелированные ССП со спектральными мерами $F_\xi(d\lambda)$, $F_\zeta(d\lambda)$. Показать, что $X_n = \xi_n + \zeta_n$ есть ССП и найти ее спектральную меру.

О т в е т

$$F_X(d\lambda) = F_\xi(d\lambda) + F_\zeta(d\lambda).$$

2.2.12 Пусть ξ_n, ζ_n - ССП, удовлетворяющие уравнениям

$$\xi_n - \alpha\xi_{n-1} = \varepsilon_n^1,$$

$$\zeta_n - \alpha\zeta_{n-1} = \xi_n + \varepsilon_n^2,$$

где $|\alpha| < 1$, а ε^1, ε^2 некоррелированные последовательности белого шума. Найти спектральную плотность ССП ζ.

У к а з а н и е Обозначим $Z^1(d\lambda), Z^2(d\lambda)$ спектральные меры последовательностей ε^1 и ε^2, соответственно. Тогда спектральная мера последовательности ζ равна

$$Z_\zeta(d\lambda) = \frac{Z^1(d\lambda)}{(1-\alpha e^{-i\lambda})^2} + \frac{Z^2(d\lambda)}{1-\alpha e^{-i\lambda}},$$

откуда в силу некоррелированности последовательностей $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ находим ответ.

О т в е т

$$f_\zeta(d\lambda) = \frac{1}{2\pi|(1-\alpha e^{-i\lambda})|^4} + \frac{1}{2\pi|1-\alpha e^{-i\lambda}|^2}.$$

2.2.13 Пусть ξ_n - последовательность двухстороннего скользящего среднего

$$\xi_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k},$$

где

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{при} \quad k = 0, \\ \frac{\sin k}{\pi k} & \text{при} \quad k \neq 0, \end{cases}$$

а ε последовательность белого шума. Найти спектральную плотность последовательности ξ. Определить является ли эта последовательность, регулярной, сингулярной или недетерминированной.

У к а з а н и е Данная последовательность является результатом прохождения белого шума через линейную систему с импульсной характеристикой

$$h(m) = a_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) e^{i\lambda m} d\lambda,$$

где $\varphi(\lambda)$– частотная характеристика линейной системы (см. Пример 2.1.13). Нетрудно убедиться, что

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad |\lambda| \le 1, \\ 0, & \text{при} \quad 1 < |\lambda| \le \pi. \end{cases}$$

О т в е т

$$f_\xi(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{при} \quad |\lambda| \le 1, \\ 0, & \text{при} \quad 1 < |\lambda| \le \pi. \end{cases}$$

Последовательность ξ - сингулярна, см. Пример 2.1.19.

2.2.14 Пусть ξ_n, ζ_n - две ССП с одинаковой ковариационной функцией. Не используя теорему Зего-Колмогорова-Крейна показать, что для этих последовательностей ошибка прогноза на один шаг одна и та же.

2.2.15 Для последовательности из задачи 2.1.4. получить оптимальную оценку прогноза на n шагов и определить ошибку прогноза. Показать, что существует *нелинейный* прогноз последовательности $\hat{\xi}_n$, зависящий лишь от двух последних значений последовательности ξ_0, ξ_{-1}, обеспечивающий точный прогноз, то есть

$$\mathbf{M}\{|\hat{\xi}_n - \xi_n|^2\} = 0, \quad n \geq 1.$$

2.2.16 Для последовательности, имеющей спектральную плотность

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}(10 - 6\cos\lambda)$$

оптимальный линейный прогноз на n шагов.

У к а з а н и е Представим выражение $10 + 6\cos\lambda$ в виде

$$10 + 6\cos\lambda = \sigma^2|1 - \alpha e^{i\lambda}|^2$$

с $|\alpha| < 1$. Находим, что $\sigma^2 = 9, \alpha = 1/3$. Далее все аналогично Примеру 2.1.16.

О т в е т $\hat{\xi}_n = (1/3)^n \xi_0$.

2.2.17 Показать, что последовательность, для которой ошибка прогноза $\sigma_n = 0$, при некотором $n \geq 1$, является сингулярной. Если $\sigma_n \to R(0)$ при $n \to \infty$, то последовательность регулярна.

У к а з а н и е Использовать Теорему 2.1.9 и Лемму 2.1.4.

2.2.18 Показать, что для регулярной последовательности ξ_n

$$\hat{\xi}_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

У к а з а н и е См. указание к предыдущему примеру.

2.2.19 Показать, что функция $\hat{\varphi}_n(\lambda)$, обеспечивающая точный прогноз на n шагов для ССП в Примере 2.1.19 равна

$$\hat{\varphi}_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} C_{n+k}^k C_k^l (-1)^{l+k} e^{-i\lambda l} \in H_0(F).$$

У к а з а н и е Воспользоваться соотношением

$$e^{i\lambda n} = [1 - (1 - e^{-i\lambda})]^{-n}$$

и использовать разложение функции $(1-z)^{-n}$ в ряд Тейлора

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k}^k (-1)^k z^k,$$

равномерно сходящийся в любом круге радиуса $r < 1$.

2.2 Мартингалы (Дискретное время)

При решении прикладных задач, в которых используются теоретико-вероятностные модели, ключевым моментом является наличие зависимости между различными случайными величинами. В общем случае эта зависимость описывается совместным распределением, что хотя и характеризует эту зависимость полностью, но является весьма громоздким и часто неприемлемым. Поэтому все описанные выше основные модели случайных процессов упрощают эту зависимость, сводя ее к некоторым более простым соотношениям. Ясно, что при таком упрощении, модель теряет многие свойства исходного процесса и поэтому для каждого класса моделей можно решить лишь некоторый круг типовых задач. Если рассматривать модель последовательности, образующей мартингал, с этой точки зрения, то удивительным является несоответствие между чрезвычайно простым описанием и тем широким кругом задач, которые в рамках этого описания можно решить. Дело в том, что описание мартингала напрямую связано с множеством случайных событий, происходящих до текущего момента времени, и тем самым его структура оределена естественным ходом времени, что чрезвычайно важно для моделей, описывающих динамические процессы. Этим можно обьяснить широкое применение теории мартингалов в задачах фильтрации, управления, теории связи, финансовой математики и статистики. Кроме того, мартингалы позволяют весьма "экономными" средствами обобщить классические теоремы о сходимости случайных последовательностей, дать оценки вероятностей важных случайных событий в очень простых терминах и т.д. Свойство мартингальности основано на понятии условного математического ожидания относительно некоторой σ - алгебры, которое является обобщением классического понятия, вводимого с помощью формулы Байеса и которое можно определить как

$$\mathbf{M}\{\xi|B\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x|B)$$

с интегралом по условной функции распределения

$$F(A|B) = \frac{\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{B\}} = \mathbf{P}\{\xi \in A|B\}.$$

Необходимоть обобщения этого определения связана с тем, что данная формула теряет смысл если вероятность события B равна нулю, что часто имеет место, если событие B порождается случайной величиной с непрерывным распределением. Поэтому в следующем разделе вводится общее определение условного математического ожидания и приводятся основные свойства этой характеристики случайной величины.

2.2.1 Определение и свойства условного математического ожидания

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, $\mathcal{G}$ - некоторая σ - подалгебра алгебры $\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ и $\xi(\omega)$ - случайная величина такая, что $\mathbf{M}|\xi| < \infty$.

Определение 2.2.1 *Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$* называется случайная величина, обозначаемая $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}$ является $\mathcal{G}$ - измеримой;

2. для любого множества $A \in \mathcal{G}$ выполняется равенство

$$\int_A \xi d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} d\mathbf{P}. \tag{2.2.1}$$

■

Теорема 2.2.1 *Условное математическое ожидание случайной величины ξ, такой что $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$ существует и определено единственным образом с точностью до множества $\mathcal{N}$, $\mathbf{P}\{\mathcal{N}\} = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о   Определим меру $\mathbf{Q}$ на измеримом пространстве $\{\Omega, \mathcal{G}\}$ соотношением

$$\mathbf{Q}(A) = \int\limits_A \xi d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{G}.$$

Эта мера является абсолютно непрерывной относительно меры $\mathbf{P}$, рассматриваемой на том же пространстве. Действительно, если для некоторого множества A мера $\mathbf{P}(A) = 0$ то отсюда в силу интегрируемости случайной величины ξ следует, что и мера $\mathbf{Q}(A) = 0$. По теореме Родона-Никодима это означает, что существует случайная величина, называемая производной Родона-Никодима $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega)$, определенная с точностью до множества меры нуль (по мере $\mathbf{P}$) и измеримая относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$ такая, что для любого события $A \in \mathcal{G}$

$$\mathbf{Q}(A) = \int\limits_A \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) d\mathbf{P}.$$

Данное соотношение означает, что для любого события $A \in \mathcal{G}$

$$\mathbf{Q}(A) = \int\limits_A \xi d\mathbf{P} = \int\limits_A \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) d\mathbf{P},$$

и следовательно,

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega).$$

■

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства условного математического ожидания:

1. Если $\xi(\omega) = C = const \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = C \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
2. Если $\xi(\omega) \le \eta \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} \le \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
3. $|\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}| \le \mathbf{M}\{|\xi||\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
4. Если a, b - заданные константы, ξ, η - интегрируемые случайные величины, то
$$\mathbf{M}\{a\xi + b\eta|\mathcal{G}\} = a\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} + b\mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
5. Пусть $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ - тривиальная σ - алгебра. Тогда,
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
6. Пусть случайная величина ξ измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{F}$, тогда $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}\} = \xi, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
7. $\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\xi\}$.
8. Если $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_1\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
9. Если $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
10. Если случайная величина ξ не зависит от σ - алгебры $\mathcal{G}$, то есть для любого $B \in \mathcal{G}$ случайные величины ξ и I_B - независимы, то
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi\}.$$
11. Пусть η измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$, и $\mathbf{M}\{|\xi\eta|\} < \infty$, тогда
$$\mathbf{M}\{\xi\eta|\mathcal{G}\} = \eta\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

12. **Неравенство Иенсена.** Пусть $g(x)$ - выпуклая вниэ функция такая, что $\mathbf{M}\{|g(x)|\} < \infty$, тогда

$$g[\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}] \le \mathbf{M}\{[g(\xi)|\mathcal{G}]\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

13. Пусть η - $\mathcal{G}$ произвольная измеримая случайная величина. Если $\mathbf{M}\{\xi^2\} < \infty$, $\mathbf{M}\{\eta^2\} < \infty$, то

$$\mathbf{M}\{(\xi - \eta)^2\} \ge \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о [свойство (13)]. Вычислим

$$\mathbf{M}\{(\xi - \eta)^2\} = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} + \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2\} =$$

$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2\} + \mathbf{M}\{(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2\} + 2\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\}.$$

Покажем, что последнее слагаемое равно нулю. Действительно, по свойству (7)

$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)|\mathcal{G}\}\}.$$

Далее, поскольку случайная величина $(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)$ является $\mathcal{G}-$ измеримой и

$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = 0,$$

то по свойству (10)

$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\}(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\} = 0.$$

И, наконец, так как $\mathbf{M}\{(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2)\} \ge 0$, получаем соотношение (13). ∎

З а м е ч а н и е Свойство (13) является чрезвычайно важным в задачах оценивания случайных величин. Действительно, пусть дана пара случайных величин, $\{\xi, \eta\}$, первая из которых ненаблюдаема, а вторая наблюдаема. Предположим, что мы хотим оценить случайную величину ξ наилучшим образом по наблюдению случайной величины η. Ясно, что всякая такая оценка есть не что иное как какая-то измеримая функция случайной величины η, то есть оценка ищется в виде $\hat{\xi} = \varphi(\eta)$. В качестве меры близости оценки и самой случайной величины ξ можно выбрать

$$\mathbf{M}|\xi - \hat{\xi}|^2 = \mathbf{M}|\xi - \varphi(\eta)|^2.$$

Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{F}^\eta$, тогда $\varphi(\eta)$ - есть $\mathcal{G}$ - измеримая случайная величина, и в силу свойства (13)

$$\mathbf{M}\{\xi - \varphi(\eta)\}^2 \ge \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2$$

для любой функции φ. Это означает, что условное математическое ожидание обладает экстремальным свойством наилучшей оценки в среднеквадратическом смысле.

З а м е ч а н и е Если объединить это свойство вместе со свойством (8), то можно увидеть, что оператор взятия условного математического ожидания является оператором проектирования случайных величин $\xi \in H^2$ на множество $\mathcal{G}$ - измеримых случайных величин, и при этом выполняется естественное условие ортогональности

$$(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}) \perp \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\},$$

поскольку

$$\mathbf{cov}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}), \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\}\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = 0.$$

Приведем примеры вычисления условных математических ожиданий.

П р и м е р 2.2.1 Пусть η - дискретная случайная величина, принимающая счетное множество значений $\{y_k,\ k = 1, ...\}$ с вероятностями $\mathbf{P}\{\eta = y_k\} > 0$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta = y_k\} = 1$. Пусть ξ интегрируемая случайная величина. Определить условное математическое ожидание ξ относительно σ - алгебры $\mathcal{F}^\eta$, порожденной случайной величиной η.

Р е ш е н и е   Для любого события $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{P}(A|\eta = y_k) = \frac{\mathbf{P}(A \cap \{\eta = y_k\})}{\mathbf{P}(\eta = y_k)}, \quad k \geq 1.$$

Для $y \in R \setminus \{y_1, y_2, ...\}$ условная вероятность может быть определена произвольным образом, например, можно положить ее равной нулю.

По определению для любого множества $A \in \mathcal{F}^\eta$ должно выполняться равенство

$$\int\limits_A \xi d\mathbf{P} = \int\limits_A \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} d\mathbf{P}. \qquad (2.2.2)$$

Возьмем в качестве $A = \{\eta = y_k\}$, тогда равенство (5.4.2) будет выполняться если

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} = \mathbf{M}\{\xi|\eta = y\} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbf{P}(\eta = y)} \displaystyle\int\limits_{\{\omega:\eta=y\}} \xi d\mathbf{P}, \quad y = y_k, \, k \geq 1, \\ 0, \quad y = R \setminus \{y_1, y_2, ...\}. \end{cases}$$

Поскольку любое подмножество $A \in \mathcal{F}^\eta$ представимо как счетное объединение множеств вида $\{\eta = y_k\}$, то равенство (5.4.2) выполнено и для любого множества $A \in \mathcal{F}^\eta$, и следовательно условное математическое ожидание определено как измеримая функция от случайной величины η. ■

П р и м е р 2.2.2 Пусть дана пара случайных величин $\{\xi, \eta\}$, имеющих совместную плотность распределения $p_{\xi\,\eta}(x, y) \geq 0$ и $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$. Показать, что условное математическое ожидание $\mathbf{M}\{\xi|\eta\}$ можно вычислить по формуле

$$\mathbf{M}\{\xi|\eta\} = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx}{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx}, \quad \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx > 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е   По определению должно выполняться равенство (5.4.1). В качестве множества $A \in \mathcal{F}^\eta$ возьмем $A = \{\eta \leq y\}$. Кроме того, условное математическое ожидание есть $\mathcal{F}^\eta$ - измеримая случайная величина, и поэтому существует борелевская функция $\varphi(y)$ такая, что

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} = \varphi(\eta).$$

Подставив это соотношение в равенство (5.4.1), получим

$$\int\limits_A \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} d\mathbf{P} = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) f_{\xi\,\eta}(u, v) du dv,$$

$$\int\limits_A \xi d\mathbf{P} = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u, v) du dv.$$

Поскольку равенство (5.4.1) должно выполняться при всех $y \in R$, то в силу теоремы Фубини, получаем следующее соотношение, которому должна удовлетворять функция φ

$$\varphi(v) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u, v) du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u, v) du. \qquad (2.2.3)$$

Поскольку равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)du = 0$$

влечет за собой в силу интегрируемости ξ выполнение равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)du = 0$$

то функция $\varphi(v)$

$$\varphi(v) = \begin{cases} \dfrac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)du}, & \text{если} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)du > 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)du = 0. & \end{cases}$$

лействительно удовлетвряет уравнению (5.4.3), и определяет условное математическое ожидание. ■

П р и м е р 2.2.3 [Гауссовские случайные величины]. Пусть в предыдущем примере совместное распределение слуайных величин $\{\xi,\eta\}$ - гауссовское с параметрами

$$\mathbf{M}\{\xi\} = m_\xi, \quad \mathbf{M}\{\eta\} = m_\eta,$$

$$\mathbf{D}\{\xi\} = d_{\xi\,\xi}, \quad \mathbf{D}\{\eta\} = d_{\eta\,\eta} > 0, \quad \mathbf{cov}\{\xi,\eta\} = d_{\xi\,\eta}.$$

Показать, что условное математическое ожидание $\mathbf{M}\{\xi|\eta\}$ можно вычислить по формуле

$$\mathbf{M}\{\xi|\eta\} = m_\xi + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta), \tag{2.2.4}$$

при этом

$$\mathbf{M}\{(\xi - M\{\xi|\eta\})^2\} = d_{\xi\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi}. \tag{2.2.5}$$

Р е ш е н и е Конечно, эту формулу можно получить из общих соотношений, используя выражение для плотности условного распределения. Однако, для гауссовских случайных величин можно воспользоваться тем, что некоррелированность влечет за собой независимость.

Рассмотрим случайную величину

$$\theta = \xi - m_\xi + C(\eta - m_\eta)$$

и выберем параметр C таким образом, чтобы $\theta \perp \eta - m_\eta$. Условие ортогональности дает соотношение

$$d_{\xi\,\eta} + C d_{\eta\,\eta} = 0,$$

откуда $C = -d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}$. Следовательно, случайная величина

$$\theta = \xi - m_\xi - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)$$

не зависит от η и по свойствам условного математического ожидания

$$\mathbf{M}\{\theta|\eta\} = \mathbf{M}\{\theta\} = 0.$$

Вычисляя условное математическое ожидание θ, получаем

$$0 = \mathbf{M}\{\theta|\eta\} = \mathbf{M}\{\xi|\eta\} - m_\xi - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)$$

откуда и следует (5.4.4). Подставляя соотношение для условного математического ожидания в формулу для условной ковариации с учетом соотношения $d_{\xi\,\eta} = d_{\eta\,\xi}$, получаем

$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\eta\})^2\} = \mathbf{M}\{(\xi - m_\xi + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta))^2\} =$$

$$\mathbf{M}\{(\xi - m_\xi)^2 + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}\mathbf{M}\{(\eta - m_\eta)^2\}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} -$$

$$\mathbf{M}\{(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi}\} - \mathbf{M}\{d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)(\xi - m_\xi)\} =$$

$$d_{\xi\,\xi} + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} = d_{\xi\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi}.$$

■

З а м е ч а н и е   Соотношения (5.4.4), (5.4.5) являются выражением важной *теоремы о нормальной корреляции,* дающей простое соотношение для вычисления условных математических ожиданий гауссовских случайных величин. Эти соотношения справедливы и в векторном случае, когда матрица ковариации случайного вектора $d_{\eta\,\eta}$ является положительно определенной.

2.2.2 Определение и примеры мартингалов и субмартингалов

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задано неубывающее семейство σ - алгебр $\mathcal{F}_n$, $n > 0$ такое, что $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq ... \subseteq \mathcal{F}$.

О п р е д е л е н и е 2.2.2 Пусть $X_0, X_1, ...$ - последовательность случайных величин, определенных на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$. Если при каждом n случайная величина X_n - $\mathcal{F}_n$ - измерима, то $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, $n > 0$ или просто $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ будет называться *стохастической последовательностью.*

Если стохастическая последовательность такова, что случайная величина X_n - $\mathcal{F}_{n-1}$ - измерима при всех $n \geq 1$, то такая последовательность будет называться *предсказуемой.* ■

З а м е ч а н и е   Смысл этого названия становится понятным, если в качестве $\mathcal{F}_n$ выбраны σ - алгебры $\mathcal{F}_n^X = \sigma\{X_0, ..., X_n\}$, порожденные случайными величинами из последовательности X до момента времени n. Предсказуемость означает тогда, что случайная величина X_n - есть борелевская функция величин $\{X_0, ..., X_{n-1}\}$, и следовательно, может быть определена по наблюдениям случайных величин до момента, предшествующего n.

О п р е д е л е н и е 2.2.3 Стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$*называется мартингалом, или субмартингалом, если для любого* $n \geq 0$,

$$\mathbf{M}\{|X_n|\} < \infty$$

и соответственно,

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\{X_{n+1}|\mathcal{F}_n\} = X_n \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}) \quad (\textit{мартингал}), \\ &\mathbf{M}\{X_{n+1}|\mathcal{F}_n\} \geq X_n \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}) \quad (\textit{субмартингал}). \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$*называется супермартингалом если последовательность* $-X = (-X_n, \mathcal{F}_n)$ *- субмартингал.* ■

Из свойств условного математического ожидания следует, что свойство (2.2.6) эквивалентно следующему условию: *для любого* $n \geq 0$ *и события* $A \in \mathcal{F}_n$ *имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} &\int\limits_A X_{n+1} d\mathbf{P} = \int\limits_A X_n d\mathbf{P} \quad (\text{мартингал}), \\ &\int\limits_A X_{n+1} d\mathbf{P} \geq \int\limits_A X_n d\mathbf{P} \quad (\text{субмартингал}). \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Приведем ряд простых примеров стохастических последовательностей образующих мартингалы и субмартингалы.

П р и м е р 2.2.4 Пусть $(\xi_n)_{n\geq 0}$ - последовательность независимых случайных величин с $\mathbf{M}\{\xi_n\}=0$. Тогда стохастическая последовательность $X=(X_n,\mathcal{F}_n)$, где $X_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\xi_n$, $\mathcal{F}_n=\sigma\{\xi_0,...,\xi_n\}$ - мартингал. Если $\mathbf{M}\{\xi_n\}\geq 0$, то последовательность X - субмартингал.

П р и м е р 2.2.5 Пусть $(\xi_n)_{n\geq 0}$ - последовательность независимых случайных величин с $\mathbf{M}\{\xi_n\}=1$. Тогда стохастическая последовательность $X=(X_n,\mathcal{F}_n)$, где $X_n=\prod\limits_{k=0}^{n}\xi_n$, $\mathcal{F}_n=\sigma\{\xi_0,...,\xi_n\}$ - мартингал. Если $\mathbf{M}\{\xi_n\}\geq 1$, то последовательность X - субмартингал.

П р и м е р 2.2.6 Пусть ξ - случайная величина с $\mathbf{M}\{|\xi|\}<\infty$ и $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_1\subseteq...\subseteq\mathcal{F}$. Тогда стохастическая последовательность $X=(X_n,\mathcal{F}_n)$, где $X_n=\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}_n\}$ - мартингал. Мартингалы, допускающие такое представление называются *регулярными мартингалами.*

П р и м е р 2.2.7 Пусть стохастическая последоватеьность $X=(X_n,\mathcal{F}_n)$- мартингал, и $g(x)$ - выпуклая вниз функция такая, что $\mathbf{M}\{|g(X_n|\}<\infty$ для всех $n\geq 0$. Тогда стохастическая последовательность $(g(X_n),\mathcal{F}_n)$ - субмартингал. Если стохастическая последовательность $X=(X_n,\mathcal{F}_n)$- субмартингал, и $g(x)$ - выпуклая вниз неубывающая функция такая, что для всех $n\geq 0$ $\mathbf{M}\{|g(X_n|\}<\infty$ для всех $n\geq 0$, то стохастическая последовательность $(g(X_n),\mathcal{F}_n)$ - также субмартингал.

П р и м е р 2.2.8 Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $(\eta_n)_{n\geq 1}$, принимающих значения $\{-1,1\}$ с вероятностями $\mathbf{P}\{\eta_n=1\}=p,\quad \mathbf{P}\{\eta_n=-1\}=q=1-p$. Эту последовательность можно рассматривать как результаты игры двух лиц, где $\eta_n=1$ трактуется как выигрыш первого игрока в $n-$ партии, а $\eta_n=-1$, как его проигрыш. Если последовательность ставок первого игрока есть V_n, то его общий выигрыш после $n-$ ой партии равен

$$X_n=\sum_{k=1}^{n}\eta_nV_n=X_{n-1}+\eta_nV_n.$$

Поскольку игроку неизвестны результаты будущих партий, то его стратегия может базироваться только на результатах прошедших партий, что означает

$$V_n=V_n\{\eta_1,...,\eta_{n-1}\}\geq 0,$$

или V_n - есть $\mathcal{F}_{n-1}=\sigma\{\eta_1,...,\eta_{n-1}\}$ - измеримая случайная величина. Рассмотрим поведение последовательности $X=(X_n,\mathcal{F}_n)$с точки зрения определения 2.2.3, тогда

$$\mathbf{M}\{X_n|\mathcal{F}_{n-1}\}=X_{n-1}+V_n\mathbf{M}\{\eta_n\}$$

и последовательность образует мартингал, если $\mathbf{M}\{\eta_n\}=p-q=0$, субмартингал, если $\mathbf{M}\{\eta_n\}=p-q>0$, и супермартингал, если $\mathbf{M}\{\eta_n\}=p-q<0$.

П р и м е р 2.2.9 Пусть $\xi=(\xi_n)_{n\geq 1}$ - последовательность случайных величин, совместная плотность распределения которых равна либо $p_n^0(x_1,...,x_n)$ либо $p_n^1(x_1,...,x_n)$. Предположим, что функция $p_n^1>0$ и рассмотрим функцию

$$\rho_n=\frac{p_n^0(\xi_1,...,\xi_n)}{p_n^1(\xi_1,...,\xi_n)},$$

которая есть отношение правдоподобия. (Вычисление отношения правдоподобия часто используется в статистике при решении задачи различения гипотез. В данном случае рассматривается ситуация различения гипотез о совместном распределении совокупности случайных величин $\xi_1,...,\xi_n$.)

Если истиная плотность распределения есть p_1, а $\mathcal{F}_n=\sigma\{\xi_1,....,\xi_n\}$, то

$$\mathbf{M}\{\rho_{n+1}|\mathcal{F}_n\}=\mathbf{M}\{\rho_{n+1}|\xi_1=x_1,...,\xi_n=x_n\}=$$

$$\int_R\rho_{n+1}(x_1,...,x_n,y)\mathbf{P}\{\xi_{n+1}\in dy|\xi_1=x_1,...,\xi_n=x_n\}=$$

$$\int_R\frac{p_{n+1}^0(x_1,...,x_n,y)}{p_n^1(x_1,...,x_n)}dy=\frac{p_n^0(x_1,...,x_n)}{p_n^1(x_1,...,x_n)}=\rho_n.$$

Следовательно, последовательность $\rho = (\rho_n, \mathcal{F}_n)$ образует мартингал. С другой стороны, поскольку

$$\mathcal{G}_n = \sigma\{\rho_1, ..., \rho_n\} \subseteq \sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\} = \mathcal{F}_n,$$

то

$$\mathbf{M}\{\rho_{n+1}|\mathcal{G}_n\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\rho_{n+1}|\mathcal{F}_n\}|\mathcal{G}_n\} = \mathbf{M}\{\rho_n|\mathcal{G}_n\} = \rho_n,$$

и следовательно, последовательность $(\rho_n, \mathcal{G}_n)$ также - мартингал.

Следующая теорема, принадлежащая Дубу определяет структуру субмартингала и супермартингала.

Т е о р е м а 2.2.2 *Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$- субмартингал. Тогда существует мартингал $m = (m_n, \mathcal{F}_n)$ и неубывающая предсказуемая случайная последовательность $A = (A_n, \mathcal{F}_{n-1})$ такие, что для любого $n \geq 0$ справедливо разложение Дуба*

$$X_n = m_n + A_n \quad (\mathbf{P} - \textit{п.н.}). \tag{2.2.8}$$

В классе предсказуемых последовательностей A разложение Дуба единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о Положим $m_0 = X_0$, $A_0 = 0$ и

$$\begin{aligned} m_n &= m_0 + \sum_{j=0}^{n-1}[X_{j+1} - \mathbf{M}\{X_{j+1}|\mathcal{F}_j\}], \\ A_n &= \sum_{j=0}^{n-1}[\mathbf{M}\{X_{j+1}|\mathcal{F}_j\} - X_j]. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Нетрудно убедиться, что последовательности m, A обладают требуемыми свойствами. Если существует другое разложение $X_n = m_n^{'} + A_n^{'}$ с предсказуемой последовательностью $A^{'}$, то

$$A_{n+1}^{'} - A_n^{'} = (A_{n+1} - A_n) + (m_{n+1} - m_n) - (m_{n+1}^{'} - m_n^{'}).$$

Взятие условного математического ожидания относительно σ - алгебры $\mathcal{F}_n$, дает равенство

$$A_{n+1}^{'} - A_n^{'} = A_{n+1} - A_n \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}),$$

и поскольку $A_0^{'} = A_0 = 0$, то

$$A_n^{'} = A_n, \quad m_n^{'} = m_n \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$$

для всех $n \geq 0$. ■

О п р е д е л е н и е 2.2.4 Предсказуемая неубывающая последовательность A в разложении Дуба (2.2.8) называется *компенсатором мартингала X.* ■

Разложение Дуба играет основную роль при изучении свойств квадратично интегрируемых мартингалов, то есть мартингалов $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, для которых $\mathbf{M}\{X_n^2\} < \infty$ при $n \geq 0$. Тогда последовательность $X^2 = (X_n^2, \mathcal{F}_n)$ - субмартингал и по Теореме 2.2.2 существуют мартингал $m = (m_n, \mathcal{F}_n)$ и предсказуемая неубывающая последовательность $< X > = (< X >_n, \mathcal{F}_{n-1})$ такие, что

$$X_n^2 = m_n + < X >_n . \tag{2.2.10}$$

О п р е д е л е н и е 2.2.5 Последовательность $< X >$ называется *предсказуемой квадратичной вариацией* или *квадратичной характеристикой* мартингала X. ■

Из формул (2.2.9) следует, что

$$< X >_n = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{M}\{(X_j - X_{j-1})^2|\mathcal{F}_{j-1}\} = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{M}\{(\Delta X_j)^2|\mathcal{F}_{j-1}\}, \tag{2.2.11}$$

и для всех $l \leq k$

$$\mathbf{M}\{(X_k - X_l)^2 | \mathcal{F}_l\} = \mathbf{M}\{X_k^2 - X_l^2 | \mathcal{F}_l\} = \mathbf{M}\{< X >_k - < X >_l | \mathcal{F}_l\}. \qquad (2.2.12)$$

Если $X_0 = 0, (\mathbf{P} - \text{п.н.})$ то

$$\mathbf{M}\{X_k^2\} = \mathbf{M}\{< X >_k\}. \qquad (2.2.13)$$

П р и м е р 2.2.10 Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, где $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\}$, а ξ_n, $n \geq 1$ - последовательность независимых случайных величин с $\mathbf{M}\{\xi_n\} = 0$ и $\mathbf{M}\{\xi_n^2\} < \infty$. Тогда стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$- квадратично интегрируемый мартингал с квадратичной характеристикой

$$< X >_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{\xi_i\}. \qquad (2.2.14)$$

Квадратичная характеристика, таким образом, является детерминированной последовательностью.

П р и м е р 2.2.11 Пусть даны две последовательности $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ и $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n)$ - квадратично интегрируемые мартингалы. Положим

$$< X, Y >_n = \frac{1}{4}[< X + Y >_n - < X - Y >_n]. \qquad (2.2.15)$$

Тогда последовательность $(X_n Y_n - < X, Y >_n, \mathcal{F}_n)$ - мартингал. Поэтому

$$\mathbf{M}\{(X_k - X_l)(Y_k - Y_l) | \mathcal{F}_l\} = \mathbf{M}\{< X, Y >_k - < X, Y >_l | \mathcal{F}_l\}.$$

Если, как в предыдущем примере, мартингалы X, Y образованы как суммы независимых случайных величин $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ и $\{\eta_1, ..., \eta_n\}$, соответственно, то

$$< X, Y >_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{cov}\{\xi_i, \eta_i\}.$$

О п р е д е л е н и е 2.2.6 Последовательность $< X, Y >= (< X, Y >_n, \mathcal{F}_{n-1})$, определенная соотношением (2.2.15) называется *вазимной характеристикой* квадратично интегрируемых мартингалов X и Y. ■

Взаимная квадратичная характеристика равна

$$< X, Y >_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\{\Delta X_i \Delta Y_i | \mathcal{F}_{i-1}\}. \qquad (2.2.16)$$

2.2.3 Марковские моменты и сохранение мартингального свойства при случайной замене времени

В задачах теории случайных процессов важное значение играет понятие Марковского момента или момента остановки. Его физическое значение соответствует моменту времени наступления какого-нибудь случайного события, причем определить произошло оно или нет, можно по наблюдениям предыстории случайного процесса.

О п р е д е л е н и е 2.2.7 Случайная величина $\tau = \tau(\omega)$, принимающая значения из множества $\{0, 1, ..., \infty\}$ называется *Марковским моментом* (относительно $(\mathcal{F}_n)$) если для любого $n \geq 0$

$$\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Если $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$, то Марковский момент τ называется *моментом остановки.* ■

Данное определение эквивалентно следующему, для любого $n \geq 0$

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Покажем это. Дейсвительно, пусть τ удовлетворяет определению 2.2.7. Тогда,

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau = k\},$$

однако, каждое из событий $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$. Поэтому, событие $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Обратно, пусть для всех $n \geq 0$ выполнено $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Тогда,

$$\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\tau > n-1\} = \{\tau \leq n\} \cap \overline{\{\tau \leq n-1\}} \in \mathcal{F}_n.$$

Значение случайной последовательности X в случайный момент времени τ определяется как

$$X_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} X_n I\{\omega : \tau = n\}.$$

Здесь $I\{\omega : \tau(\omega) = n\} = 1$, если $\tau(\omega) = n$ и равно нулю в противном случае. В силу определения 2.2.7 такая суперпозиция случайных величин сохраняет свойства измеримости, и следовательно, является случайной величиной. Действительно, для любого $B \in \mathcal{B}$

$$\{\omega : X_\tau \in B\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{X_n \in B, \tau = n\} \in \mathcal{F}.$$

Рассмотрим следующий пример Марковского момента.

П р и м е р 2.2.12 Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$- стохастическая последовательность, множество $B \in \mathcal{B}(R)$, и τ - момент первого попадания в множество B. То есть

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\},$$

при этом, если $X_n \bar{\in} B$ для всех $n \geq 0$, то полагаем $\tau = \infty$. Случайная величина $\tau(\omega)$ - является Марковским моментом, поскольку для любого $n \geq 0$

$$\{\omega : \tau(\omega) = n\} = \{X_0 \bar{\in} B, ..., X_{n-1} \bar{\in} B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n.$$

Множество Марковских моментов является замкнутым относительно простых операций, например, если τ и σ - два Марковских момента относительно потока $\mathcal{F}_n$, то $\tau + \sigma$, $\min(\tau, \sigma) = \tau \wedge \sigma$ и $\max(\tau, \sigma)$ являются Марковскими моментами. Действительно, для любого $n \geq 0$,

$$\{\min(\tau, \sigma) \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n\} \in F_n,$$

$$\{\max(\tau, \sigma) \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\sigma \leq n\} \in F_n,$$

$$\{\tau + \sigma \leq n\} = \bigcup_{\substack{k,\ l \geq 0 \\ k + l \leq n}} \{\tau = k\} \cap \{\sigma = l\} \in F_n.$$

П р и м е р 2.2.13 Пусть τ - некоторый Марковский момент, тогда $\min\{\tau, n\} = \tau \wedge n$ - также Марковский момент и можно определить, так называемый *остановленный* процесс

$$X_{\tau \wedge n} = \begin{cases} X_n, & \text{при} \quad n \leq \tau, \\ X_\tau, & \text{при} \quad n > \tau. \end{cases}$$

Тогда, если стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$- мартингал (субмартингал), то и остановленная последовательность $X_{\tau \wedge n} = (X_{\tau \wedge n}, \mathcal{F}_n)$ - также мартингал (субмартингал).

Покажем это. Пусть последовательность $X-$ субмартингал. По определению остановленного процесса

$$X_{\tau\wedge(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} X_k I\{\tau = k\} + X_{n+1} I\{\tau \geq n+1\}.$$

Тогда, поскольку случайные величины X_k, $I\{\tau = k\}$, $k = 0, ..., n$ и $I\{\tau \geq n+1\} = I\{\overline{\{\tau \leq n\}}\}$ - $\mathcal{F}_n$ измеримы, то в силу субмартингального свойства

$$\mathbf{M}\{X_{\tau\wedge(n+1)}|\mathcal{F}_n\} = \sum_{k=0}^{n} X_k I\{\tau = k\} + \mathbf{M}\{X_{n+1}|\mathcal{F}_n\} I\{\tau \geq n+1\} \geq$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} X_k I\{\tau = k\} + X_n I\{\tau = n\} + X_n I\{\tau \geq n+1\} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k I\{\tau = k\} + X_n I\{\tau \geq n\} = X_n.$$

Если рассматривать σ - алгебру $\mathcal{F}_n$ как множество событий, происходящих до момента времени n, то по аналогии можно рассматривать и множество событий $\mathcal{F}_\tau$, происходящих до случайного момента времени τ.

О п р е д е л е н и е 2.2.8 Это множество событий определяется как

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \geq 0\}.$$

■

Множество $\mathcal{F}_\tau$ содержит Ω и $\emptyset$, замкнуто относительно операций счетного объединения и счетного пересечения, а кроме того, если $A \in \mathcal{F}_\tau$, то для любого n $\bar{A} \cap \{\tau = n\} = \{\tau = n\} \setminus (A \cap \{\tau = n\}) \in \mathcal{F}_n$, и следовательно, $\bar{A} \in \mathcal{F}_\tau$. Таким образом, $\mathcal{F}_\tau$ - σ - алгебра.

П р и м е р 2.2.14 Случайные величины τ и X_τ измеримы относительно $\sigma-$ алгебры $\mathcal{F}_\tau$. Покажем, что τ измерима относительно $\mathcal{F}_\tau$. Действительно, для произвольного $n \geq 0$ рассмотрим событие $A = \{\tau = n\}$. Проверим, что это событие $A \in \mathcal{F}_\tau$. По определению для любого $m \geq 0$ должно иметь место включение

$$A \cap \{\tau = m\} = \{\tau = n\} \cap \{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m.$$

Однако,

$$\{\tau = n\} \cap \{\tau = m\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}_m, & \text{если} \quad m \neq n, \\ \{\tau = n\} = \{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m, & \text{если} \quad m = n. \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения для случайной величины X_τ показывают, что событие $A = \{X_\tau \in B\}$, для любого $B \in \mathcal{B}(R)$, удовлетворяет включению

$$A \cap \{\tau = m\} = \{X_\tau \in B\} \cap \{\tau = m\} = \{X_m \in B\} \in \mathcal{F}_m,$$

что и означает измеримость X_τ относительно $\mathcal{F}_\tau$.

Если рассматриваются детерминированные моменты времени $m < n$, то в силу определения потока $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$, выполняется включение $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$. Оказывается, что данное свойство остается справедливым, если заменить детерминированные моменты времени на случайные Марковские моменты.

П р и м е р 2.2.15 Пусть τ, σ - Марковские моменты относительно $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$. Пусть $\mathbf{P}\{\tau \leq \sigma\} = 1$, тогда $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$.

Для доказательства этого утверждения возьмем некоторое событие $A \in \mathcal{F}_\tau$ и покажем, что $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Рассмотрим событие

$$A \cap \{\sigma = m\} = A \cap \{\sigma = m\} \cap \{\tau \leq \sigma\}.$$

Это равенство имеет место с точностью до множества нулевой меры, поскольку событие $\{\tau \le \sigma\} = \Omega$ с точностью до множества меры нуль, а все σ - алгебры пополнены множествами нулевой меры. Далее

$$A \cap \{\sigma = m\} \cap \{\tau \le \sigma\} = A \cap \{\tau = m\} = \bigcup_{k=0}^{m} A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_m.$$

Следовательно, для любого $m \ge 0$,

$$A \cap \{\sigma = m\} \in \mathcal{F}_m,$$

что и означает, что $A \in \mathcal{F}_\sigma$.

Если $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ образует мартингал или субмартингал, то по свойствам условного математического ожидания для мартингала

$$\mathbf{M}\{X_n\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{X_n|\mathcal{F}_0\}\} = \mathbf{M}\{X_0\},$$

и для субмартингала

$$\mathbf{M}\{X_n\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{X_n|\mathcal{F}_0\}\} \ge \mathbf{M}\{X_0\}.$$

Это свойство может, однако, нарушаться если заменить детерминированный момент времени на некоторый случайный момент времени τ.

П р и м е р 2.2.16 Рассмотрим пример 2.2.8, в котором игрок использует следующую стратегию игры, выбирая величину ставки V_n по правилу:

$$V_n = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если} \quad \eta_1 = \eta_2 = ... = \eta_{n-1} = -1 \\ \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это означает, что он удваивает ставки, начиная со ставки $V_1 = 1$, и прекращает игру после первого выигрыша. Если $\eta_1 = \eta_2 = ... = \eta_n = -1$, то

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_n V_n = \sum_{k=1}^{n} (-2^{k-1}) = -(2^n - 1).$$

Однако, если $\eta_{n+1} = 1$, то

$$X_{n+1} = X_n + V_{n+1} = -(2^n - 1) + 2^n = 1.$$

Пусть $\tau = \inf\{n : X_n = 1\}$. Если $p = q = 1/2$, то $\mathbf{P}\{\tau = n\} = (1/2)^n$, поэтому

$$\mathbf{M}\{\tau\} = \sum_{n=1}^{\infty} n(1/2)^n = 2 < \infty,$$

и следовательно, $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$. Далее, $\mathbf{P}\{X_\tau = 1\} = 1$, поэтому $\mathbf{M}\{X_\tau\} = 1 \ne \mathbf{M}\{X_0\} = 0$.

Таким образом в данном примере мартингальное свойство нарушается при замене детерминированного момента времени на случайный. Причина в том, что такая стратегия игры в действительности не реализуема, так как игра может продолжаться бесконечно долго и текущее значение проигрыша может быть сколь угодно большим.

Следующая теорема показывает, что в "нормальных" ситуациях мартингальное свойство сохраняется.

Т е о р е м а 2.2.3 *Пусть* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$*- мартингал (субмартингал) и* τ, σ *- моменты остановки, для которых* $\tau, \sigma \le N < \infty$. *Если* $\mathbf{P}\{\tau \le \sigma\} = 1$, *то*

$$\mathbf{M}\{X_\sigma|\mathcal{F}_\tau\} = X_\tau \quad (\ge X_\tau \quad \textit{для субмартингала}),$$

если τ, σ *- произвольные ограниченные моменты остановки, то*

$$\mathbf{M}\{X_\sigma|\mathcal{F}_\tau\} = X_{\tau\wedge\sigma} \quad (\ge X_{\tau\wedge\sigma} \quad \textit{для субмартингала}).$$

Если $\mathbf{P}\{\tau \le \sigma\} = 1$, *то*

$$\mathbf{M}\{X_\tau\} = \mathbf{M}\{X_\sigma\} \quad (\le \mathbf{M}\{X_\sigma\} \quad \textit{для субмартингала}).$$

Для мартингалов, рассматриваемых на бесконечом интервале времени, свойство "нормальности" характеризуется как равномерная интегрируемость.

О п р е д е л е н и е 2.2.9 *Последовательность случайных величин* X_n равномерно интегрируема если

$$\lim_{C\uparrow\infty}\sup_{n\geq 0}\int\limits_{|X_n|>C}|X_n|d\mathbf{P}=0.$$

■

Т е о р е м а 2.2.4 *Пусть последовательность* $X=(X_n,\mathcal{F}_n)$ *образует мартингал и последовательность случайных величин* X_n *является равномерно интегрируемой. Тогда предыдущая Теорема 2.2.3 верна для произвольных (возможно неограниченных) моментов остановки.*

(Доказательство основано на свойстве сходимости равномерно интегрируемого мартингала и приведено ниже см. Пример 2.2.20.)

В примере 2.2.16 условие Теоремы 2.2.4 нарушается. Действительно, последовательность случайных величин X_n не является равномерно интегрируемой, так как случайная величина $|X_n|=2^n-1$ с вероятностью $p=(1/2)^n$, поэтому

$$\sup_{n\geq 0}\int\limits_{|X_n|>C}|X_n|d\mathbf{P}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1.$$

Рассмотрим некоторые примеры использования данной теоремы.

П р и м е р 2.2.17 [Тождества Вальда]. Пусть $\xi_1,\xi_2...$ последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{M}\{|\xi_k|\}<\infty$, и τ - некоторый момент остановки относительно $\mathcal{F}_n^\xi=\sigma\{\xi_1,...,\xi_n\},\quad \tau\geq 1$ и $\mathbf{M}\tau<\infty$. Тогда

$$\mathbf{M}\{\xi_1+...+\xi_\tau\}=\mathbf{M}\{\xi_1\}\mathbf{M}\{\tau\}. \tag{2.2.17}$$

Если $\mathbf{M}\{\xi_k^2\}<\infty$, то

$$\mathbf{M}\{(\xi_1+...+\xi_\tau)-\tau\mathbf{M}\xi_1\}^2=\mathbf{D}\{\xi_1\}\mathbf{M}\{\tau\}. \tag{2.2.18}$$

Доказать соотношения (2.2.17), (2.2.18).

З а м е ч а н и е Соотношения (2.2.17), (2.2.18) называются *тождествами Вальда.*

Р е ш е н и е Докажем тождество (2.2.17) для математического ожидания. Прежде всего обратим внимание на то, что последовательность

$$X_n=\sum_{k=1}^n\xi_k-n\mathbf{M}\xi_1,$$

есть мартингал относительно $\mathcal{F}_n^\xi$. Рассмотрим ограниченный момент остановки $T=\tau\wedge n$, и воспользуемся теоремой о сохранении мартингального свойства. Тогда

$$\mathbf{M}\{X_T\}=\mathbf{M}\{X_0\}=0,$$

откуда следует, что

$$\mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_k\right\}=\mathbf{M}\{\xi_1\}\mathbf{M}\{\tau\wedge n\}. \tag{2.2.19}$$

Требуемое тождество будет получено, если мы перейдем к пределу при $n\to\infty$. Поскольку

$$\tau\wedge n=\min(\tau,n)\uparrow\tau,\quad (\mathbf{P}-\text{п.н.})$$

и $\mathbf{M}\{\tau\} < \infty$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости правая часть (2.2.19) сходится к $\mathbf{M}\{\tau\}$. Случайная величина под знаком математического ожидания в левой части (2.2.19) также ограничена интегрируемой случайной величиной, действительно,

$$\left|\sum_{k=1}^{\tau\wedge n} \xi_k\right| \le \sum_{k=1}^{\tau\wedge n} |\xi_k| \le \sum_{k=1}^{\tau} |\xi_k|,$$

и поскольку $\tau \wedge n \le n$, то для последовательности

$$S_n = \sum_{k=1}^{\tau\wedge n} |\xi_k| - \mathbf{M}|\xi_k|, \quad S_0 = 0,$$

образующей мартингал, имеем $\mathbf{M}\{S_n\} = \mathbf{M}\{S_0\} = 0$, откуда в силу $\mathbf{M}\{|\xi_k|\} = \mathbf{M}\{|\xi_1|\}$

$$\mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^{\tau\wedge n} |\xi_k|\right\} = \mathbf{M}|\xi_1|\mathbf{M}\{\tau\wedge n\} \le \mathbf{M}|\xi_1|\mathbf{M}\{\tau\}.$$

Последовательность

$$S_n \uparrow \sum_{k=1}^{\tau} |\xi_k|, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$$

поэтому в силу теоремы о монотонном пределеьном переходе под знаком интеграла Лебега

$$\mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^{\tau} |\xi_k|\right\} \le \mathbf{M}|\xi_1|\mathbf{M}\{\tau\}.$$

Таким образом в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости можно перейти к пределу под знаком математического ожидания и в левой части соотношения (2.2.19), и поскольку $\tau \wedge n \uparrow \tau, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$ то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\tau\wedge n} \xi_k = \sum_{k=1}^{\tau} \xi_k, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^{\tau\wedge n} \xi_k\right\} = \mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^{\tau} \xi_k\right\}.$$

Таким образом тождество Вальда для средних значений установлено. Тождество для дисперсий получается аналогичным образом, если рассмотреть мартингал $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n^{\xi})$ с $Y_n = X_n^2 - n\mathbf{D}\{\xi_1\}$. ∎

П р и м е р 2.2.18 Применим тождества Вальда к исследованию задачи об игре двух лиц (Примеры 2.2.8, 2.2.16). Предположим, что игроки располагают конечными начальными капиталами A и B, соответственно, ставки фиксированы и равны 1. Если $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k$, то величины капиталов первого и второго игроков после n - го розыгрыша равны

$$X_n = A + S_n, \qquad Y_n = B - S_n.$$

Игра заканчивается если S_n достигает уровня $-A$ или B. В первом случае разоряется первый игрок, во втором - второй. Определим момент окончания игры как момент остановки

$$\tau = \inf\{n \ge 1 : S_n = -A, \quad \text{или} \quad S_n = B\}.$$

Последовательность S_n есть последвательность состояний Марковской цепи, соответствующей модели случайных блужданий, у которой при $p = q = 1/2$ все состояния возвратны. Поэтому за конечное время она достигает любого уровня, поэтому $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$ и $\mathbf{M}\{\tau\} < \infty$ (Задача 2.2.15). Введем $\alpha = \mathbf{P}\{S_\tau = -A\}$ и $\beta = \mathbf{P}\{S_\tau = B\}$, $\alpha + \beta = 1$. Далее при $p = q = 1/2$ мы имеем из (2.2.17)

$$\mathbf{M}\{S_\tau\} = \mathbf{M}\{\tau\}\mathbf{M}\{\eta_1\} = 0 = (-A)\mathbf{P}\{S_\tau = -A\} + B\mathbf{P}\{S_\tau = B\} = \alpha(-A) + \beta B.$$

Разрешив систему уравнений относительно α и β получаем

$$\alpha = \frac{B}{A+B}, \quad \beta = \frac{A}{A+B}.$$

Для оценки среднего времени игры применим тождество (2.2.18), которое дает

$$\mathbf{M}\{S_\tau^2\} = \mathbf{M}\{\tau\}\mathbf{D}\{\eta_1\} = \mathbf{M}\{\tau\} = \alpha A^2 + \beta B^2 = AB.$$

П р и м е р 2.2.19 Рассмотрим предыдущий пример в случае $p \neq q$. Для случайных величин $\xi_k = (q/p)^{\eta_k}$ имеем

$$\mathbf{M}\{\xi_k\} = \frac{q}{p}p + \frac{p}{q}q = 1.$$

Поэтому последовательность

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} \xi_k = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$$

мартингал, причем $\mathbf{M}\{X_0\} = 1$. Если $\mathbf{M}\{\tau\} < \infty$, то можно применить Теорему 2.2.3, что дает соотношение

$$\mathbf{M}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{S_\tau}\right\} = 1 = \alpha\left(\frac{q}{p}\right)^{-A} + \beta\left(\frac{q}{p}\right)^{B},$$

из которого вместе с равенством $\alpha + \beta = 1$

$$\alpha = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{B} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{B} - \left(\frac{q}{p}\right)^{A}}, \quad \beta = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{A}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{B} - \left(\frac{q}{p}\right)^{A}}.$$

Для определения $\mathbf{M}\{\tau\}$ применим тождество (2.2.17), которое дает

$$\mathbf{M}\{\tau\} = \frac{\mathbf{M}S_\tau}{\mathbf{M}\{\eta_1}\} = \frac{\mathbf{M}\{S_\tau\}}{p-q} = \frac{\alpha A + \beta B}{p-q}.$$

Для вычисления $\mathbf{M}\{\tau\}$ нужно подставить соответствующие значения α и β.

З а м е ч а н и е Для корректного применения тождеств Вальда в обоих предыдущих примерах нужно, конечно, вначале убедиться в том, что $\mathbf{M}\{\tau\} < \infty$. Для доказательства конечности математического ожидания τ можно использовать следующее соображение. Рассмотрим последовательность $\tau_n = \tau \wedge n$, поскольку $\tau_n \le n$, то $\mathbf{M}\{\tau_n\} < \infty$ и применимы тождества Вальда. При этом $|S_{\tau_n}| \le \max\{|A|, |B|\}$, и следовательно,

$$|\mathbf{M}\{S_{\tau_n}\}| \le \mathbf{M}\{|S_{\tau_n}|\} \le C_1 < \infty, \quad \mathbf{M}\{S_{\tau_n}^2\} \le C_2 < \infty,$$

откуда следует, что в Примере 2.2.18

$$\mathbf{M}\{S_{\tau_n}^2\} = \mathbf{M}\{\tau_n\}, \quad \text{то есть} \quad \mathbf{M}\{\tau_n\} \le C_2,$$

а в Примере 2.2.19

$$|\mathbf{M}\{S_{\tau_n}\}| = \mathbf{M}\{\tau_n\}|p-q| \quad \text{то есть} \quad \mathbf{M}\{\tau_n\} \le \frac{C_1}{|p-q|}.$$

Поскольку $\tau_n \uparrow \tau$ и $\mathbf{M}\{\tau_n\} \le C < \infty$ то в силу теоремы о монотонном предельном переходе подзанком интеграла Лебега $\mathbf{M}\{\tau\} \le C < \infty$.

2.2.4 Фундаментальные неравенства для мартингалов

Одним из наиболее важных применений Теоремы о сохранении мартингального свойства при случайной замене времени являются, так называемые *мартингальные неравенства.* По форме они напоминают неравенство Чебышева, однако, их содержание существенно опирается на мартингальные свойства. По сути они означают, что распределение всех элементов последовательности, образующей мартингал или субмартингал, до некоторого номера n в значительной степени определяется распределением последнего элемента. Таким образом определяющее свойство субмартингала, состоящее в том, что он является в среднем возрастающей последовательностью, позволяет определить свойства и оценить важные вероятностные характеристики всей совокупности элементов последовательности по распределению последнего элемента.

Теорема 2.2.5 *Пусть последовательность* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- субмартингал. Положим*

$$X_n^+ = \max\{X_n, 0\}, \quad \text{и} \quad X_n^- = \min\{X_n, 0\}.$$

Тогда для любого $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right\} \le \mathbf{M}\left\{X_n^+ I\left(\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right)\right\} \le \mathbf{M} X_n^+, \tag{2.2.20}$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\min_{k\le n} X_k \le -\lambda\right\} \le \mathbf{M}\left\{X_n I\left(\min_{k\le n} X_k \ge -\lambda\right)\right\} - \mathbf{M}\{X_0\} \le \mathbf{M}\{X_n^+\} - \mathbf{M}\{X_0\}, \tag{2.2.21}$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} |X_k| \ge \lambda\right\} \le 3 \max_{k\le n} \mathbf{M}\{|X_k|\}. \tag{2.2.22}$$

Пусть последовательность $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n)$ *- супермартингал. Тогда для любого* $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} Y_k \ge \lambda\right\} \le \mathbf{M}\{Y_0\} - \mathbf{M}\left\{Y_n I\left(\max_{k\le n} Y_k \le \lambda\right)\right\} \le \mathbf{M}\{Y_0\} + \mathbf{M}\{Y_n^-\}, \tag{2.2.23}$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\min_{k\le n} Y_k \le -\lambda\right\} \le \mathbf{M}\left\{Y_n I\left(\min_{k\le n} Y_k \le -\lambda\right)\right\} \le \mathbf{M}\{Y_n^-\}, \tag{2.2.24}$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} |Y_k| \ge \lambda\right\} \le 3 \max_{k\le n} \mathbf{M}\{|Y_k|\}. \tag{2.2.25}$$

Пусть последовательность $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n)$ *- неотрицательный супермартингал. Тогда для любого* $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} Y_k \ge \lambda\right\} \le \mathbf{M}\{Y_0\}, \tag{2.2.26}$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\sup_{k\ge n} Y_k \ge \lambda\right\} \le \mathbf{M}\{Y_n\}. \tag{2.2.27}$$

Замечание Доказательство всех неравенств производится по общей схеме, поэтому покажем в качестве примера вывод неравенства (2.2.20).

Доказательство неравенства (2.2.20). Определим момент остановки

$$\tau = \begin{cases} \inf\{k \le n : X_k \ge \lambda\}, \\ n, \quad \text{если} \quad \max\limits_{k\le n} X_k < \lambda. \end{cases}$$

В силу Теоремы о сохранении мартингального свойства для субмартингала X имеем следующую цепочку неравенств

$$\mathbf{M}\{X_n\} \ge \mathbf{M}\{X_\tau\} = \mathbf{M}\left\{X_\tau I\left(\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right)\right\} + \mathbf{M}\left\{X_\tau I\left(\max_{k\le n} X_k < \lambda\right)\right\} \ge$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right\} + \mathbf{M}\left\{X_n I\left(\max_{k\le n} X_k < \lambda\right)\right\},$$

откуда

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right\} \le \mathbf{M}\left\{X_n I\left(\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right)\right\} \le \mathbf{M}\left\{X_n^+ I\left(\max_{k\le n} X_x \ge \lambda\right)\right\} \le \mathbf{M}X_n^+.$$

■

Т е о р е м а 2.2.6 *Пусть последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ - неотрицательный субмартингал. Тогда для любого $p \ge 1$ выполняются следующие неравенства:*

если $p > 1$

$$\mathbf{M}\{X_n^p\} \le \mathbf{M}\{\max_{k\le n} X_k^p\} \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{M}\{X_n^p\}, \tag{2.2.28}$$

если $p = 1$

$$\mathbf{M}\{X_n\} \le \mathbf{M}\{\max_{k\le n} X_k\} \le \frac{e}{e-1}\left[1 + \mathbf{M}\{|X_n \ln X_n|\}\right]. \tag{2.2.29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о случай $p > 1$. Вначале предположим, что $\mathbf{M}\{\max_{k\le n} X_n^p\} < \infty$. Обозначим $\xi_n = \max_{k\le n} X_n^p$. Для любой неотрицательной случайной величины ξ и $r > 1$ справедливо соотношение (Задача 2.2.20)

$$\mathbf{M}\{\xi^r\} = r\int_0^\infty t^{r-1}\mathbf{P}(\xi \ge t)dt.$$

Воспользовавшись этим соотношением и неравенством (2.2.20) для оценки вероятности события $\mathbf{P}\{\xi \ge t\}$, получим цепочку неравенств

$$\mathbf{M}\{\xi_n^p\} = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbf{P}(\xi_n \ge t)dt \le p\int_0^\infty t^{p-2}\left(\int_{\{\xi_n \ge t\}} X_n d\mathbf{P}\right)dt =$$

$$p\int_0^\infty t^{p-2}\left[\int_\Omega X_n I\{\xi_n \ge t\}d\mathbf{P}\right]dt = p\int_\Omega X_n\left[\int_0^{\xi_n} t^{p-2}dt\right]d\mathbf{P} = \frac{p}{p-1}\mathbf{M}\left\{X_n(\xi_n)^{p-1}\right\}.$$

(Изменение порядка интегрирования возможно в силу неорицательности подинтеральных величин по теореме Фубини.) В силу неравенства Гельдера

$$\mathbf{M}\{X_n(\xi_n)^{p-1}\} \le (\mathbf{M}\{X_n^p\})^{1/p}(\mathbf{M}\{\xi_n^{(p-1)q}\})^{1/q},$$

где $q = \dfrac{p}{p-1}$. Поэтому, подставляя это соотношение в неравенство для $\mathbf{M}\{\xi_n^p\}$, получаем

$$(\mathbf{M}\{\xi_n^p\})^{1/p} \le \frac{p}{p-1}(\mathbf{M}\{X_n^p\})^{1/p}.$$

Возводя последнее неравенство в степень p, получаем результат теоремы.

Если условие $\mathbf{M}\{\xi^p\} < \infty$ не задано, то можно рассмотреть случайную величину $\xi_n \wedge L$, где $L > 0$ - некоторая положительная постоянная. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения для этой случайной величины, имеем неравенство

$$\mathbf{M}\{(\xi_n \wedge L)^p\} \le \frac{p}{p-1}\mathbf{M}\{X^p\},$$

и переходя к пределу при $L \uparrow \infty$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\mathbf{M}\{\xi_n^p\} = \lim_{L\uparrow\infty}\mathbf{M}\{(\xi_n \wedge L)^p\} \le \frac{p}{p-1}\mathbf{M}\{X^p\}.$$

■

Следующая теорема является простым следствием первых двух. Действительно, если последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ - мартингал, то последовательность $|X|^p = (|X_n|^p, \mathcal{F}_n)$ - неотрицательный субмартингал при $p \geq 1$, если $\mathbf{M}\{|X_n|^p\} < \infty$, и к ней применимы предыдущие результаты.

Т е о р е м а 2.2.7 *Пусть последовательность* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- мартингал,* $\lambda > 0$ *и* $p \geq 1$*. Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} |X_k| \geq \lambda\right\} \leq \frac{\mathbf{M}\{|X_n|^p\}}{\lambda^p}, \tag{2.2.30}$$

если $p > 1$

$$\mathbf{M}\{|X_n|^p\} \leq \mathbf{M}\{\max_{k \leq n} |X_k|^p\} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{M}\{|X_n|^p\}, \tag{2.2.31}$$

в частности, если $p = 2$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} |X_k| \geq \lambda\right\} \leq \frac{\mathbf{M}\{|X_n|^2\}}{\lambda^2}, \tag{2.2.32}$$

$$\mathbf{M}\{\max_{k \leq n} |X_k|^2\} \leq 4\mathbf{M}\{X_n^2\}, \tag{2.2.33}$$

З а м е ч а н и е Следующая теорема характеризует "число пересечений" некоторого отрезка $[a, b]$ случайной последовательностью $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, образующей субмартингал. Почему важна эта характеристика? Если некоторая последовательность ξ_n сходится (**P**- п.н.), то для любого отрезка $[a, b]$ элементы последовательности либо остаются в нем после некоторого N, либо выходят из него, либо локализуются около одной из его границ. В любом случае для сходящейся последовательности число пересечений любого отрезка является конечным (**P**- п.н.). Тоерема, принадлежащая Дубу, дает оценку среднего значения числа пересечений ограниченным субмартингалом. Оказывается, что для любых $a, b, \quad a < b$ число песечений конечно с вероятностью 1, отсюда следует сходимость этого субмартингала (**P**- п.н.).

О п р е д е л е н и е 2.2.10 Пусть заданы a, b, $a < b$. Определим последовательность случайных времен

$$\tau_0 = 0,$$

$$\tau_1 = \inf\{n > \tau_0 : X_n \leq a\},$$

$$\tau_2 = \inf\{n > \tau_1 : X_n \geq b\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tau_{2m-1} = \inf\{n > \tau_{2m-2} : X_n \leq a\},$$

$$\tau_{2m} = \inf\{n > \tau_{2m-1} : X_n \geq b\},$$

полагая $\tau_k = \infty$, если соответствующее множество, по которому берется инфинимум пусто. Для каждого $n \geq 1$ определим случайную величину

$$\beta_n(a, b) = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad \tau_2 > n, \\ \max\{m : \tau_{2m} \leq n\}, \quad \text{если} \quad \tau_2 \leq n. \end{cases}$$

Случайная величина $\beta_n(a, b)$ - есть *число пересечений отрезка* $[a, b]$ *последовательностью* $\{X_k, k = 1, \ldots, n\}$ *снизу вверх.* ■

Т е о р е м а 2.2.8 *Пусть* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- субмартингал. Тогда для любого* $n \geq 1$

$$\mathbf{M}\{\beta_n(a, b)\} \leq \frac{\mathbf{M}\{[X_n - a]^+\}}{b - a}. \tag{2.2.34}$$

2.2.5 Сходимость субмартингалов и мартингалов

Из неравенства Дуба для числа пересечений следует теорема о сходимости субмартингала. Эта теорема является аналогом теоремы классического анализа о сходимости неубывающей ограниченной последовательности. Действительно, субмартингал является аналогом неубывающей последовательности, поскольку является неубывающим в вероятностном смысле (в смысле условного среднего), однако, этого оказывается достаточно, чтобы установить его сходимость почти наверное.

Т е о р е м а 2.2.9 *Пусть* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- субмартингал с*

$$\sup_n \mathbf{M}\{[X_n]^+\} < \infty.$$

Тогда ($\mathbf{P}$*- п.н.*) *существует* $\lim_n X_n = X_\infty$ *и* $\mathbf{M}\{[X_\infty]^+\} < \infty$.

Если

$$\sup_n \mathbf{M}\{|X_n|\} < \infty,$$

то условие теоремы выполняется и ($\mathbf{P}$- п.н.) существует $\lim_n X_n = X_\infty$ и $\mathbf{M}\{|X_\infty|\} < \infty$.

Непосредственное применение данной теоремы позволяет сформулировать ряд простых следствий для неположительных мартингалов и субмартиингалов, поскольку для них $[X_n]^+ = 0$.

Т е о р е м а 2.2.10 *Если* X *- неположительный субмартингал,* ($\mathbf{P}$*- п.н.*) *существует ограниченный предел* $\lim X_n$.

Если $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- неположительный субмартингал, то расширенная последовательность* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *с* $1 \leq n \leq \infty$, *где* $X_\infty = \lim X_n$, *и* $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left\{\bigcup \mathcal{F}_n\right\}$ *- неположительный мартингал.*

Данное утверждение означает, что

$$\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_m\} \geq X_m.$$

Если X *- неположительный мартингал, то* ($\mathbf{P}$*- п.н.*) *существует ограниченный предел* $\lim X_n$.

Следующая теорема относится к важному классу равномерно интегрируемых мартингалов и устанавливает свяь между свойством равномерной интегрируемости (см. Определение 2.2.9), регулярностью (см. Пример 2.2.6) и сходимостью.

Т е о р е м а 2.2.11 *Пусть последовательность* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *образует мартингал, тогда следующие условия эквивалентны:*

а) Последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *является регулярным мартингалом, то есть существует случайная величина* η, $\mathbf{M}\{|\eta|\} < \infty$ *такая, что*

$$X_n = \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_n\};$$

б) Последовательность случайных величин X_n, $n \geq 1$ *является равномерно интегрируемой;*

в) Последовательность X_n *сходится в* L_1 *к некоторой случайной величине* X_∞, *то есть*

$$\lim_n \mathbf{M}\{|X_n - X_\infty|\} = 0;$$

д) $\sup_n \mathbf{M}\{|X_n|\} < \infty$ *и расширенная последовательность* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, $1 \leq n \leq \infty$, *где*

$$X_\infty = \lim X_n, \qquad \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$$

образует мартингал, то есть, $\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_n\} = X_n$, ($\mathbf{P}$ *– п.н.*).

С помощью данной теоремы можно установить теперь и теорему о сохранении мартингального свойства при случайной замене времени, сформулированную ранее (см. Теорему 2.2.4).

П р и м е р 2.2.20 [Доказательство Теоремы 2.2.4] Вследствие Теоремы 2.2.11 последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ образует равномерно интегрируемый мартингал и поэтому ($\mathbf{P}$- п.н.) существует $X_\infty = \lim_n X_n$.

Далее, чтобы определить $\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\}$ нужно показать, что случайная величина X_τ - интегрируема, то есть $\mathbf{M}\{|X_\tau|\} < \infty$. Однако, как следует из свойств Марковских моментов, если $X_n = \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_n)\}$ то $X_\tau = \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\}$. Действительно, воспользуемся равенством

$$\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_n\}I\{\tau = n\} = \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\}I\{\tau = n\},$$

которое означает, что на множестве, где $\tau = n$ условные математические ожидания относительно σ - алгебр $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{F}_\tau$ совпадают. Это свойство справедливо и для любых случайных величин η, $\mathbf{M}\{|\eta|\} < \infty$, то есть

$$\mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_n\}I\{\tau = n\} = \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_\tau\}I\{\tau = n\}$$

и мы его приводим без доказательства.

Далее в силу этого равенства и свойства регулярности имеем

$$\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\}I\{\tau = n\} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_n\}I\{\tau = n\} = \sum_{n=0}^{\infty}X_n I\{\tau = n\} = X_\tau.$$

Таким образом

$$X_\tau = \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\},$$

$$\mathbf{M}\{|X_\tau|\} = \mathbf{M}\{|M\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\}|\} \le \mathbf{M}\{|X_\infty|\},$$

и следовательно, $\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\}$ определено. Воспользуемся теперь свойством вложенности σ - алгебр: $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$, если $\mathbf{P}\{\sigma \le \tau\} = 1$ (см. Пример 2.2.15). Тогда

$$\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\}|\mathcal{F}_\sigma\} = \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\sigma\} = X_\sigma, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

Если условие $\mathbf{P}\{\sigma \le \tau\} = 1$ не имеет места, то равенство выполнено лишь на множестве $\{\sigma \le \tau\}$, однако, на множестве $\{\sigma > \tau\}$

$$\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\} = X_\tau,$$

поэтому в общем случае мы имеем соотношение

$$\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\} = X_{\tau\wedge\sigma}. \tag{2.2.35}$$

Обобщение теоремы о случайной замене времени для субмартингалов имеет следующий вид.

Т е о р е м а 2.2.12 *Пусть субмартингал* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *мажорируется некоторым регулярным мартингалом, то есть для некоторой интегрируемой случайной величины* η, $\mathbf{M}\{|\eta|\} < \infty$

$$X_n \le \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_n\}.$$

Тогда, если $\mathbf{P}\{\sigma \le \tau\} = 1$, *то*

$$\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\} \ge X_\sigma. \tag{2.2.36}$$

Если условие $\mathbf{P}\{\sigma \le \tau\} = 1$ *не имеет места, то в общем случае выполняется соотношение*

$$\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\} \ge X_{\tau\wedge\sigma}. \tag{2.2.37}$$

Еще одно полезное свойство также вытекает из свойств регулярных мартингалов.

Т е о р е м а 2.2.13 [Леви] *Пусть* $\eta = \eta(\omega)$ *- интегрируемая случайная величина (*$\mathbf{M}\{|\eta|\} < \infty$*) и* $\{\mathcal{F}_n, n = 1, 2, ..\}$ *- неубывающее семейство* σ *- подалгебр* $\mathcal{F}$*. Тогда при* $n \to \infty$ *(*$\mathbf{P}$*- п.н.)*

$$\mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_n\} \to \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_\infty\},$$

где $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$ *- минимальная* σ *- алгебра, содержащая все* σ *- алгебры* $\mathcal{F}_n$*.*

З а м е ч а н и е Смысл данной теоремы становится прозрачным если вспомнить о том, что операция взятия условного математического ожидания осуществляет проектирование случайной величины на σ - алгебру, относительно которой оно вычисляется (см. свойство 8 и комментарий к экстремальному свойству условного математического ожидания 13). Тогда смысл данной теоремы состоит в том, что результат проектирования некоторого вектора (случайной величины η) на последовательность расширяющихся подпространств (σ - алгебр $\mathcal{F}_n$) сходится к результату проектирования этой случайной величины на предельное подпространство (σ - алгебу $\mathcal{F}_\infty$).

В заключение приведем пример нерегулярного мартингала, еще один нерегулярный мартингал возникал в Примере 2.2.16.

П р и м е р 2.2.21 Пусть $X_n = exp\{S_n - \frac{n}{2}\}$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, и независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_k имеют нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$, и $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\}$. Тогда $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ - мартингал, и

$$\lim_n X_n = \lim_n exp\left\{n\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)\right\} = 0, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}),$$

поскольку в силу усиленного закона больших чисел

$$\frac{S_n}{n} \to 0, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

Следовательно $X_\infty = 0, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, и $X_n \neq \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_n\} = 0$.

2.2.6 Сходимость и расходимость квадратично - интегрируемых мартингалов

Поведение квадратично - интегрируемого мартингала в значительной степени определяется его квадратической характеристикой (компенсатором).

Обозначим $\{X_n \to\}$ подмножество пространства элементарных исходов, на котором последовательность X_n сходится к некоторому пределу. Для квадратично интегрируемого мартингала $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ обозначим $\{< X >_\infty < \infty\}$ подмножество пространства элементарных исходов, на котором неубывающая последовательность $< X >_n$, образующая его компенсатор, ограничена, и следовательно, сходится к конечному пределу.

Будем также использовать обозначение

$$A \subseteq B, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}),$$

если

$$\mathbf{P}\{I_A \leq I_B\} = 1,$$

то есть событие A содержится в событии B с точностью до множества нулевой вероятности.

Т е о р е м а 2.2.14 *Пусть* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- квадратично интегрируемый мартингал. Тогда имеет место включение*

$$\{< X >_\infty < \infty\} \subseteq \{X_n \to\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

(Иными словами сходимость мартингала влечет за собой сходимость его квадратичной характеристики ($\mathbf{P}$*- п.н.).)*

Доказательству этого результата предпошлем следующую лемму.

Л е м м а 2.2.1 *Пусть* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- субмартингал с* $X_0 = 0$ *и*

$$X_n = m_n + A_n$$

его разложение Дуба (см. Теорему 2.2.2.) Тогда, если $X_n \geq 0$, *то* (**P**- *п.н.)*

$$\{A_\infty < \infty\} \subseteq \{X_n \to\}. \tag{2.2.38}$$

Доказательство леммы.

Для произвольного $a > 0$ определим Марковский момент

$$\tau_a = \begin{cases} \inf\{n \geq 1 : A_{n+1} > a\}, \\ \\ \infty \quad \text{если} \quad \sup A_n \leq a. \end{cases}$$

Тогда $A_{\tau_a} \leq a$ и поскольку $m_{\tau_a \wedge n}$ также мартингал (см. Пример 2.2.13), то

$$\mathbf{M}\{X_{\tau_a \wedge n}\} = \mathbf{M}\{m_{\tau_a \wedge n}\} + \mathbf{M}\{A_{\tau_a \wedge n}\} = \mathbf{M}\{X_0\} + \mathbf{M}\{A_{\tau_a \wedge n}\} = \mathbf{M}\{A_{\tau_a \wedge n}\} \leq a.$$

Последовательность $Y_n^a = X_{\tau_a \wedge n}$ есть неотрицательный субмартингал с $\sup\limits_n \mathbf{M}\{Y_n^a\} \leq a < \infty$, поэтому Y_n^a - сходится (**P**- п.н.) и $\{Y_n^a \to\} = \Omega$, (**P**- п.н.). Далее поскольку на множестве $\{\tau_a = \infty\}$ выполняется $Y_n^a = X_n$, то

$$\{A_\infty \leq a\} = \{\tau_a = \infty\} = \{Y_n^a \to\} \bigcap \{\tau_a = \infty\} = \{X_n \to\} \bigcap \{\tau_a = \infty\} \subseteq \{X_n \to\}.$$

Поэтому (**P**- п.н.)

$$\{A_\infty < \infty\} = \bigcup_{a>0} \{A_\infty \leq a\} \subseteq \{X_n \to\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о [Доказательство теоремы] Рассмотрим два субмартингала $X^2 = (X_n^2, \mathcal{F}_n)$ и $(X+1)^2 = ((X+1)_n^2, \mathcal{F}_n)$. Пусть их разложения Дуба

$$X_n^2 = m_n^{'} + A_n^{'}, \quad (X+1)_n^2 = m_n^{''} + A_n^{''},$$

тогда $A_n^{'} = A_n^{''}$, поскольку

$$A_n^{'} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{\Delta X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{(\Delta X_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}\},$$

и

$$A_n^{''} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{\Delta (X_k + 1)^2 | \mathcal{F}_{k-1}\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{\Delta X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{(\Delta X_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}\}.$$

В силу 2.2.38 (**P**- п.н.)

$$\{< X >_\infty < \infty\} = \{A_\infty^{'} < \infty\} \subseteq \{X_n^2 \to\} \bigcap \{(X+1)_n^2 \to\} = \{X_n \to\}.$$

■

Следующий результат, который мы приводим без докательства показывает, когда сходимость квадратичной характеристики и сходимость мартингала эквивалентны.

Т е о р е м а 2.2.15 *Если выполнено неравенство* $\mathbf{M} \sup |\Delta X_n|^2 < \infty$, *то* (**P**- *п.н.)*

$$\{< X >_\infty < \infty\} = \{X_n \to\}.$$

(Если приращения мартингала равномерно ограничены в среднем, то мартингал и его квадратичная характеристика сходятся и расходятся одновременно (**P**- *п.н.). Данное условие выполняется если, например,* $|\Delta X_n| \leq C$).

Для квадратично - интегрируемых мартингалов справедлив закон больших чисел.

Т е о р е м а 2.2.16 *Пусть* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- квадратично интегрируемый мартингал, и* $< X >= (< X >_n, \mathcal{F}_{n-1})$ *- его квадратичная характеристика. Если* $\mathbf{P}\{< X >_\infty = \infty\} = 1$, *то*

$$\lim_n \frac{X_n}{< X >_n} = 0, \quad (\mathbf{P} - \textit{п.н.}).$$

Следующий пример показывает применение этого результата в задаче оценивания неизвестного параметра.

П р и м е р 2.2.22 Пусть $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$ - последовательность независимых случайных величин, с $\mathbf{M}\xi_i = 0, \quad \mathbf{D}\xi_i = V_i > 0$, и последовательность X_n определена с помощью рекуррентного соотношения

$$X_{n+1} = \theta X_n + \xi_{n+1},$$

где X_0 не зависит от $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$ и θ - неизвестный параметр, $-\infty < \theta < \infty$. Можно рассаматривать X_n как результаты измерений, по которым необходимо построить оценку параметра θ,

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_0, X_1, ..., X_n).$$

Рассмотрим оценку метода наименьших квадратов, которая строится следующим образом, для заданного набора $X_0, ..., X_n$ оценка θ_n выбирается так, чтобы минимизировать сумму нормированных среднеквадратических отклонений, а именно:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(X_{k+1} - \theta X_k)^2}{V_{k+1}} \to \min_\theta .$$

Эта задача на нахождение минимума квадратичной формы

$$\theta^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k^2}{V_{k+1}} - 2\theta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k X_{k+1}}{V_{k+1}} \to \min_\theta$$

имеет решение в виде оценки метода наименьших квадратов

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{X_k X_{k+1}}{V_{k+1}}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{X_k^2}{V_{k+1}}}.$$

Эту оценку можно записать в виде

$$\hat{\theta}_n = \theta + \frac{M_n}{< M >_n},$$

где

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k \xi_{k+1}}{V_{k+1}}$$

квадратично интегрируемый матрингал с квадратичной характеристикой

$$< M >_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k^2}{V_{k+1}}.$$

Таким образом, сходимость оценки метода наименьших квадратов к точному значению параметра θ имеет место если

$$\frac{M_n}{< M >_n} \to 0, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}). \tag{2.2.39}$$

Следующие условия являются достаточными для выполнения (2.2.39). Если

$$\sup_n \frac{V_{n+1}}{V_n} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M} \min\left(\frac{\xi_n^2}{V_n}, 1\right) = \infty,$$

то условие (2.2.39) выполняется и $\hat{\theta}_n \to \theta, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi_n^2}{V_n}, 1\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2}{V_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X_n - \theta X_{n-1})_n^2}{V_n} \le$$

$$2\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^2}{V_n} + \theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{n-1}^2}{V_n}\right] \le 2\left[\sup_n \frac{V_{n+1}}{V_n} + \theta^2\right] < M >_\infty .$$

Следовательно,

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi_n^2}{V_n}, 1\right) = \infty\right\} \subseteq \{< M >_\infty = \infty\}.$$

По теореме Колмогорова о трех рядах расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M} \min\left(\frac{\xi_n^2}{V_n}, 1\right)$$

влечет за собой ($\mathbf{P}$- п.н.) расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi_n^2}{V_n}, 1\right)$. Таким образом, $\mathbf{P}\{< M >_\infty = \infty\} = 1$, и по Теореме 2.2.16 выполняется (2.2.39), что влечет за собой сходимость оценки.

2.2.7 Задачи для самостоятельного решения

2.2.1. Пусть ξ и η - независимые и одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{M}|\xi| < \infty$. Показать, что

$$\mathbf{M}\{\xi|\xi + \eta\} = \mathbf{M}\{\eta|\xi + \eta\} = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

У к а з а н и е Воспользоваться определением 5.4.1 и проверить выполнение свойств условного математического ожидания.

2.2.2. Пусть ξ - случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$. Показать, что если $F_\xi(b) - F_\xi(a) > 0$, то

$$\mathbf{M}\{\xi|a < \xi \le b\} = \frac{\int\limits_a^b x F_\xi(x)}{F_\xi(b) - F_\xi(a)}.$$

У к а з а н и е Воспользоваться определением 5.4.1 и проверить выполнение свойств условного математического ожидания.

2.2.3. Вывести из определения условного математического ожидания его свойства:

1. Если $\xi(\omega) = C = const \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = C \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
2. Если $\xi(\omega) \le \eta \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} \le \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
3. $|\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}| \le \mathbf{M}\{|\xi||\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
4. Если a, b - заданные константы, ξ, η - интегрируемые случайные величины, то

$$\mathbf{M}\{a\xi + b\eta|\mathcal{G}\} = a\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} + b\mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

5. Пусть $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ - тривиальная σ - алгебра. Тогда,
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\xi, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
У к а з а н и е Воспользоваться тем, что относительно тривиальной σ алгебры измеримы лишь константы.
6. Пусть случайная величина ξ измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{F}$, тогда $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}\} = \xi, \quad (\mathbf{P}$-п.н.).
7. $\mathbf{M}(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}\}) = \mathbf{M}\xi$.
8. Если $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_1\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
9. Если $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
10. Если случайная величина ξ не зависит от σ - алгебры $\mathcal{G}$, то есть для любого $B \in \mathcal{G}$ случайные величины ξ и I_B - независимы, то
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\xi.$$
11. Пусть η измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$, и $\mathbf{M}|\xi\eta| < \infty$, тогда
$$\mathbf{M}\{\xi\eta|\mathcal{G}\} = \eta\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
12. **Неравенство Иенсена.** Пусть $g(x)$ - выпуклая внизэ функция такая, что $\mathbf{M}\{|g(x)|\} < \infty$, тогда
$$g[\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}] \le \mathbf{M}\{[g(\xi)|\mathcal{G}]\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
У к а з а н и е Воспользоваться тем, что для выпуклой вниз функции $g(x)$ существует такая функция $q(x)$, что для любых x, y справедливо неравенство
$$g(x) \ge g(y) + q(y)(x - y).$$
Если $g(x)$ - дифференцируема, то $q(x) = g^{'}(x)$.

2.2.4. Доказать теорему о нормальной корреляции для гауссовских векторов. См. пример 5.4.2.

У к а з а н и е Рассмотреть случайный вектор
$$\theta = \xi - m_\xi + C(\eta - m_\eta)$$
и выбрать матрицу C таким образом, чтобы $\theta \perp \eta - m_\eta$. Далее как в примере 5.4.2.

2.2.5. Доказать, что последовательность в примере 5.4.3 образует мартингал.

2.2.6. Доказать, что последовательность в примере 2.2.5 образует мартингал.

2.2.7. Доказать, что последовательность в примере 2.2.6 образует мартингал.

2.2.8. Доказать, что последовательность в примере 2.2.7 образует субмартингал.

У к а з а н и е Использовать неравенство Иенсена.

2.2.9. Для квадратично интегрируемого мартингала вывести соотношения (2.2.11) - (2.2.13).

2.2.10. В примере 2.2.10 вывести соотношение (2.2.14) для квадратичной характеристики.

2.2.11. В примере 2.2.11 показать, что последовательность
$$(X_n Y_n - < X, Y >_n, \mathcal{F}_n),$$
где $< X, Y >$ определена соотношением (2.2.15) образует мартингал. Вывести соотношение (2.2.16) для взаимной квадратичной характеристики.

2.2.12. В примере 2.2.13 показать, что "остановленный" мартингал (субмартингал) также является мартингалом (субмартингалом).

2.2.13. Объяснить почему разность Марковских моментов, вообще говоря Марковским моментом не является.

2.2.14. Вывести тождество Вальда для дисперсий (соотношение (2.2.18) в примере 2.2.17).

2.2.15. Показать, что в примерах 2.2.18, 2.2.19 игра всегда заканчивается за конечное время (**P**- п.н.) и математическое ожидание времени окончания игры конечно.

У к а з а н и е Воспользоваться свойствами Марковского процесса случайного блуждания и замечанием после Примера 2.2.19.

2.2.16. Воспользовавшись общей схемой доказательства неравенства (2.2.20) завершить доказательство Теоремы 2.2.5.

2.2.17. Пусть $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_i = 2\} = 1/2$. Показать, что последовательность

$$X = (X_n, \mathcal{F}_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \xi_i, \sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\}\right\}$$

является мартингалом и сходится с вероятностью 1 к конечной случайной величине. Показать также, что при этом последовательность X не является регулярным мартингалом.

У к а з а н и е Показать, что данная последовательность сходится к нулю (**P**- п.н.). Показать, что данная последовательность не явяляется равномерно интегрируемой и воспользоваться Теоремой 2.2.11.

2.2.18. Пусть $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$ - последовательность независимых случайных величин с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_i = -1\} = \frac{1}{2i}, \quad \mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = 1 - \frac{1}{i}.$$

Показать, что последовательность

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

расходится (**P**- п.н.).

У к а з а н и е Показать, что X_n - квадратично интегрируемый мартингал, найти его квадратичную характеристику и воспользоваться Теоремой 2.2.15.

2.2.19. Пусть $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$ - последовательность независимых случайных величин с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_i = -1\} = \frac{1}{2i^2}, \quad \mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = 1 - \frac{1}{i^2}.$$

Показать, что последовательность

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

сходится (**P**- п.н.).

У к а з а н и е См. указание к предыдущему примеру.

2.2.20. Показать, что для любой неотрицательной случайной величины ξ и $r > 1$ справедливо соотношение

$$\mathbf{M}\xi^r = r\int_0^\infty t^{r-1}\mathbf{P}(\xi \geq t)dt.$$

У к а з а н и е Использовать формулу интегрирования по частям и показать, что для любой $L > 0$

$$r\int_0^L t^{r-1}\mathbf{P}(\xi \geq t)dt = L^r\mathbf{P}\{\xi \geq L\} + \int_0^L t^r\,dF(t) = \mathbf{M}\{(\xi \wedge L)^r\},$$

а затем перейти к пределу по $L \uparrow \infty$.

2.2.21. Показать, что случайные моменты времени $\tau_k, k \geq 1$ в Определении 2.2.10 являются Марковскими моментами.

Глава 3

Случайные функции

3.1 Стационарные случайные процессы

В предыдущих разделах были введены понятия процесса интегрируемого в среднеквадратическом смысле (см. Раздел 1.2.2) и процессов стационарных в широком смысле (см. Раздел 1.2.3). В разделе, посвященном стационарным случайным последовательностям, или стационарным процессам с дискретным временем, мы видели как понятие стационарности, позволяет весьма экономными средствами, лишь в терминах ковариационной функции решать многочисленные практически важные задачи. Целый ряд задач, возникающих в технике связи в физике, требует расширения понятия стационарности на процессы в непрерывном времени. Шумы в электронных, приборах, квантовый шум оптического излучения, атмосферные радиопомехи - это все примеры случайных процесов, развивающихся в непрерывном времени. Очень часто можно считать, что статистические характеристики этих процессов остаются неизменными в течение времени их наблюдения, и тогда эти процессы можно с достаточной степенью точности считать стационарными.

3.1.1 Ковариационная функция стационарного случайного процесса

В данном разделе мы рассматриваем лишь процессы $\xi(t)$, $t \in R$, стационарные в широком смысле, поэтому согласно определениям 1.2.5, для стационарного комплекснозначного процесса в непрерывном времени,

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\} = m_\xi(t) = const = m_0, \quad \mathbf{cov}\{\xi(t), \xi(s)\} = \mathbf{M}\{(\xi(t) - m_0)\overline{(\xi(s) - m_0)}\} = R_\xi(t-s).$$

З а м е ч а н и е В дальнейшем мы полагаем, что $m_0 = 0$.

Основные свойства ковариационной функции следуют из общих свойств ковариационной функции квадратично-интегрируемого процесса (см. Теоремы 1.2.1, 1.2.5):

1. Ковариационная функция является *Эрмитовой* то есть удовлетворяет следующему условию симметрии
$$R_\xi(t) = \overline{R_\xi(-t)}; \tag{3.1.1}$$
2. $$|R_\xi(t)| \le R_\xi(0); \tag{3.1.2}$$
3. $$|R_\xi(t) - R_\xi(s)|^2 \le 2R_\xi(0)[R_\xi(0) - Re\{R_\xi(t-s)\}]. \tag{3.1.3}$$
4. Ковариационная функция $R_\xi(t)$ непрерывна на R если она непрерывна при $t = 0$. (Задача 3.1.1)
5. Ковариационная функция $R_\xi(t)$ является неотрицательно-определенной, то есть для любых $\{t_1, ..., t_n\} \in R$ и произвольного набора комплексных чисел $\{z_1, ..., z_n\}$, $n \ge 1$ имеет место неравенство
$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i \bar{z}_j R_\xi(t_i - t_j) \ge 0. \tag{3.1.4}$$

6. Любая неотрицательно-определенная функция является Эрмитовой, то есть выполнение неравенства (3.1.4) влечет выполнение равенства (3.1.1).

Также как и в случае дискретного времени ковариационная функция стационарного процесса имеет спектральное представление. И также как в случае дискретного времени, в непрерывном времени справедливо обратное утверждение. Возможность спектрального представления определяет и существование стационарного случайного процесса с заданной ковариационной функцией.

Т е о р е м а 3.1.1 [Бохнер - Хинчин] *Комплекснозначная функция $R_\xi(t)$, определенная на R^1 и непрерывная при $t = 0$, является ковариационной функцией некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса тогда и только тогда, когда она допускает представление*

$$R_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_\xi(\lambda),$$

где $F_\xi(\cdot)$ - действительная неубывающая ограниченная функция на R.

О п р е д е л е н и е 3.1.1 Мера $F_\xi(d\lambda)$, порожденная функцией распределения $F_\xi(\lambda)$ на борелевских подмножествах в R называется *спектральным распределением* процесса $\xi(t)$. ■

Функция $F_\xi(\cdot)$ непрерывна справа и определена с точностью до некоторой аддитивной постоянной, которую можно выбрать так, чтобы $F_\xi(-\infty) = 0$, $F_\xi(\infty) = R_\xi(0)$.

Если спектральная мера $F_\xi(d\lambda)$ имеет плотность $f_\xi(\lambda) \geq 0$, то есть для любого Борелевского множества $B \in \mathcal{B}(R)$, имеет место соотношение

$$F_\xi(B) = \int\limits_B f_\xi(\lambda) dx,$$

то взяв в качестве множества $B = (-\infty, \lambda]$, получаем соотношение

$$F_\xi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} f_\xi(y) dy,$$

откуда следует, что

$$f_\xi(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} F_\xi(\lambda), \text{ почти всюду на } R.$$

З а м е ч а н и е Функция $f_\xi(\lambda)$ обычно называется *спектральной плотностью* стационарного процесса $\xi(t)$, параметр λ имеет смысл частоты, а само спектральное разложение показывает распределение энергии стационарного процесса по частотам спектра.

Т е о р е м а 3.1.2 *Если ковариационная функция абсолютно интегрируема, то есть*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |R_\xi(t)| dt < \infty, \tag{3.1.5}$$

то тогда спектральная плотность существует и определяется обратным преобразованием Фурье

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} R_\xi(t) dt.$$

Если условие абсолютной интегрируемости (3.1.5) не выполнено, то спектральная мера определяется следующим соотношением, для любых $\lambda_1 < \lambda_2$

$$F_\xi(\lambda_1) - F_\xi(\lambda_2) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{it\lambda_1} - e^{-it\lambda_2}}{it} R_\xi(t) dt.$$

Если спектральное распределение симметрично, то есть если

$$F(\lambda) - R_\xi(0) = R_\xi(0) - F(-\lambda + 0), \qquad (3.1.6)$$

то ковариационная функция действительна и

$$R_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\cos t\lambda) dF_\xi(\lambda). \qquad (3.1.7)$$

Если при этом ковариационная функция удовлетворяет соотношению (3.1.5), то спектральная плотность существует и определяется соотношением

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} R_\xi(t)\cos(t\lambda) dt.$$

Спектральная плотность обладает следующими свойствами:

Т е о р е м а 3.1.3 *Пусть стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность $f_\xi(\lambda)$, тогда:*

1. $f_\xi(\lambda) \geq 0$, *при всех* $-\infty < \lambda < \infty$;
2. *спектральная плотность действительного процесса является четной функцией, то есть* $f_\xi(\lambda) = f_\xi(-\lambda)$;
3. *дисперсия стационарного процесса связана со спектральной функцией соотношением*

$$D_\xi = R_\xi(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(\lambda) d\lambda, \qquad (3.1.8)$$

если процесс действительный, то

$$D_\xi = R_\xi(0) = 2\int\limits_{0}^{\infty} f_\xi(\lambda) d\lambda.$$

П р и м е р 3.1.1 Спектральная плотность некоторого случайного процесса имеет вид

$$f_\xi(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{2\pi}, & \text{если} \quad |\lambda| \leq x_0, \\ 0, \text{если} & |\lambda| > x_0, \end{cases}$$

где $x_0 > 0$. Вычислить ковариационную функцию и дисперсию процесса $\xi(t)$.

Р е ш е н и е В силу симметрии спектральной плотности по формуле (3.1.7) имеем с учетом соотношения $dF_\xi(\lambda) = f_\xi(\lambda) d\lambda$

$$R_\xi(t) = 2\int\limits_{0}^{\infty} (\cos(t\lambda)) f_\xi(\lambda) d\lambda = \frac{\sigma^2}{\pi}\int\limits_{0}^{x_0} (\cos(t\lambda)) d\lambda = \frac{\sigma^2}{\pi t}\sin(x_0 t).$$

$$D_\xi = R_\xi(0) = \frac{\sigma^2}{\pi}\int\limits_{0}^{x_0} d\lambda = \frac{\sigma^2 x_0}{\pi}.$$

■

З а м е ч а н и е   Заметим, что ковариационная функция обращается в нуль при $x_0 t = \pi k, \quad k \in \mathcal{Z}$. Это означает, что сечения процесса $\xi(t), \xi(t + \frac{\pi k}{x_0})$ не коррелированы.

П р и м е р 3.1.2 Существует ли стационарный в широком смысле случайный процесс, имеющий ковариационную функцию

$$R_\xi(t) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{при} \quad |t| \le t_0, \\ 0, & \text{при} \quad |t| > t_0? \end{cases}$$

Р е ш е н и е   Предположим, что такой процесс существует. Тогда его ковариационная функция удовлетворяет (3.1.5), и следовательно, данный процесс должен иметь спектральную плотность

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} R_\xi(t) dt = \frac{\sigma^2}{\pi} \int\limits_0^{t_0} \cos(t\lambda) dt = \frac{\sigma^2}{\pi\lambda} \sin(t_0 \lambda).$$

Заметим однако, что данная функция $f_\xi(\lambda)$ не является неотрицательной, и следовательно, не может быть спектральной плотностью. Таким образом, процесса с заданной ковариационной функцией не существует.
■

П р и м е р 3.1.3 В главе 1 обсуждалось понятие процесса "белого шума" как процесса, имеющего ковариационную функцию

$$R_\xi(t) = \sigma^2 \delta(t).$$

Вычислить спектральную плотность процесса белого шума.

Р е ш е н и е   Формально применяя преобразование Фурье к δ - функции, получаем

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \sigma^2 \delta(t) dt = \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

■

З а м е ч а н и е   В данном разделе мы будем использовать понятие процесса "белого шума", как процесса имеющего равномерную спектральную плотность во всем диапазоне частот $-\infty < \lambda < \infty$.

П р и м е р 3.1.4 Ковариационная функция некоторого стационарного случайного процесса $R_\xi(t)$ имеет вид

$$R_\xi(t) = D e^{-\alpha|t|},$$

где $D > 0, \alpha > 0$ - некоторые параметры. Показать, что данный процесс имеет спектральную плотность и вычислить ее.

Р е ш е н и е   Функция $R_\xi(t)$ удовлетворяет условию (3.1.5), поэтому существует спектральная плотность

$$f_\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} R_\xi(t) dt = \frac{D}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t - \alpha|t|} dt =$$

$$\frac{D}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} [e^{-i\lambda t - \alpha t} + e^{i\lambda t - \alpha t}] dt = \frac{D}{2\pi} \left[\frac{1}{i\lambda + \alpha} + \frac{1}{-i\lambda + \alpha} \right] = \frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}.$$

■

З а м е ч а н и е   Параметр α характеризует скорость уменьшения корреляции между сечениями, поскольку при $t \ll 1/\alpha$ выполняется $R_\xi(t) \approx 0$. Если сечения процесса некоррелированы при близких значениях t, t', то такой процесс может быть хорошей моделью процесса белого шума при $\alpha \to \infty$. Действительно, если D и α стремятся к бесконечности, так что $D/\alpha \to \sigma^2 > 0$, то спектральная плотность $f_\xi(\lambda) \to \frac{\sigma^2}{\pi}$ стремится к равномерной спектральной плотности во всем диапазоне частот $-\infty < \lambda < \infty$.

Приведем примеры некоторых наиболее часто встречающихся стационарных (в широком смысле) процессов.

П р и м е р 3.1.5 Пусть $\xi(t) = \xi_0 g(t)$, где $\mathbf{M}\{\xi(0)\} = 0$, $\mathbf{M}\{\xi^2(0)\} = 1$ и $g = g(t)$ - некоторая комплекснозначная детерминированная функция. При каких функциях $g(t)$ случайный процесс $\xi(t)$ стационарен? Определить ковариационную функцию такого процесса.

Р е ш е н и е Из условия стационарности получаем соотношение

$$g(t)\overline{g(s)} = g(t-s)\overline{g(0)},$$

откуда, если использовать представление функции $g(t) = \rho(t)e^{i\varphi(t)}$, вытекает, что

$$\rho(t) = |g(0)| = const, \quad \varphi(t) - \varphi(t-s) = \varphi(s) - \varphi(0).$$

Если предположить, что $\varphi(\cdot)$– дифференцируема при $t = 0$, то

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \left.\frac{d}{dt}\varphi(t)\right|_{t=0} = \lambda.$$

Откуда функция

$$g(t) = |g(0)|e^{i\lambda t}.$$

Ковариационная функция такого процесса равна

$$R_\xi(t) = |g(0)|^2 e^{i\lambda t}.$$

■

Также как и в случае почти периодических процессов дискретного времени можно построить пример стационарного почти периодического процесса, задав его непосредственное разложение по гармоническим функциям. Следующий пример является обобщением предыдущего.

П р и м е р 3.1.6 Рассмотрим процесс

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k t},$$

где случайные величины z_k ортогональны, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\{|z_k|^2\} < \infty \tag{3.1.9}$$

сходится и все числа $-\infty < \lambda_k < \infty$ - различны. Показать, что данный процесс является стационарным и определить его ковариационную функцию. Найти спектральное разложение процесса ξ.

Р е ш е н и е Ряд $\xi(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k t}$ сходится в среднеквадратическом смысле для любого $t \in R$. Это следует из сходимости ряда (3.1.9) (см. Пример 2.1.2). Далее также как в Примере 2.1.2 используем условие ортогональности и получаем для ковариационной функции соотношение

$$\begin{gathered} R_\xi(t,s) = \mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k t}\overline{\sum_{l=1}^{\infty} z_l e^{i\lambda_l s}}\right\} = \\ \sum_{k,l\geq 1} \mathbf{M}\{z_k \bar{z}_l\}e^{i(tk-sl)} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\{|z_k|^2\}e^{i\lambda_k(t-s)}. \end{gathered} \tag{3.1.10}$$

Таким образом $R_\xi(t,s) \equiv R_\xi(t-s)$ и процесс является стационарным.

Соотношение (3.1.10) задает и спектральное распределение процесса $\xi(t)$

$$F_\xi(\lambda) = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \mathbf{M}|z_k|^2.$$

■

Следующий пример описывает, так называемый, "телеграфный сигнал", модель которого часто используется для случайных процесов, связанных с передачей информации.

П р и м е р 3.1.7 Пусть $\{\xi(t),\, t\in R\}$ - случайный процесс, принимающий два значения $\xi(t)=\{1,\,-1\}$, с вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi(t)=1\}=\frac{1}{2},\quad \mathbf{P}\{\xi(t)=-1\}=\frac{1}{2}.$$

Последовательность моментов перехода из одного состояния в другое формирует однородный процесс Пуассона с параметром $\lambda_0>0$. Это означает, что вероятность $p_k(u)$, того что на интервале $(t,t+u)$ происходит k переходов равна

$$p_k(u)=e^{-\lambda_0 u}\left(\frac{(\lambda_0 u)^k}{k!}\right),\quad k=0,1,....$$

Показать, что данный процесс является стационарным и определить его характеристики.

Р е ш е н и е Находим среднее значение

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\}=1\cdot\mathbf{P}\{\xi(t)=1\}+(-1)\cdot\mathbf{P}\{\xi(t)=-1\}=0.$$

Далее определяем ковариационную функцию при $\tau>0$ с учетом того, что процесс может принимать лишь два значения. В этом случае произведение $\xi(t)\xi(t+\tau)$ может также принимать лишь два значения $\{1,-1\}$, и соответственно,

$$R_\xi(t,t+\tau)=\mathbf{M}\{\xi(t),\xi(t+\tau)\}=$$

$$\mathbf{P}\{\xi(t)=1,\xi(t+\tau)=1\}-\mathbf{P}\{\xi(t)=-1,\xi(t+\tau)=1\}+$$

$$\mathbf{P}\{\xi(t)=-1,\xi(t+\tau)=-1\}-\mathbf{P}\{\xi(t)=1,\xi(t+\tau)=-1\}.$$

С учетом очевидной симметрии имеем соотношения

$$\mathbf{P}\{\xi(t)=1,\xi(t+\tau)=1\}=\mathbf{P}\{\xi(t)=-1,\xi(t+\tau)=-1\},$$

$$\mathbf{P}\{\xi(t)=-1,\xi(t+\tau)=1\}=\mathbf{P}\{\xi(t)=1,\xi(t+\tau)=-1\}.$$

Заметим теперь, что событие $\{\xi(t)=1,\xi(t+\tau)=1\}$ состоит в том, что процесс $\xi(\cdot)$, который находился в момент времени t в состоянии $\xi(t)=1$ совершил на интервале $(t,t+\tau)$ четное число переходов. Отсюда находим

$$\mathbf{P}\{\xi(t)=1,\xi(t+\tau)=1\}=\mathbf{P}\{\xi(t)=1|\xi(t+\tau)=1\}\mathbf{P}\{\xi(t)=1\}=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}p_{2k}(\tau)=\frac{e^{-\lambda_0\tau}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_0\tau)^{2k}}{(2k)!}\right)=\frac{e^{-\lambda_0\tau}\,ch\,(\lambda_0\tau)}{2}.$$

Аналогично,

$$\mathbf{P}\{\xi(t)=-1,\xi(t+\tau)=1\}=\frac{e^{-\lambda_0\tau}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_0\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)=\frac{e^{-\lambda_0\tau}\,sh\,(\lambda_0\tau)}{2}.$$

Подставляя эти соотношения в выражение для ковариационной функции получаем

$$R_\xi(t,t+\tau)=e^{-\lambda_0\tau}[ch\,(\lambda_0\tau)-sh\,(\lambda_0\tau)]=e^{-2\lambda_0\tau}.$$

В силу симметрии $R_\xi(t+\tau,t)=e^{2\lambda_0\tau}$ при $\tau<0$ и следовательно,

$$R_\xi(t,t+\tau)=R_\xi(\tau)=e^{-2\lambda_0|\tau|},$$

что и доказывает стационарность. Ковариационная функция $R_\xi(t)$ абсолютно интегрируема, поэтому по Теореме 3.1.2 процесс имеет спектральную плотность

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\cos\,(\lambda t)e^{-2\lambda_0 t}dt=\frac{2\lambda_0}{\pi(4\lambda_0^2+\lambda^2)}. \qquad (3.1.11)$$

■

3.1.2 Спектральное представление стационарного случайного процесса

Используя понятие ортогональной стохастической меры, введенное в разделе 2.1.4 для спектрального представления ССП, можно получить спектральное представление и для стационарного случайного процесса. Так же как и в случае дискретного времени это представление задается стохастическим интегралом по некоторой мере $Z(dx)$, определенной на борелевских подмножествах пространства R.

Т е о р е м а 3.1.4 *Пусть* $\{\xi(t), t \in R\}$ *стационарный в широком смысле случайный процесс со значениями в* $L_2\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ *, имеющий*

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\} = 0, \quad \mathbf{cov}\{\xi(t), \xi(s)\} = R_\xi(t-s).$$

Ковариационная функция $R_\xi(\cdot)$ *непрерывна в нуле и допускает представление*

$$R_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_\xi(\lambda).$$

Тогда существует единственная с точностью до стохастической эквивалентности ортогональная стохастическая мера $Z(d\lambda)$ *со значениями в* $L_2\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ *такая, что*

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z(d\lambda), \quad (\mathbf{P} - \textit{п.н.}). \tag{3.1.12}$$

Для любого борелевского множества $A \in \mathcal{B}(R)$

$$\mathbf{M}\{|Z(A)|^2\} = m(A) = \int\limits_A dF_\xi(\lambda).$$

Если $Z(\lambda)$ - есть процесс с ортогональными приращениями, соотвествующий ортогональной стохастической мере $Z(d\lambda)$, то представление для процесса $\xi(t)$ можно записать в форме стохастического интеграла по процессу с ортогональными приращениями

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ(\lambda), \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}),$$

наконец, если $\mathbf{M}\{\xi(t)\} = \alpha \neq 0$, то представление имеет вид

$$\xi(t) = \alpha + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z(d\lambda).$$

Спектральное представление играет важную роль в описании линейных преобразований случайного процесса.

3.1.3 Линейные преобразования стационарных случайных процессов

Представим себе некоторую систему $\mathcal{S}$, осуществляющую преобразование сигналов, то есть функций, зависящих от времени. Функция, которая должна быть преобразована называется *входом,* а функция которая получается в результате преобразования называется *выходом* системы $\mathcal{S}$. Всякая система задается классом $\mathcal{L}$ допустимых функций на входе и оператором, $TX(\cdot) = Y(\cdot)$, где $X(\cdot)-$ допустимая функция на входе, а $Y(\cdot)-$ функция на выходе системы.

О п р е д е л е н и е 3.1.2 Система называется *линейной,* если:

1. класс $\mathcal{L}$ - есть линейное пространство;

2. оператор T удовлетворяет принципу суперпозиции, то есть

$$T(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha T X_1 + \beta T X_2, \quad \forall \alpha, \beta \in R^1,\, X_1, X_2 \in \mathcal{L}.$$

■

Примером линейного преобразования может служить преобразование вида

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(t,s) X(s) ds,$$

для которого класс допустимых входов $\mathcal{L}$ зависит от свойств функции $\bar{h}(t,s)$. Пусть входная функция равна $X(t) = \delta(t-\tau)$, тогда

$$Y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(t,s)\delta(s-\tau) ds = \begin{cases} \bar{h}(t,\tau), & \text{при}, \quad t \geq \tau, \\ 0, & \text{при}, \quad t < \tau. \end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 3.1.3 Функция $\bar{h}(t,s)-$ есть реакция линейной системы на $\delta-$ функцию на входе в момент времени s, и называется *импульсным откликом* линейной системы. ■

О п р е д е л е н и е 3.1.4 Линейная система называется *однородной* если

$$\bar{h}(t,s) = \bar{h}(t-s,0) = h(t-s).$$

Функция $h(t)$ называется *импульсным откликом линейной однородной системы.* ■

Рассмотрим линейное преобразование стационарного случайного процесса заданное интегральным соотношением

$$\zeta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\xi(s) ds. \tag{3.1.13}$$

Для того, чтобы правая часть соотношения (3.1.13) была корректно определена, необходимо, чтобы реализация случайного процесса $\xi(t,\omega)$ была измеримой функцией. Поскольку мы используем лишь информацию о втором моменте процесса $\xi(t)$ и не знаем всего семейства конечно-мерных распределений, то утверждать это для конкретного процесса мы не можем. Тем не менее существует важный результат, которым можно воспользоваться: *У непрерывного в среднеквадратическом смысле процесса всегда существует измеримая версия* [см. Определение 1.1.12]. Поскольку стационарный процесс с непрерывной в нуле ковариационной функцией непрерывен в с.к., то мы можем считать, что имеем дело именно с этой версией.

Предположим, что функция $h(\cdot)$ абсолютно интегрируема на всей временной оси, то есть

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(s)| ds < \infty, \tag{3.1.14}$$

и интегрируема с квадратом на любом ограниченном интервале. Тогда интеграл в соотношении (3.1.13) существует тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-s_1) R_\xi(s_1-s_2) \bar{h}(t-s_2) ds_1 ds_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(s_1) R_\xi(s_1-s_2) \bar{h}(s_2) ds_1 ds_2 < \infty.$$

О п р е д е л е н и е 3.1.5 Для линейного преобразования, осуществляемого однородной системой с интегрируемым импульсным откликом определена *частотная характеристика*

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} h(t) dt. \tag{3.1.15}$$

■

Частотная характеристика задает связь между преобразованием Фурье входного и выходного сигналов, соответственно

$$\tilde{X}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}X(t)dt, \qquad \tilde{Y}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}Y(t)dt,$$

соотношением

$$\tilde{Y}(\lambda) = \varphi(\lambda)\tilde{X}(\lambda)$$

или

$$Y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-s)X(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\tilde{X}(\lambda)d\lambda.$$

Для стационарных случайных процессов можно задать аналогичное представление. Пусть $F_\xi(\lambda)$ - спектральное распределение ССП $\xi(t)$, и функция $\varphi(\lambda) \in L^2\{R, \mathcal{B}(R), F_\xi\}$, то есть

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 F_\xi(d\lambda) < \infty. \tag{3.1.16}$$

Определим процесс $\zeta(t)$ соотношением

$$\zeta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\xi(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\varphi(\lambda)Z(d\lambda), \tag{3.1.17}$$

О п р е д е л е н и е 3.1.6 Если некоторый случайный процесс $\zeta(t)$, $t \in R$ допускает представление (3.1.17) с некоторой функцией $\varphi(\lambda)$, удовлетворяющей (3.1.16), то говорят, что случайный процесс ζ получен из ξ с помощью линейного преобразования. Функция φ в (3.1.17) называется *частотной характеристикой* этого преобразования. ■

Для того, чтобы процесс $\zeta(t)$ был корректно определен Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет (3.1.16) то процесс ζ также является стационарным, причем соотношение (3.1.17) задает его спектральное представление. Из свойств стохастического интеграла следует, что ковариационная функция процесса $\zeta(t)$ равна

$$\mathbf{cov}\{\zeta(t), \zeta(0)\} = \mathbf{M}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\varphi(\lambda)Z(d\lambda)\right]\overline{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\varphi(\lambda)Z(d\lambda)\right]} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}|\varphi(\lambda)|^2F(d\lambda). \tag{3.1.18}$$

Рассмотрим примеры некоторых линейных преобразований.

П р и м е р 3.1.8 [Преобразование сдвига]. Пусть процесс

$$\zeta(t) = \xi(t+T), \quad \text{где} \quad T \in R.$$

Найти частотную характеристику этого преобразования.

Р е ш е н и е В силу спектрального представления (3.1.12)

$$\zeta(t) = \xi(t+T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+T)\lambda}Z(d\lambda),$$

поэтому частотная характеристика этого преобразования равна

$$\varphi(\lambda) = e^{iT\lambda}. \tag{3.1.19}$$

■

П р и м е р 3.1.9 [Фильтр низких частот]. Рассмотрим линейное преобразование с частотной характеристикой

$$\varphi(\lambda) = 1, \quad \text{при} \quad 0 < a < |\lambda| \le b.$$

Найти импульсный отклик этого линейного преобразования.

Р е ш е н и е С помощью преобразования Фурье получаем

$$h(t) = \int_a^b e^{i\lambda t} dx + \int_{-b}^{-a} e^{i\lambda t} dx = \frac{\sin bt - \sin at}{t}.$$

Этот фильтр является допустимым для любого стационарного процесса входе, поскольку для любого спектрального распределения $F_Y(d\lambda)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 dF_Y(\lambda) = F_Y(b) - F_Y(a) + [F_Y(-a-0) - F_Y(b-0)] \le F_Y(\infty) - F_Y(-\infty) = D_Y < \infty.$$

При $a = 0$ имеем

$$h(t) = \frac{\sin bt}{t}.$$

■

П р и м е р 3.1.10 [Фильтр высоких частот]. Частотная характеристика этого фильтра равна

$$\varphi(\lambda) = 1, \quad \text{при} \quad 0 < b < |\lambda| < \infty.$$

Существует ли функция импульсного отклика для данного фильтра?

Р е ш е н и е Интеграл

$$\int_{-\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda - \text{ расходится,}$$

поэтому для данного фильтра не существует функции импульсного отклика.

З а м е ч а н и е Однако, если использовать понятие обобщенной функции, то такую функцию импульсного отклика можно определить. Для тождественного преобразования функция импульсного отклика равна $h(t) = \delta(t)$. Фильтр высоких частот соответствует преобразованию, которое можно представить как результат выполнения тождественного преобразования минус результат преобразования фильтром низких частот (см. Пример 3.1.9), что дает

$$h(t) = \delta(t) - \frac{\sin bt}{t}.$$

■

П р и м е р 3.1.11 [Дифференцирование случайного процесса]. Пусть процесс $\xi(t)$ дифференцируем в среднеквадратическом смысле. Найти частотную характеристику преобразования $\xi(t) \to \frac{d}{dt}\xi(t)$ и ковариационную функцию процесса $\xi^{'}(t)$.

Р е ш е н и е Из общих условий дифференцируемости в среднеквадратическом смысле следует (см. Раздел ??), что процесс дифференцируем в с.к. тогда и только тогда, когда $\left.\frac{\partial^2 R_\xi(t,s)}{\partial t \partial s}\right|_{t=s}$ существует для любого $t \in R$. Для стационарного процесса это условие эквивалентно существованию $R_\xi^{''}(0)$, что в свою очередь эквивалентно условию

$$R_\xi^{''}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 F(d\lambda) < \infty. \tag{3.1.20}$$

Из условия существования интеграла следует, что

$$\frac{e^{i\lambda h}-1}{h}\to i\lambda \tag{3.1.21}$$

в $L_2\{R,\mathcal{B}(R),F\}$. Воспользовавшись (3.1.19) получаем

$$\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda h}-1}{h}e^{it\lambda}Z(d\lambda).$$

Пределы слева и справа существуют в силу предположения о дифференцируемости, поэтому переходя к пределу в с.к., получаем спектральное представление оператора дифференцирования

$$\xi^{'}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}i\lambda e^{it\lambda}Z(d\lambda). \tag{3.1.22}$$

Таким образом процесс $\xi^{'}(t)$ получен из процесса $\xi(t)$ с помощью линейного преобразования, имеющего частотную характеристику $\varphi(\lambda)=i\lambda$. В силу условия (3.1.20) случайный процесс $\xi^{'}(t)$ является стационарным в широком смысле, имеет $\mathbf{M}\{\xi^{'}(t)\}=0$ и ковариационную функцию

$$R_{\xi^{''}}(t)=\mathbf{cov}\{\xi^{'}(t),\xi^{'}(0)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^2e^{it\lambda}F(d\lambda).$$

■

П р и м е р 3.1.12 [Линейные стохастические дифференциальные уравнения]. Предположим, что стационарный процесс $Y(t)$ n-раз с.к. дифференцируем и мы хотим найти m-раз с.к. дифференцируемый процесс $X(t)$, связанный с Y *линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами* вида

$$dif'ur\sum_{j=0}^{m}b_jX^{(j)}(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kY^{(k)}(t), \tag{3.1.23}$$

где a_k,b_j - заданные константы. Определить условия, при которых $X(t)-$ стационарный случайный процесс. Определить частотную характеристику преобразования $Y(t)\to X(t)$.

Р е ш е н и е Попытаемся найти представление для $X(t)$ в виде линейного преобразования процесса $Y(t)$ с некоторой частотной характеристикой $\varphi(\lambda)$, а именно,

$$X(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)Z_Y(d\lambda).$$

Используя спектральное представление для оператора дифференцирования (3.1.22) получаем,

$$X^{(k)}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}(i\lambda)^k\varphi(\lambda)Z_Y(d\lambda),\qquad Y^{(k)}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}(i\lambda)^kZ_Y(d\lambda),$$

откуда

$$\sum_{j=0}^{m}b_jX^{(j)}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}B(i\lambda)\varphi(\lambda)Z_Y(d\lambda),\qquad \sum_{k=0}^{n}a_kY^{(k)}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}A(i\lambda)Z_Y(d\lambda),$$

где

$$A(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k,\quad B(z)=\sum_{j=0}^{n}b_jz^j.$$

Тогда предположив, что полином $B(z)$ не имеет чисто мнимых корней и $\dfrac{A(i\lambda)}{B(i\lambda)} \in L_2\{R, \mathcal{B}(R), F_Y\}$, можно получить следующее представление для частотной характеристики

$$\varphi(\lambda) = \frac{A(i\lambda)}{B(i\lambda)},$$

и соответственно, спектральное представление для процесса $X(t)$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\varphi(\lambda) Z_Y(\lambda).$$

Условие стационарности процесса $X(t)$ - есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{A(i\lambda)}{B(i\lambda)}\right|^2 F_Y(d\lambda) < \infty.$$

Если процесс $Y(t)$ имеет спектральную плотность $f_Y(\lambda)$, то процесс $X(t)$ также имеет спектральную плотность

$$f_X(\lambda) = \left|\frac{A(i\lambda)}{B(i\lambda)}\right|^2 f_Y(\lambda).$$

■

Итак для получения характеристик случайных процессов, описываемых линейными стохастическими дифференциальными уравнениями используется следующий алгоритм. Пусть заданы: наборы чисел $\{a_0, ..., a_n\}$, и $\{b_0, ..., b_m\}$, определяющие вид дифференциального уравнения (??), характеристики стационарного процесса $Y(t)$, имеющего спектральную плотность, на входе системы

$$m_Y = \mathbf{M}\{Y(t)\}, \quad R_Y(t) = \mathbf{cov}\{Y(0), Y(t)\}$$

или

$$f_Y(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Если требуется найти характеристики случайного процесса $X(t)$ на выходе системы, то последовательно определяем:

1. математическое ожидание
$$\mathbf{M}\{X(t)\} = m_X = \frac{a_0}{b_0} m_y;$$

2. квадрат модуля частотной характеристики
$$|\varphi(\lambda)|^2 = \left|\frac{A(i\lambda)}{B(i\lambda)}\right|^2;$$

3. спектральную плотность $f_X(\lambda)$ процесса $X(t)$
$$f_X(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 f_Y(\lambda) = \left|\frac{A(i\lambda)}{B(i\lambda)}\right|^2 f_Y(\lambda);$$

4. ковариационную функцию $R_X(t)$ процесса $X(t)$
$$R_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(\lambda) d\lambda.$$

П р и м е р 3.1.13 Пусть линейная система описывается уравнением

$$a_1 X^{'}(t) + a_0 X(t) = Y(t),$$

где $Y(t)$ - стационарный процесс, имеющий $m_Y = 0$ и спектральную плотность

$$f_Y(\lambda) = \frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}.$$

Найти характеристики процесса $X(t)$.

Р е ш е н и е Среднее значение процесса $m_X = 0$. Частотная характеристика и квадрат ее модуля равны

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{a_0 + i\lambda a_1}, \quad |\varphi(\lambda)|^2 = \left|\frac{1}{a_0^2 + (\lambda a_1)}\right|^2.$$

Спектральная плотность процесса $X(t)$ есть

$$f_X(\lambda) = \frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)(a_0^2 + (\lambda a_1)^2)}.$$

Ковариационная функция процесса $X(t)$ равна при $\alpha < \frac{a_0}{a_1}$

$$R_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_X(\lambda) d\lambda = G e^{-\alpha_0 |\tau|} \left[ch\,(\beta_0 t) + \frac{\alpha_0}{\beta_0}\, sh\,(\beta_0 |t|) \right],$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\left[\alpha + \frac{a_0}{a_1}\right], \quad \beta_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{a_0}{a_1} - \alpha\right], \quad G = \frac{D}{a_0(\alpha a_1 + a_0)}.$$

■

О п р е д е л е н и е 3.1.7 Если $h(t) = 0$ при $t < 0$ линейное преобразование называется *физически реализуемым* поскольку в этом случае выходной сигнал $\zeta(t)$ зависит лишь от прошлых значений входного сигнала $\xi(s)$ при $s \le t$. ■

П р и м е р 3.1.14 Пусть импульсный отклик линейного преобразования равен

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} e^{-t/T}, & \text{при} \quad t \ge 0, \\ 0, & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Входной сигнал имеет спектральную плотность

$$f_Y(\lambda) = \frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}.$$

Найти спектральную плотность и дисперсию выходного сигнала

$$X(t) = \int\limits_0^{\infty} h(s) Y(t-s) ds = \int\limits_{-\infty}^{t} h(t-s) Y(s) ds.$$

Р е ш е н и е По формуле 3.1.15

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{T} e^{-t(1/T + i\lambda)} dt = \frac{1}{1 + i\lambda T}.$$

Спектральная плотность процесса $X(t)$ равна

$$f_X(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 f_Y(\lambda) = \frac{1}{1+(\lambda T)^2}\frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)}.$$

Применяя результат примера 3.1.13 при $a_0 = 1, a_1 = T$ получаем

$$D_X = R_X(0) = \frac{D}{1+\alpha T}.$$

■

П р и м е р 3.1.15 В примере 3.1.12 определить, когда линейное преобразование, задаваемое этим уравнением, представимо в виде физически реализуемого фильтра.

Р е ш е н и е Частотная характеристика линейного преобразования, соответствующего линейному уравнению, равна

$$\varphi(\lambda) = \frac{A(i\lambda)}{B(i\lambda)},$$

отношению двух полиномов степени m и n, соответственно, причем полином $B(z)$ не имеет корней на мнимой оси. Разделив один полином на другой, получим следующее представление для частотной характеристики

$$\frac{A(i\lambda)}{B(i\lambda)} = P(i\lambda) + \sum_{k=1}^{n^{'}}\sum_{s=1}^{t_k^{'}} \frac{c_{k_s}^{'}}{(i\lambda - p_k^{'})^s} + \sum_{k=1}^{n^{''}}\sum_{s=1}^{t_k^{''}} \frac{c_{k_s}^{''}}{(i\lambda - p_k^{''})^s},$$

где

$$P(i\lambda) = \sum_{k=0}^{m-n} d_k (i\lambda)^k, \quad \text{если} \quad m \geq n, \quad \text{и} \quad P(ix) = 0, \quad \text{при} \quad m < n.$$

Комплексные числа $p_k^{'}$ - это корни полинома $B(z)$, лежащие в левой полуплоскости, то есть $Re\, p_k^{'} < 0$, а комплексные числа $p_k^{'}$ - это корни полинома $B(z)$, лежащие в правой полуплоскости, то есть $Re\, p_k^{''} > 0$. Воспользуемся соотношениями

$$\frac{1}{(ix-p)^s} = \frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\int_0^\infty e^{pt}e^{-i\lambda t}dt = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{pt}e^{-i\lambda t}dt, \quad \text{при} \quad Re\, p > 0,$$
$$\frac{1}{(i\lambda-p)^s} = -\int_{-\infty}^0 \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{pt}e^{-i\lambda t}dt, \quad \text{при} \quad Re\, p < 0 \tag{3.1.24}$$

и получим представление для процесса $X(t)$ во временной области

$$X(t) = \sum_{k=0}^{n-m} d_k Y^{(k)}(t) + \int_0^\infty Y(t-s)G_1(s)ds + \int_0^\infty Y(t+s)G_1(-s)ds, \tag{3.1.25}$$

где

$$G_1 = \sum_{k=1}^{n^{'}}\left(\sum_{s=1}^{t_k^{'}} \frac{c_{k_s}^{'}t^s}{(s-1}!\right)e^{p_k^{'}t}, \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$G_2 = -\sum_{k=1}^{n^{''}}\left(\sum_{s=1}^{t_k^{''}} \frac{c_{k_s}^{''}t^s}{(s-1}!\right)e^{p_k^{''}t}, \quad \text{при} \quad t < 0.$$

З а м е ч а н и е Соотношение (3.1.25) показывает, что решение стохастического дифференциального уравнения представимо в виде суммы двух процессов, первый - соответствующий частотной характеристике $G_1(t)$ - есть результат прохождения входного сигнала через физически реализуемый фильтр, второй сигнал соответствует фильтру, выход которого зависит от будущих значений входного сигнала, и который, следовательно не является физически реализуемым. Этой декомпозиции выходного сигнала соответствует и разложение корней полинома на группы корней, лежащих в левой полуплоскости, и лежащих в правой полуплоскости. Из (3.1.25) следует, что решение дифференциального уравнения представимо физически реализуемым фильтром, если корни полинома $B(z)$ лежат в левой полуплоскости. Это свойство согласуется и с хорошо известным критерием устойчивости линейной динамической системы. Действительно, наличие у полинома $B(z)$ корней в правой полуплоскости означает, что линейная система с частотной характеристикой $A(z)/B(z)$ неустойчива, то есть свойство физической реализуемости и свойство устойчивости определяются одним и тем же алгебраическим свойством корней полинома $B(z)$

■

В разделе, посвященном стационарным последовательностям было показано, что последовательность, имеющая невырожденную спектральную плотность, может быть представлена, как результат прохождения дискретного белого шума через некоторый линейный фильтр (см. Теорему 2.1.5). В непрерывном времени процесс с равномерной частотной плотностью на всем временном интервале (непрерывный "белый шум") определить нельзя, так как его ковариационная функция должна быть равна $\delta(t)$. Ниже в разделах, посвященных процессам с ортогональными приращениями и стохастическому исчислению, мы покажем, как можно с помощью стохастического интеграла определить процесс, который ведет себя как результат прохождения "белого шума" через линейный фильтр.

О п р е д е л е н и е 3.1.8 Мы формально полагаем, *что процесс $\xi(t)$ - есть результат прохождения "белого шума" через физически реализуемый линейный фильтр с импульсным откликом* $h(t)$, если спектральная плотность процесса ξ допускает представление

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|\varphi(\lambda)|^2, \tag{3.1.26}$$

где

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_0^\infty h(t)e^{-i\lambda t}dt, \qquad \int\limits_0^\infty |h(t)|^2 dt < \infty.$$

■

Легко проверить (см. Пример 3.1.3), что такая спектральная плотность была бы у процесса, который получен при прохождении стационарного процесса с равномерной спектральной плотностью через фильтр с частотной характеристикой $\varphi(\lambda)$.

Условие возможности представления некоторого стационарного процесса как результат прохождения белого шума через физически реализуемый фильтр определяется следующей теоремой.

Т е о р е м а 3.1.5 *Для того, чтобы неотрицательная функция $f(\lambda)$ допускала представление (3.1.26) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda > -\infty. \tag{3.1.27}$$

В этом случае функция $\varphi(\lambda)$ определяется соотношением

$$\varphi(\lambda) = exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(u)}{1+u^2} \frac{i+u\lambda}{u+i\lambda} du \right\}. \tag{3.1.28}$$

В заключение рассмотрим пример использования теории линейных преобразований в задачах обработки сигналов. Дело в том, что многие операции численной обработки сигналов могут быть сведены к линейным однородным преобразованиям. Если входной сигнал можно представить как сумму некоторого детерминированного процесса (полезного сигнала) и стационароного случайного процесса (шума), то результат обработки также есть сумма полезного выходного сигнала и шума, характеристики которого можно определить с помощью линейно теории. В качестве примера рассмотрим задачу численного дифференцирования.

П р и м е р 3.1.16 Пусть случайный процесс

$$Y(t) = f(t) + \xi(t),$$

где $f(t)$ - некоторая неслучайная дифференцируемая функция, а $\xi(t)$ - центрированный случайный процесс $m_\xi = 0, D_\xi = \sigma^2$ с равномерной на $[-\lambda_0, \lambda_0]$ спектральной плотностью

$$f_\xi(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2\lambda_0}, & \text{при} \quad |\lambda| \leq \lambda_0, \\ 0, & \text{при} \quad |\lambda| > \lambda_0. \end{cases}$$

Процесс $Y(t)$ подвергается численному дифференцированию

$$X(t) = \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h}.$$

Вычислить $m_X(t), D_X(t)$ при $h \to 0$.

Р е ш е н и е Процесс

$$X(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} + \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} = X_1(t) + X_2(t),$$

где первый сигнал является детерминированным, а второй случайным, причем

$$\mathbf{M}\{X_2(t)\} = \mathbf{M}\left\{\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}\right\} = \frac{\mathbf{M}\{\xi(t+h)\} - \mathbf{M}\{\xi(t)\}}{h} = 0.$$

Поэтому

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\{X(t)\} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \to f^{'}(t)$$

при $h \to 0$, а $D_X(t) = D_{X_2}(t)$.

Процесс $X_2(t)$ - есть результат линейного преобразования стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Воспользовавшись его спектральным представлением $\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Z_\xi(d\lambda)$ получаем

$$X_2(t) = \frac{\xi(t+h) - xi(t)}{h} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(t+h)} - e^{i\lambda t}}{h} Z_\xi(d\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda t} Z_\xi(d\lambda),$$

где частотная характеристика линейного преобразования $\varphi(\lambda)$ и ее модуль равны

$$\varphi(\lambda) = \frac{e^{i\lambda h} - 1}{h}, \quad |\varphi(\lambda)|^2 = \frac{2(1 - \cos(\lambda h))}{h^2}.$$

Спектральная плотность процесса $X_2(t)$ равна

$$f_{X_2}(\lambda) = \frac{2(1 - \cos(i\lambda h)}{h^2} f_\xi(\lambda),$$

а дисперсия
$$D_{X_2} = D_X = \int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{2(1-\cos{(i\lambda h)}}{h^2} f_\xi(\lambda) d\lambda =$$
$$\frac{2\sigma^2}{\lambda_0 h^2}\int\limits_0^{\lambda_0}(1-\cos{(\lambda h)})d\lambda = \frac{2\sigma^2}{h^2}\left(1-\frac{\sin{(\lambda_0 h)}}{\lambda_0 h}\right).$$
При $h \to 0$
$$\lim_{h\to 0} D_X = \lim_{h\to 0}\frac{2\sigma^2}{h^2}\left(1-\frac{\sin{(\lambda_0 h)}}{\lambda_0 h}\right) = \frac{\sigma^2\lambda_0^2}{3}.$$
■

З а м е ч а н и е   Таким образом при численном дифференцировании дисперсия шума выходного сигнала мало зависит от шага дифференцирования h, а определяется в основном шириной спектра шума во входном сигнале, более того, даже при очень малой дисперсии этого шума (σ^2 - мало) дисперсия выходного сигнала может быть большой при широкополосном шуме (λ_0 - велико).

3.1.4 Задачи для самостоятельного решения

3.1.1 Показать, что ковариационная функция стационарного процесса непрерывна на R, если она непрерывна при $t = 0$.

У к а з а н и е   Воспользоваться неравенством (3.1.3).

3.1.2 Пусть ковариационная функция стационарного процесса действительна. Показать, что спектральное распределение такого процесса симметрично, то есть выполнено соотношение (3.1.6). Показать, что из соотношения (3.1.6) следует равенство
$$F(A) = F(-A), \quad \text{где} \quad -A = \{\lambda : -\lambda \in A\}.$$

3.1.3 Пусть $\xi(t)$ - стационарный процесс и $\mathbf{M}\xi(t) = \alpha \neq 0$. Объяснить почему в этом случае не существует спектрального представления вида (3.1.12).

3.1.4 Вывести соотношение (3.1.11) для спектральной плотности телеграфного сигнала. Существует ли гауссовский стационарный процесс, имеюший такую же спектральную плотность?

У к а з а н и е   Воспользоваться результатами раздела 1.2.1 и Теоремой 3.1.1.

3.1.5 Для процесса ζ, введенного в Определении 3.1.6 показать стационарность и вывести соотношение (3.1.18) для ковариационной функции.

У к а з а н и е   Воспользоваться свойствами стохастического интеграла (см. Пример 2.1.10 и соотношения (5.6.6)).

3.1.6 Доказать Теорему ??.

3.1.7 Доказать, что из соотношения (3.1.20) вытекает соотношение (3.1.21).

3.1.8 Объяснить почему для линейной операции интегрирования, которую можно свести к решению линейного уравнения $X^{'}(t) = Y(t)$, вообще говоря, не существует спектрального представления с помощью физически реализуемого фильтра.

3.1.9 Пусть $\xi(t)$ - стационарный процесс. Пусть α некоторое действительное число. Показать, что процесс $\zeta(t) = e^{it\alpha}\xi(t)$ также является стационарным. Является ли стационарным процесс $\xi(t)\cos{\alpha t}$?

3.1.10 Пусть $\xi(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} \xi_k(t)$ - есть сумма стационарных в широком смысле процессов, допускающих спектральное представление с мерами $Z_k(dx)$. Показать, что для процесса $\xi(t)$ также имеет место спектральное представление с некоторой мерой $Z(dx)$. Найти эту меру.

Пусть процессы $\xi_k(t)$ попарно некоррелированны, Показать, что спектральное распределение процесса $\xi(t)$ равно сумме спектральных распределений процессов $\xi_k(t)$. Привести пример, показывающий, что для коррелированных процессов это утверждение неверно.

3.1.11 Пусть $\xi(t)$ - стационарный процесс со спектральным представлением

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z_\xi(d\lambda).$$

Пусть

$$\zeta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itg(\lambda)} \varphi(\lambda) Z_\xi(d\lambda),$$

где $g(\lambda)$ некоторая действительная функция, а $\varphi(\lambda) \in L_2\{R, \mathcal{B}(R), F_\xi\}$. Показать, что процесс $\zeta(t)$ также является стационарным. Найти соотношение для ковариационной функции процесса $\zeta(t)$.

О т в е т

$$R_\zeta(t,s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)g(\lambda)} |\varphi(\lambda)|^2 F_\xi(d\lambda).$$

3.1.12. Показать, что функция, определенная соотношением

$$\mathrm{C}(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{t_0}, & \text{при} \quad |t| \le t_0, \\ \\ 0, & \text{при} \quad |t| > t_0, \end{cases}$$

является ковариационной функцией некоторого стационарного процесса. Найти ее спектральную плотность.

У к а з а н и е   Найти преобразование Фурье функции $C(t)$ и воспользоваться Теоремой 3.1.2.

О т в е т $f_\xi(\lambda) = \dfrac{1 - \cos \lambda t_0}{\pi \lambda^2 t_0}$.

3.1.13 Опрределить являются ли следующие функции ковариационными функциями некоторых случайных процессов, и если являются найти их спектральные плотности.

1) $C(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} \cos \beta t, \quad \alpha > 0,$
2) $C(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} (1 + \alpha|t|), \quad \alpha > 0,$
3) $C(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} \left(1 + \alpha|t| + \dfrac{(\alpha t)^2}{3}\right), \quad \alpha > 0,$
4) $C(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} (\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|t|), \quad \alpha > 0.$
5) $C(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} (\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|t|), \quad \alpha > 0.$
6) $C(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} (ch\, \beta t + \frac{\alpha}{\beta}\, sh\, \beta|t|)), \quad \alpha \ge \beta.$

У к а з а н и е   Найти преобразование Фурье функций $C(t)$. Поскольку преобразования Фурье для всех функций являются неотрицательными и интегрируемыми функциями, то по Теореме 3.1.1, они являются ковариационными функциями некоторых стационарных случайных процессов.

О т в е т 1) $f_\xi(\lambda)=\dfrac{\sigma^2\alpha}{2\pi}\left[\dfrac{1}{\alpha^2+(\beta+\lambda)^2}+\dfrac{1}{\alpha^2+(\beta-\lambda)^2}\right].$

2) $f_\xi(\lambda)=\dfrac{\sigma^2\alpha}{\pi}\dfrac{2\alpha^4}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}.$

3) $f_\xi(\lambda)=\dfrac{\sigma^2\alpha}{\pi}\dfrac{\alpha^4}{3(\alpha^2+\lambda^2)^3}.$

4) $f_\xi(\lambda)=\dfrac{\sigma^2\alpha}{\pi}\dfrac{2\lambda^2}{(\lambda^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\lambda^2}.$

5) $f_\xi(\lambda)=\dfrac{\sigma^2\alpha}{\pi}\dfrac{2(\alpha^2+\beta^2)}{(\lambda^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}.$

6) $f_\xi(\lambda)=\dfrac{\sigma^2\alpha}{\pi}\dfrac{2(\alpha^2-\beta^2)}{[(\alpha-\beta)^2+\lambda^2][(\alpha+\beta)^2+\lambda^2]}.$

3.1.15 Является ли дифференцируемым стационарный процесс со спектральной плотностью:

1) $f(\lambda)=\dfrac{\alpha}{\lambda^2+\beta},\quad \alpha,\beta>0,$

2) $f(\lambda)=\left|\dfrac{1}{\alpha^2+(\lambda-\beta)^2}-\dfrac{1}{\alpha^2+(\lambda+\beta)^2}\right|.$

У к а з а н и е Воспользоваться результатами Примера 3.1.11 и условием (3.1.20).

О т в е т 1) Нет.

2) Нет.

3.1.16 Пусть ковариационная функция стационарного процесса $\xi(t)$ бесконечное число раз дифференцируема при $t=0$. Показать, что тогда:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^{2n}dF(\lambda)<\infty,\quad \forall n>0,$

2) $\xi(t+\tau)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\tau^k}{k!}\xi^{(k)}(t).$

У к а з а н и е Использовать условие (3.1.20) и показать 1). Далее используя спектральное представление процесса $\xi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}Z(d\lambda)$, показать, что

$$\xi^{(k)}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(i\lambda)^k e^{it\lambda}Z(d\lambda).$$

Затем записать спектральное разложение для процесса $\xi(t+\tau)$ и воспользоватьмя разложением $e^{i\tau\lambda}$ в ряд Тейлора.

3.1.17 [Теорема отсчетов] Пусть стационарный процесс имеет ограниченный спектр, то есть допускает представление

$$\xi(t)=\int\limits_{-a}^{a}e^{it\lambda}F(d\lambda),$$

и спектральная мера не имеет атомов в точках $\lambda=-a,\lambda=a$, а именно $F(\{-a\})=F(\{a\})=0$. Показать, что для любого $t\in R$ справедливо представление

$$\xi(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\xi\left(\frac{\pi k}{a}\right)\frac{\sin(\pi k-at)}{\pi k-at}. \tag{3.1.29}$$

У к а з а н и е Воспользоваться тем, что функции $\{e^{i\frac{\pi k\lambda}{a}},\ k \in \mathcal{Z}\}$ образуют базис в $L_2([-a,a])$, и представить функцию $e^{it\lambda}$ на $[-a,a]$ ее разложением в ряд Фурье

$$e^{it\lambda} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi k - at)}{\pi k - at} e^{i\frac{\pi k\lambda}{a}}.$$

Далее воспользоваться спектральным представлением процесса $\xi(t)$, и подставив в него разложение функции $e^{it\lambda}$, и получить представление (3.1.29). В силу отсуствия атомов меры $F(d\lambda)$ в точках $\{-a\}$ и $\{a\}$ ряд Фурье функции $e^{it\lambda}$ сходится также в $L_2\{[-a,a], \mathcal{B}([-a,a]), F(d\lambda)\}$, откуда следует сходимость ряда в представлении (3.1.29) в среднеквадратическом смысле.

3.1.18 Рассмотреть пример процесса $X(t) = \cos(at + \theta)$, где случайная величина θ равномерно распределена на $[0, 2\pi]$. Показать, что в этом случае теорема отсчетов неверна. Объяснить, почему это происходит.

У к а з а н и е Построить формальный ряд (3.1.29) и показать, что он расходится при $t = -\frac{\pi}{2a}$.

Найти спектральное распределение процесса $X(t)$ и убедиться, что условие $F(\{-a\}) = F(\{a\}) = 0$ нарушается.

3.2 Элементы стохастического анализа

В теории динамических систем важную роль играет возможность вычисления производной некоторой функции, заданной на траекториях динамической системы. В аналитической механике это дает возможность вычисления и определения эволюции во времени таких важных характеристик как энергия, количество движения, момент количества движения. В теории управления детерминированными системами и теории дифференциальных уравнений вычисление производных некоторых положительно определенных функций (функций Ляпунова) позволяет судить об устойчивом или неустойчивом характере поведения системы. Эта возможность обусловлена достаточно регулярным поведением траекторий динамических систем (непрерывность, дифференцируемость и т.д.) Попытка применить аналогичные методы к системам со случайным поведением наталкивается прежде всего на невозможность применения классических методов дифференцирования и интегрирования в силу весьма нерегулярного характера поведения самих случайных процессов. Дифференцирование и интегрирование в среднеквадратическом смысле дает возможность оценить лишь первый и второй моменты соответствующих процессов, но ничего не говорит о распределении более высоких порядков. Поэтому появление теории стохастического анализа, то есть теории, позволяющей вычислять производные вдоль нерегулярных траекторий стохастических процессов было весьма закономерным и обусловленым многочисленными прикладными задачами. Возникновение стохастического анализа обязано своим появлением с одной стороны А. Эйнштейну и М. Смолуховскому, которые построили качественную теорию Броуновского движения, а с другой стороны Н. Винеру и К. Ито, заложившим основы строгой математической теории. Выше мы рассматривали различные примеры, связанные с процессом Броуновского движения (см. Примеры 1.2.4, ??, ??, Задачи 1.2.5 - 1.2.8, 1.2.22, 1.2.23), которые демонстрируют различные свойства этого случайного процесса. Однако важность процесса Броуновского движения обусловлена прежде всего тем, что он является базовым для множества других непрерывных случайных процессов диффузионного типа, которые строятся на его основе с помощью стохастического интегрирования.

3.2.1 Процесс Броуновского движения и его свойства

О п р е д е л е н и е 3.2.1 *Случайный процесс* $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ *, заданый на вероятностном пространство* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ *, называется* процессом Броуновского движения *если он обладает следующими свойствами:*

1. $\xi(0) = 0$, *(*$\mathbf{P}$*- п.н.);*
2. $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ *процесс со стационарными независимыми приращениями;*

3. приращения $\xi(t)-\xi(s)$ имеют гауссовское нормальное распределение с параметрами

$$\mathbf{M}[\xi(t)-\xi(s)]=0, \qquad \mathbf{M}[\xi(t)-\xi(s)]^2=\sigma^2|t-s|;$$

4. функции $\xi(t,\omega)$ непрерывны ($\mathbf{P}$- п.н.).

Процесс $\{\xi(t),\, t\geq 0\}$ *с* $\sigma=1$ *называется* стандартным Броуновским движением *или* Винеровским процессом. ■

Такой процесс можно конструктивно построить на "достаточно богатом" вероятностном пространстве. Пусть на $\{\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P}\}$ существует последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин $\eta_1,\eta_2,...$ с распределением $\mathcal{N}(0,1)$. На интервале $[0,T]$ возьмем произвольную полную в $L_2[0,T]$ ортонормированную систему функций $\varphi_1(t),\varphi_2,....$ Положим

$$\Phi(t)=\int\limits_0^t \varphi_i(s)ds.$$

Т е о р е м а 3.2.1 *Для любого* $t\in[0,T]$, *ряд*

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\Phi_i(t) \tag{3.2.1}$$

сходится ($\mathbf{P}$- п.н.) и определяет стандартный процесс Броуновского движения на $[0,T]$.

Доказательство. Выясним прежде всего смысл функций $\Phi_i(t)$. Рассмотрим функцию

$$I_t(s)=\begin{cases}1, & \text{если}, \quad s\in[0,t],\\ \\ 0, & \text{при остальных}, \quad s.\end{cases}$$

Функция $I_t(s)$ является *индикаторной функцией* интервала $[0,t]$, и принадлежит пространству $L_2[0,T]$. Вследствие этого для нее существует разложение в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций $\varphi_1(t),\varphi_2,....,$

$$I_t(s)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varphi_i(s),$$

которой сходится в среднеквадратическом смысле. Коэффициенты этого разложения равны

$$c_i=\int\limits_0^T I_t(s)\varphi_i(s)ds=\Phi_i(t),$$

поэтому в силу равенства Парсеваля имеем соотношения

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi_i^2(t)=\int\limits_0^T I_t^2(s)ds=t;\\ \int\limits_0^T I_{t_1}(s)I_{t_2}(s)ds=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi_i(t_1)\Phi_i(t_2)=\min\{t_1,t_2\};\\ \text{для любых}\quad 0\leq t_1\leq t_2\leq t_3\leq t_4\leq T\\ \int\limits_0^T[I_{t_4}(s)-I_{t_3}(s)][I_{t_2}(s)-I_{t_1}(s)]=\\ \sum_{i=1}^{\infty}[\Phi_i(t_4)-\Phi_i(t_3)][\Phi_i(t_2)-\Phi_i(t_1)]=0.\end{gathered} \tag{3.2.2}$$

Рассмотрим теперь ряд
$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \Phi_i(t).$$
Для каждого $t \in [0, T]$ последовательность
$$\xi^n(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \Phi_i(t)$$
образует квадратично-интегрируемый мартингал с квадратичной характеристикой
$$< \xi >_n (t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^2(t) \leq t.$$
По Теореме 2.2.14 отсюда следует сходимость последовательности $\xi^n(t)$ к $\xi(t)$ ($\mathbf{P}$- п.н.).

Проверим теперь свойства $\xi(t)$. Свойство 1) очевидно, поскольку $\Phi_i(0) = 0$, и следовательно, $\xi^n(0) = 0$. Далее, поскольку распределение случайных величин и совместные распределения случайных величин $\xi^n(s), s \in [0, T]$ - гауссовские, то распределения предельных случайных величин гауссовские. Поэтому, чтобы проверить свойство 2) достататочно проверить некоррелированность величин $\xi(t_4) - \xi(t_3), \xi(t_2) - \xi(t_1)$ для любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq T$. В силу представления (3.2.1) и соотношений (3.2.2) имеем
$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}[\xi(t_2) - \xi(t_1)] = 0, \\
&\mathbf{M}[\xi(t_2) - \xi(t_1)]^2 = \sum_{i=1}^{\infty} [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)]^2 = |t_2 - t_1|, \\
&\mathbf{M}[\xi(t_4) - \xi(t_3)][\xi(t_2) - \xi(t_1)] = \\
&\sum_{i=1}^{\infty} [\Phi(t_4) - \Phi(t_3)][\Phi(t_2) - \Phi(t_1)] = 0,
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$
откуда следуют свойства 2) и 3). Таким образом процесс $\xi(t)$ обладает всеми свойствами Броуновского движения, а его непрерывность непосредственно следует из критерия Колмогорова, так как с учетом гауссовсти
$$\mathbf{M}|\xi(t) - \xi(s)|^4 = 3|t - s|^2.$$

Далее, поскольку Броуновское движение - есть процесс с независимыми приращениями то он является марковским и поскольку среднее заначение приращений равно нулю, то и мартингалом (см. Раздел 1.2.4, и пример **??**).

Рассмотрим некоторые свойства траекторий Броуновского движения.

П р и м е р 3.2.1 *[Распределение времени первого достижения заданного уровня].*

Пусть $x > 0$ - некоторое заданное число. Определим случайную величину $\tau_x(\omega)$, как время первого достижения процессом $\xi(t)$ уровня x. Формально,
$$\tau_x(\omega) = \inf\{t > 0 : \xi(t, \omega) = x\}.$$
Кроме того, очевидно, что распределения τ_x и τ_{-x} одинаковы в силу симметрии. Далее можно заметить, что в силу непрерывности траекторий Броуновского движения
$$\{\tau_x < t\} = \{\max_{0 \leq s \leq t} \xi(s) \geq x\}.$$

Утверждение. *Для $x > 0$*
$$\mathbf{P}\{\max_{0 \leq s \leq t} \xi(s) \geq x\} = 2\mathbf{P}\{\xi(t) \geq x\}.$$

Приведем интуитивное доказательство этого соотношения, основанное на принципе симметрии. Заметим вначале, что

$$\mathbf{P}\{\max_{0\le s\le t}\xi(s)\ge x, \xi(t)\ge x\} = \mathbf{P}\{\max_{0\le s\le t}\xi(s)\ge x, \xi(t)\le x\}.$$

Действительно, если $\xi(s)=x$, то каждой траектории, начинающейся в точке $\xi(s)=x$ и заканчивающейся в некоторой точке $\xi(t)\ge x$, соответствует траектория, являющаяся зеркальным отражением относительно прямой x. Процесс $\xi(t)-\xi(s)$, рассматриваемый при $t\ge s$, снова является Броуновским движением, (Более точная формулировка следующая: Броуновское движение начинается заново в каждый Марковский момент времени, см. Задача 3.2.2. Другими словами: Броуновское движение обладает свойством строгой марковости.) то распределение процесса $\xi(t)-\xi(s)$ симметрично, и поскольку между элементарными событиями, составляющими события, под знаком вероятности можно установить взаимно-однозначное соответствие, то следовательно, их вероятности равны. Далее заметим, что сумма событий

$$\{\max_{0\le s\le t}\xi(s)\ge x, \xi(t)\ge x\}\cup\{\max_{0\le s\le t}\xi(s)\ge x, \xi(t)\le x\} = \{\max_{0\le s\le t}\xi(s)\ge x\},$$

поскольку для гауссовского процесса $\mathbf{P}\{\xi(t)=x\}=0$. Таким образом,

$$\mathbf{P}\{\max_{0\le s\le t}\xi(s)\ge x, \xi(t)\ge x\} = \frac{1}{2}\mathbf{P}\{\max_{0\le s\le t}\xi(s)\ge x\},$$

и в силу очевидного равенства

$$\{\max_{0\le s\le t}\xi(s)\ge x, \xi(t)\ge x\} = \{\xi(t)\ge x\}$$

получаем требуемое соотношение.

Из этого соотношения следует, что

$$\mathbf{P}\{\tau_x\le t\} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int\limits_{x/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-1/2z^2}dz, \tag{3.2.4}$$

то есть,

$$\mathbf{P}\{\tau_x<\infty\}=1,$$

однако,

$$\mathbf{M}\tau_x=\infty. \tag{3.2.5}$$

П р и м е р 3.2.2 *[Неограниченность траекторий Броуновского движения.]*

Покажем, что

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\ge 0}\xi(t)=+\infty\right\} = \mathbf{P}\left\{\inf_{t\ge 0}\xi(t)=-\infty\right\}=1.$$

Отсюда следует, что траектории Броуновского движения неограничены и для любого x на любом интервале $[M,\infty)$ существует t такое, что $\xi(t)=x$. Докажем лишь первое соотношение, так как в силу симметрии $-\xi(t)$ также Броуновское движение и

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{t\ge 0}\xi(t)=-\infty\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{t\ge 0}[-\xi(t)]=\infty\right\}.$$

Для заданного значения $a>0$ в силу (3.2.4)

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\ge 0}\xi(t)\ge a\right\} = \mathbf{P}\left\{\max_{t\ge 0}\xi(t)\ge a\right\} = 2[1-\Phi(a/\sqrt{t})], \tag{3.2.6}$$

где $\Phi(z)$ - функция Лапласа для нормального распределения вероятностей. При $t\to\infty$

$$2[1-\Phi(a/\sqrt{t})]\to 1,$$

поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq 0}\xi(t)\geq a\right\}=1.$$

Далее,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq 0}\xi(t)=\infty\right\}=\mathbf{P}\left[\bigcap_{k=1}\left\{\sup_{t\geq 0}\xi(t)\geq k\right\}\right]=1.$$

П р и м е р 3.2.3 *[Пересечения заданного уровня]*

Из соотношения (3.2.4) следует, что для любого $t\geq 0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leq s\leq t}\xi(s)>0\right\}=1,$$

и в силу симметрии

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{0\leq s\leq t]}\xi(s)<0\right\}=1.$$

Таким образом, на любом интервале $[0,t]$ *траектория Броуновского движения, начинающаяся в нуле, пересекается с осью* t *бесконечно много раз. Аналогичное утверждение справедливо и относительно любого наперед заданного уровня.*

Таким образом траектории Броуновского движения, хоть и являются непрерывными функциями, однако, весьма нерегулярны. Следующий пример показывает, что траектории Броуновского движения нигде не дифференцируемы и имеют бесконечную вариацию на любом, сколь угодно малом интервале времени.

П р и м е р 3.2.4 *[Недифференцируемость траекторий Броуновского движения.]*

Установим следующее соотношение: для любого $t\geq 0$ *и* $h>0$

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}=\infty\right\}=1. \tag{3.2.7}$$

Заметим, что для любого $0<h<\delta$,

$$\sup_{0<h<\delta}\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\geq\frac{1}{\delta}\sup_{0<h<\delta}[\xi(t+h)-\xi(t)].$$

Таким образом, используя соотношение (3.2.4) и свойство строгой марковости Броуновского движения получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0<h<\delta}\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}>a\right\}\geq\mathbf{P}\left\{\sup_{0<h<\delta}[\xi(t+h)-\xi(t)]>\delta a\right\}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0<h<\delta}\xi(h)>\delta a\right\}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int\limits_{a\sqrt{\delta}}^{\infty}e^{-1/2z^2}dz\to 1$$

при $\delta\to 0$, *откуда следует (3.2.7).*

В силу симметрии из (3.2.7) следует

$$\mathbf{P}\left\{\underline{\lim}_{h\to 0+}\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}=-\infty\right\}=1. \tag{3.2.8}$$

Соотношения (3.2.7) и (3.2.8) показывают недифференцируемость траектории в любой заданной точке $t\geq 0$.

Следствием недифференцируемости является и неограниченность вариации траекторий Броуновского движения. Действительно, если бы траектория имела ограниченную вариацию на некотором интерале, то в силу известных результатов теории функций она была бы и дифференцируема почти всюду на этом интервале. Следовательно, траектории Броуновского движения имеют неограниченную вариацию на любом, сколь угодно малом интервале времени.

П р и м е р 3.2.5 *[Квадратичная вариация траектории Броуновского движения]*

Пусть $0 = t_{n\,0} < t_{n\,1} < ... < t_{n\,n}$ *- некоторая последовательность разбиений отрезка* $[0, t]$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0,$$

где

$$\Delta_n = \max_{0\le i\le n-1} |t_{n,\,i+1} - t_{n\,i}| = 0.$$

Тогда,

$$\lim_n \sum_{i=0}^{n-1} (\xi(t_{n,\,i+1}) - \xi(t_{n\,i}))^2 = t,$$

в смысле сходимости в среднеквадратическом.

Если последоватеьность разбиений обладает свойством

$$\sum_{n\ge 1} \Delta_n < \infty,$$

то сходимость имеет место и с вероятностью 1.

Покажем вначале сходимость в среднеквадратическом смысле. Из определения Броуновского движения следует, что

$$\mathbf{M}(\xi(t_{n,\,i+1}) - \xi(t_{n\,i}))^2 = t_{n,\,i+1} - t_{n\,i},$$

поэтому

$$\mathbf{M}S_n = \mathbf{M}\sum_{i=0}^{n-1} (\xi(t_{n,\,i+1}) - \xi(t_{n\,i}))^2 = t.$$

Оценим

$$\mathbf{D}S_n = \mathbf{D}\left\{\sum_{i=0}^{n-1} (\xi(t_{n,\,i+1}) - \xi(t_{n\,i}))^2\right\} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{D}\left\{(\xi(t_{n,\,i+1}) - \xi(t_{n\,i}))^2\right\} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{\mathbf{M}(\xi(t_{n,\,i+1}) - \xi(t_{n\,i}))^4 - (t_{n,\,i+1} - t_{n\,i})^2\right\} =$$

$$2\sum_{i=0}^{n-1} (t_{n,\,i+1} - t_{n\,i})^2 \le 2\max_{0\le i\le n-1} |t_{n,\,i+1} - t_{n\,i}| \sum_{i=0}^{n-1} (t_{n,\,i+1} - t_{n\,i}) =$$

$$2t\max_{0\le i\le n-1} |t_{n,\,i+1} - t_{n\,i}| \to 0$$

при $n \to \infty$. *Таким образом сходимость в среднеквадратическом смысле установлена.*

Далее, используя неравенство Чебышева, получаем

$$\mathbf{P}\{|S_n| > \varepsilon\} \le \frac{\mathbf{M}S_n^2}{\varepsilon^2} \le 2t\frac{\Delta_n}{\varepsilon^2}.$$

В силу предположения о сходимости ряда из Δ_n *получаем, что для любого* $\varepsilon > 0$

$$\sum_n \mathbf{P}\{|S_n| > \varepsilon\} < \infty.$$

По лемме Бореля-Кантелли это означает, что событие $\{|S_n| > \varepsilon\}$ *происходит лишь конечное число раз* ($\mathbf{P}$- *п.н.). Следовательно,* $S_n \to 0$ ($\mathbf{P}$- *п.н.).*

Примером последовательности разбиений, для которой имеет место сходимость ($\mathbf{P}$- *п.н.), является последовательность двоично-рациональных разбиений отрезка* $[0, t]$.

3.2.2 Стохастический интеграл по винеровскому процессу

В разделе 2.1.4 было введено понятие стохастического интеграла по некоторой сохастической мере, или процессу с ортогональными приращениями. Этот интеграл был определен для детерминированных функций, принадлежащих пространству L_2. Этого определения вполне достаточно для рассмотрения линейных стохастических дифференциальных уравнений, поскольку Винеровский процесс является процессом с ортогональными приращениями. Однако в нелинейном случае необходимо определение интеграла от случайных функций. Понятие стохастического интеграла дял случайных функций было введено К. Ито, имя которого и носит соответствующий интеграл.

Определим класс случайных функций, для которых определен интеграл Ито. Предположим, что на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задано неубывающее семейство σ - алгебр $\mathcal{F}_t$. Случайный процесс $w = (w(t), \mathcal{F}_t)$ называется Винеровским процессом, если $w(t)$ непрерывен ($\mathbf{P}$- п.н.), и является квадратично-интегрируемым мартингалом с

$$\mathbf{M}\{(w(t) - w(s))^2 | \mathcal{F}_s\} = \sigma^2 |t - s|, \quad t \geq s.$$

Ясно, что процесс Броуновского движения является винеровским процессом относительно собственного потока σ - алгебр $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$. Однако, важная теорема Леви утверждает, *что всякий Винеровский процесс есть процесс Броуновского движения.*

Т е о р е м а 3.2.2 *[Леви] Предположим, что на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задано неубывающее семейство σ - алгебр $\mathcal{F}_t$. Пусть случайный процесс $w = (w(t), \mathcal{F}_t)$, $w(t) \in R^n$ непрерывен ($\mathbf{P}$- п.н.), и является квадратично-интегрируемым мартингалом с*

$$\mathbf{M}\{(w(t) - w(s))(w(t) - w(s))^* | \mathcal{F}_s\} = I_n |t - s|, \quad t \geq s,$$

где I_n - единичная матрица размера $n \times n$.

Тогда w - есть процесс n - мерного Броуновского движения относительно $\mathcal{F}_t$.

Это довольно сложный результат и мы приводим его без даказательства. Следует, однако отметить, что наиболее важным здесь является условие непрерывности. Например, процесс вида

$$\xi(t) = N(t) - \lambda t,$$

где $N(t)$ - есть число событий, происходящих на интервале $[0, t]$, для пуассоновского потока событий с интенсивностью λ, также является квадратично-интегрируемым мартингалом и

$$\mathbf{M}\{(\xi(t) - \xi(s))^2 | \mathcal{F}_s\} = \lambda |t - s|, \quad t \geq s,$$

однако, поведение процесса $\xi(t)$ совершенно непохоже на поведение процесса Броуновского движения, поскольку траектории процесса $\xi(t)$ разрывны ($\mathbf{P}$- п.н.).

З а м е ч а н и е В силу теоремы Леви можно не различать Винеровский процесс и процесс Броуновского движения.

О п р е д е л е н и е 3.2.2 *Случайный процесс $f(t, \omega)$ называется* неупреждающим, *если для любого для любого $t \geq 0$, случайная величина $f(t, \omega)$ - $\mathcal{F}_t$ мзмерима.* ■

О п р е д е л е н и е 3.2.3 *Неупреждающий случайный процесс $f(t, \omega)$ называется* процессом класса *$\mathcal{P}_T$, если*

$$\mathbf{P}\left\{ \int_0^T f^2(t, \omega) dt < \infty \right\} = 1.$$

■

О п р е д е л е н и е 3.2.4 *Неупреждающий случайный процесс $f(t, \omega)$ называется* процессом класса *$\mathcal{M}_T$, если*

$$\mathbf{M} \int_0^T f^2(t, \omega) dt < \infty.$$

■

Стохастический интеграл определяется по аналогии с интегралом Лебега вначале на некотором классе *элементарных или простых функций* и затем продолжается по непрерывности на классы $\mathcal{M}_T$ и $\mathcal{P}_T$.

О п р е д е л е н и е 3.2.5 *Функция* $e(t,\omega) \in \mathcal{M}_T$ *называется* простой *если существует разбиение* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ *отрезка* $[0,T]$, *и совокупность случайных величин* $\alpha, \alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ *такие, что* α - $\mathcal{F}_0$ - *измерима, а* α_i - $\mathcal{F}_{t_i}$ - *измеримы и*

$$e(t,\omega) = \alpha I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i I_{(t_i,t_{i+1}]}(t),$$

где I_A - *есть характеристическая функция некоторого подмножества* $A \subseteq [0,T]$. ■

О п р е д е л е н и е 3.2.6 *Для простых функций* $e(s,\omega)$, $s \in [0,T]$ *стохастический интеграл* $J_t(e)$ *на отрезке* $[0,t]$ *определяется следующим образом*

$$J_t(e) = \alpha w(0) + \sum_{\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \le i \le m \\ t_{m+1} < t \end{smallmatrix} \right\}} \alpha_i [w(t_{i+1}) - w(t_i)] + \alpha_{m+1}[w(t) - w(t_{m+1})],$$

и с учетом соотношения $\mathbf{P}\{w(0) = 0\} = 1$

$$J_t(e) = \sum_{\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \le i \le m \\ t_{m+1} < t \end{smallmatrix} \right\}} \alpha_i [w(t_{i+1}) - w(t_i)] + \alpha_{m+1}[w(t) - w(t_{m+1})].$$

■

Стохастический интеграл от функции $e(t,\omega)$ по винеровскому процессу обозначается

$$J_t(e) = \int_0^t e(s,\omega) dw(s),$$

интеграл по проивольному отрезку $[a,b]$ понимается как интеграл от функции $e(t,\omega)I_{[a,b]}(t)$ и обозначается $\int_a^b e(s,\omega)dw(s)$.

Следующие свойства стохастического интеграла немедленно следуют из определения:

1. Для $a, b = const$
$$J_t(ae_1 + be_2) = aJ_t(e_1) + bJ_t(e_2);$$
2. $\displaystyle\int_0^t e(s,\omega)dw(s) = \int_0^u e(s,\omega)dw(s) + \int_u^t e(s,\omega)dw(s), \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.});$
3. $J_t(e)$ является непрерывной функцией t;
4. $\displaystyle\mathbf{M}\left\{ \int_0^t e(u,\omega)dw(u) \middle| \mathcal{F}_s \right\} = \int_0^s e(u,\omega)dw(u), \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.});$
5. $\displaystyle\mathbf{M}\left(\int_0^t e_1(u,\omega)dw(u) \right) \left(\int_0^t e_2(u,\omega)dw(u) \right) = \mathbf{M} \int_0^t e_1(u,\omega)e_2(u,\omega)du;$
6. Случайная величина $J_t(e)$ - $\mathcal{F}_t$ измерима.

Возможность определения стохастического интеграла для функций $f \in \mathcal{M}_T$ основана на следующей апроксимационной лемме:

Л е м м а 3.2.1 *Для произвольной функции $f \in \mathcal{M}_T$ существует последовательность простых функций $f_n \in \mathcal{M}_T$ такая, что*

$$\mathbf{M}\int_0^T [f(t,\omega) - f_n(t,\omega)]^2 dt \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.2.9}$$

При построении интеграла от произвольной функции $f \in \mathcal{M}_T$ мы выбираем соответствующую последовательность f_n и строим последовательность случайных величин

$$J_t(f_n) = \int_0^t f_n(s,\omega)dw(s). \tag{3.2.10}$$

По свойству 5) стохастического интеграла, при $n, m \to \infty$

$$\mathbf{M}\left[J_t(f_n) - J_t(f_m)\right]^2 = \mathbf{M}\int_0^t [f_n(s,\omega) - f_m(s,\omega)]^2 ds \to \infty.$$

Таким образом последовательность $\{J_t(f_n)\}$ фундаментальна в среднеквадратическом смысле, и следовательно, сходится в среднеквадратическом смысле к некоторой случайной величине, которая и называется стохастическим интегралом функции f и обозначается

$$J_t(f) = \int_0^t f(s,\omega)dw(s).$$

Этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности и обладает всеми свойствами интеграла от простых функций. Для доказательства достаточно перейти к пределу в среднеквадратическом смысле в соотношениях для интегралов от простых функций.

Для построения стохастического интеграла от функций $f \in \mathcal{P}_T$ требуется следующая аппроксимационная

Л е м м а 3.2.2 *Для произвольной функции $f \in \mathcal{P}_T$ существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{M}_T$ такая, что по вероятности*

$$\int_0^T [f(t,\omega) - f_n(t,\omega)]^2 dt \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.2.11}$$

*Существует также последовательность простых функций, для которой (3.2.11) имеет место (**P**-п.н.).*

Кроме того необходимо следующее неравенство для стохастических интегралов

Л е м м а 3.2.3 *Пусть $f \in \mathcal{M}_T$, $N > 0$, $C > 0$, тогда*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{[0,T]}\left|\int_0^t f(s,\omega)dw(s)\right| > C\right\} \le \frac{N}{C^2} + \mathbf{P}\left\{\int_0^T f^2(s,\omega)ds > N\right\}. \tag{3.2.12}$$

Для построения интеграла берем соответствующую последовательность простых функций, $f_n \in \mathcal{M}_T$, аппроксимирующую $f \in \mathcal{P}_T$ по вероятности, тогда в соответствии с неравенством (3.2.12) для $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}}\, \mathbf{P}\left\{\left|\int_0^T [f_n(s,\omega) - f_m(s,\omega)]dw(s)\right| > \delta\right\} \le$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} + \lim_{n,m\to\infty} \mathbf{P}\left\{\int_0^T [f_n(s,\omega) - f_m(s,\omega)]^2 ds > \varepsilon\right\} = \frac{\varepsilon}{\delta^2}.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\int_0^T f_n(s,\omega)dw(s) - \int_0^T f_m(s,\omega)dw(s)\right| > \delta\right\} = 0.$$

Таким образом, последовательность интегралов от элементарных функций сходится по вероятности к некоторой случайной величине, которая и называется *стохастическим интегралом* от функции $f \in \mathcal{P}_T$. Независимость определенного таким образом интеграла от выбора аппроксимирующей последовательности и его свойства проверяются аналогично тому, как это делается для интеграла от функций из $\mathcal{M}_T$, а именно: путем предельного перехода в соответствующих соотношениях для простых функций.

П р и м е р 3.2.6 *Рассмотрим вычисление интеграла*

$$\int_0^t w(s)dw(s).$$

Поскольку значения случайной величины $w(t)$ - $\mathcal{F}_t$ *измеримы и* $\mathbf{M}w^2(t) = t$, *то функция* $f(t,\omega) \in \mathcal{M}_T$ *для любого* $T > 0$. *Следовательно, данный интеграл можно определить, выбрав соответствующую аппроксимацию для процесса* w. *Построим эту аппроксимацию следующим образом: зададим при* $n \geq 1$ *двоично-рациональное разбиение отрезка* $[0,t]$ *точками*

$$t_{k,n} = \frac{t}{2^n}k, \quad k = 0, ..., 2^n.$$

Определим последовательность функций

$$f_n(s,\omega) = w\left[\frac{t}{2^n}k\right], npu t \in (\frac{t}{2^n}k, \frac{t}{2^n}(k+1)].$$

Убедимся, что эта последовательность действительно аппроксимирует Винеровский процесс. Вычислим

$$\mathbf{M}\int_0^t |w(s) - f_n(s,\omega)|^2 ds.$$

Учитывая, что на каждом интервале $(\frac{t}{2^n}k, \frac{t}{2^n}(k+1)]$ *разности* $w(s) - f_n(s,\omega)$ *имеют одинаковое распределение, совпадающее с распределением Винеровского процесса* $w(s - \frac{t}{2^n}k)$, *получаем*

$$\mathbf{M}\int_0^t |w(s) - f_n(s,\omega)|^2 ds = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^{t/2^n} \mathbf{M}w^2(s)ds = \frac{t^2}{2^{n+1}} \to 0.$$

Далее вычисляем интеграл для простой функции f_n

$$J_t(f_n) = \sum_{k=0}^{2^n-1} w\left[\frac{t}{2^n}k\right]\left\{w\left[\frac{t}{2^n}(k+1)\right] - w\left[\frac{t}{2^n}k\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left\{w^2\left[\frac{t}{2^n}(k+1)\right] - w^2\left[\frac{t}{2^n}k\right]\right\} - \left\{w\left[\frac{t}{2^n}(k+1)\right] - w\left[\frac{t}{2^n}k\right]\right\}^2 =$$

$$\frac{w^2(t)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left\{w\left[\frac{t}{2^n}(k+1)\right] - w\left[\frac{t}{2^n}k\right]\right\}^2.$$

*В полученном соотношении сумма представляет собой выражение, которое мы использовали при вычислении квадратической вариации Винеровской траектории (см. Пример 3.2.5) и сходится к t (**P**- п.н.). Таким образом,*

$$J_t(w) = \int_0^t w(s)dw(s) = \lim_n J_t(f_n) = \frac{1}{2}\left[w^2(t) - t\right].$$

Отметим особенность данного выражения. Если бы процесс $w(t)$ был дифференцируем, то вычисление интеграла в обычном смысле дало бы $w^2(t)/2$.

Стохастический интеграл является основой для построения широкого класса, так называемых, процессов Ито.

Определение 3.2.7 *Непрерывный случайный процесс $\xi = \{\xi(t), \mathcal{F}_t\}$, $t \in [0, T]\}$ называется* процессом Ито относительно Винеровского процесса $w = \{w(t), \mathcal{F}_t\}$, $t \in [0, T]$ *если существуют неупреждающие процессы $a = (a(t), \mathcal{F}_t)$ и $b = (b(t), \mathcal{F}_t)$ такие, что*

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T |a(t,\omega)|dt < \infty\right\} = 1, \quad \mathbf{P}\left\{\int_0^T b^2(t,\omega)dt < \infty\right\} = 1$$

и с вероятностью 1 для $0 \le t \le T$

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t b(s,\omega)dw(s).$$

■

В сокращенном виде это уравнение часто записывается в форме стохастического дифференциала

$$d\xi(t) = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dw(t). \tag{3.2.13}$$

3.2.3 Формула Ито

Формула Ито задает соотношение для вычисления стохастических диффернециалов. В классическом анализе если требуется вычислить дифференциал некоторой дифференцируемой функции $f(t,x)$ при $x = x(t)$ используется формула разложения в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка по Δt, которая дает следующее выражение

$$df(t,x(t)) = f_t^{'}(t,x(t))dt + f_x^{'}(t,x(t))dx(t) =$$

$$f_t^{'}(t,x(t))dt + f_x^{'}(t,x(t))x_t^{'}(t)dt,$$

при этом данной формуле придается следующий смысл:

$$f(t+\Delta t, x(t+\Delta t)) - f(t,x(t)) = [f_t^{'}(t,x(t)) + f_x^{'}(t,x(t))x_t^{'}(t)]\Delta t + o(|\Delta t|),$$

где

$$\frac{o(|\Delta t|)}{|\Delta t|} \to 0, \quad \Delta t \to 0.$$

Если процесс $x(t)$ имеет стохастический дифференциал, то данная формула, вообще говоря, не верна. Поскольку

$$\mathbf{M}|w(t+\Delta t) - w(t)|^2 = |\Delta t|,$$

то для вычисления разложения функции $f(t,x(t))$ с точностью до членов первого порядка по Δt требуется использовать разложение в ряд Тейлора по Δt с точностью до членов второго порядка, а по $\Delta w(t)$ с с точностью до членов третьего порядка. В результате в выражении для стохастического дифференциала появляются дополнительные слагаемые.

Т е о р е м а 3.2.3 [Формула Ито] *Пусть случайный процесс $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал (3.2.13), а функция $f(t,x)$ имеет непрерывные частные производные $f_t^{'}(t,x)$, $f_x^{'}(t,x)$ и $f_{xx}^{''}(t,x)$. Тогда процесс $f(t,\xi(t))$ также имеет стохастический дифференциал, равный*

$$df(t,\xi(t)) = [f_t^{'}(t,\xi(t)) + f_x^{'}(t,\xi(t))a(t,\omega) + \frac{1}{2}f_{xx}^{''}(t,\xi(t))b^2(t,\omega)]dt+$$

$$f_x^{'}(t,\xi(t))b(t,\omega)dw(t).$$

Доказательство. В силу определения стохастического интеграла как предела, вычисляемого по последовательности простых функций, можно доказывать формулу лишь для случая, когда функция $\xi(t)$ является простой и более того допускает представление в виде

$$\xi(t) = \xi(0) + at + bw(t),$$

где $a = a(\omega), b = b(\omega)$ - случайные величины, не зависящие от времени. Такое представление справедливо на каждом интервале $(t_i, t_{i+1}]$ постоянства простой функции (см. определение (3.2.5).

Далее можно полагать, что $f(t,\xi(t)) = f(t, at + bw(t))$ и существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(t,x)$ такая, что $f(t, at+bw(t)) = u(t, w(t))$, и следовательно, нам нужно доказать формулу лишь для функций типа $u(t,w(t))$. Также как при вычислении интеграла от Винеровского процесса (Пример 3.2.6) зададим при $n \geq 1$ двоично-рациональное разбиение отрезка $[0,t]$ точками

$$t_{k,\,n} = \frac{t}{2^n}k, \quad k = 0, ..., 2^n,$$

примем обозначения

$$\Delta t = t2^{-n}, \quad \Delta w_k = w[(k+1)\Delta t] - w[k\Delta t]$$

и вычислим разность $u(t,w(t)) - u(0,0)$. При этом мы используем разложение функции u в ряд Тейлора, сохраняя лишь члены первого порядка по Δt и учитывая, что $\mathbf{M}(\Delta w_k)^2 = \Delta t$. Выполнив стандартные преобразования, получим

$$u(t,w(t)) - u(0,0) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \{u((k+1)\Delta t, w[(k+1)\Delta t]) - u(k\Delta t, w[k\Delta t])\} =$$

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \{u((k+1)\Delta t, w[(k+1)\Delta t]) - u(k\Delta t, w[(k+1)\Delta t])\} +$$

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \{u(k\Delta t, w[(k+1)\Delta t]) - u(k\Delta t, w[k\Delta t])\} = S_n^1 + S_n^2.$$

$$S_n^1 = \sum_{k=0}^{2^n-1} u_t^{'}(k\Delta t, w[(k+1)\Delta t])\Delta t+$$

$$\left\{u_t^{'}((k+\theta_k^1)\Delta t, w[(k+1)\Delta t]) - u_t^{'}(k\Delta t, w[(k+1)\Delta t])\right\}\Delta t$$

$$S_n^2 = \sum_{k=0}^{2^n-1} u_x^{'}(k\Delta t, w[k\Delta t])\Delta w_k + \frac{1}{2}u_{xx}^{''}(k\Delta t, w[k\Delta t])(\Delta w_k)^2+$$

$$\frac{1}{2}\left\{u_{xx}^{''}((k\Delta t, w[k\Delta t] + \theta_k^2\Delta w_k) - u_{xx}^{''}(k\Delta t, w[k\Delta t])\right\}(\Delta w_k)^2,$$

где θ_k^1, θ_k^2 - случайные величины, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leq \theta_k^1 \leq 1, \qquad 0 \leq \theta_k^1 \leq 1.$$

Заметим, что случайные величины

$$\alpha_n = \sup_{0 \le k \le 2^n - 1} \left| u_t^{'}((k+\theta_k^1)\Delta t, w[(k+1)\Delta t]) - u_t^{'}(k\Delta t, w[(k+1)\Delta t]) \right|$$

и

$$\beta_n = \sup_{0 \le k \le 2^n - 1} \left| u_{xx}^{''}((k\Delta t, w[k\Delta t] + \theta_k^2 \Delta w_k) - u_{xx}^{''}(k\Delta t, w[k\Delta t]) \right|$$

стремятся к нулю (**P**- п.н.), в силу непрерывности Винеровского процесса и функций $u_t^{'}, u_{xx}^{''}$.

Таким образом мы получаем соотношение

$$\begin{aligned} u(t, w(t)) - u(0,0) = \sum_{k=0}^{2^n-1} u_t^{'}(k\Delta t, w[(k+1)\Delta t])\Delta t + \\ \sum_{k=0}^{2^n-1} \{u_x^{'}(k\Delta t, w[k\Delta t])\Delta w_k + \frac{1}{2} u_{xx}^{''}(k\Delta t, w[k\Delta t])\Delta t\} + \\ A_n + B_n + C_n, \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

где

$$A_n \le \alpha_n t, \quad B_n \le \frac{1}{2}\beta_n \sum_{k=0}^{2^n-1} (\Delta w_k)^2,$$

$$C_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} u_{xx}^{''}(k\Delta t, w[k\Delta t])((\Delta w_k)^2 - \Delta t).$$

Ясно, что A_n и B_n стремятся к нулю (**P**- п.н.), поскольку

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} (\Delta w_k)^2 \to t,$$

(см. Пример 3.2.5.) Покажем, что и $C_n \to 0$ по вероятности.

Для доказательства введем индикаторную функцию

$$I_n^N = I\{\max_{0 \le k \le 2^n-1} |w[k\Delta t]| \le N\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left[\sum_{k=0}^{2^n-1} u_{xx}^{''}(k\Delta t, w[k\Delta t]) I_n^N ((\Delta w_k)^2 - \Delta t) \right]^2 \le \\ \sup_{s \le t, |x| \le N} |u_{xx}^{''}(s,x)|^2 \sum_{k=0}^{2^n-1} (\mathbf{M}((\Delta w_k)^2 - \Delta t)^2 = \\ 2 \sup_{s \le t, |x| \le N} |u_{xx}^{''}(s,x)|^2 \sum_{k=0}^{2^n-1} (\Delta t)^2 \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} u_{xx}^{''}(k\Delta t, w[k\Delta t])(1 - I_n^N)((\Delta w_k)^2 - \Delta t) \ne 0 \right\} \le \\ \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \le t} |w(s)| > N \right\} \to 0, \quad N \to \infty. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что $C_n \to 0$ по вероятности. Действительно, первое из них означает, что $C_n I_n^N \to 0$ по вероятности, второе, что

$$\mathbf{P}\{|C_n(1 - I_n^N| > \varepsilon\} \le \mathbf{P}\{\sup_{s \le t} |w(s)| > N\} \to 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{|C_n| > \varepsilon\} \le \mathbf{P}\left\{|C_n I_n^N| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \mathbf{P}\left\{|C_n(1 - I_n^N)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Переходя теперь к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что суммы в (3.2.14) стремятся к интегралам, получаем, что процесс $u(t, w(t))$ в (3.2.14) удовлетворяет уравнению

$$u(t, w(t)) - u(0,0) =$$

$$\int_0^t u_t'(s, w(s))ds + \int_0^t u_x'(s, w(s))dw(s) + \frac{1}{2}\int_0^t u_{xx}''(s, w(s))ds. \tag{3.2.15}$$

Далее поскольку функция u и ее производные связана с функцией f ссотношениями

$$u_t'(s, w(s)) = f_t'(s, \xi(s)) + af_x'(s, \xi(s)),$$

$$u_x'(s, w(s)) = bf_x'(s, \xi(s)),$$

$$u_{xx}''(s, w(s)) = b^2 f_{xx}''(s, \xi(s)),$$

подстановка которых в уравнение (3.2.15) дает нужный результат

$$f(t, \xi(t)) = f(0,0) + \int_0^t [f_t'(s, \xi(s)) + af_x'(s, \xi(s)) + \frac{1}{2}b^2 f_{xx}''(s, \xi(s))]ds +$$

$$\int_0^t bf_x'(s, \xi(s))dw(s).$$

В случае векторного случайного процесса Ито $\xi(t) \in R^m$ процесс $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал

$$d\xi(t) = a(t, \omega)dt + b(t, \omega)dW(t), \tag{3.2.16}$$

где $W = (w_1, ..., w_m)$ - векторный Винеровский процесс, компоненты вектор-функции $a(t, \omega) = (a_1(t, \omega), ..., a_m(t, \omega)$ и матричной функции $b(t, \omega) = ||b_{ij}(t, \omega)||, \quad i, j = 1, ..., m$ есть неупреждающие случайные процессы, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T |a_i(t, \omega)|dt < \infty\right\} = 1, \quad i = 1, ..., m;$$

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T b_{ij}^2(t, \omega)dt < \infty\right\} = 1, \quad i, j = 1, ..., m.$$

Уравнение (3.2.16) записывается тогда в виде

$$d\xi_i(t) = a_i(t, \omega)dt + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t, \omega)dw_j(t), \quad i = 1, ...m. \tag{3.2.17}$$

Следующая теорема определяет стохастический дифференциал в случае функции векторного аргумента. Доказательство векторного случая полностью повторяет случай $m = 1$.

Т е о р е м а 3.2.4 [Формула Ито для векторного процесса] *Пусть векторный случайный процесс* $\xi(t)$ *имеет стохастический дифференциал (3.2.17), а функция* $f(t,x)$ *непрерывна и имеет непрерывные частные производные* $f_t^{'}(t,x)$, $f_x^{'}(t,x)$ *и* $f_{xx}^{''}(t,x)$. *Тогда процесс* $f(t,\xi_1(t),...,\xi_m(t))$ *также имеет стохастический дифференциал, равный*

$$df(t,\xi_1(t),...,\xi_m(t)) =$$

$$\left[f_t^{'}(t,\xi_1(t),...,\xi_m(t)) + \sum_{i=1}^{m} f_{x_i}^{'}(t,\xi_1(t),...,\xi_m(t))a_i(t,\omega) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} f_{x_ix_j}^{''}(t,\xi_1(t),...,\xi_m(t))\sum_{k=1}^{m} b_{ik}(t,\omega)b_{jk}(t,\omega)\right] dt +$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} f_{x_i}^{'}(t,\xi_1(t),...,\xi_m(t))b_{ij}(t,\omega)dw_j(t).$$

Рассмотрим некоторые примеры использования формулы Ито.

П р и м е р 3.2.7 *Рассмотрим два векторных процесса* $X_i = (x_i(t),\mathcal{F}_t)$, $i = 1,2)$ *с дифференциалами*

$$dx_i = a_i(t,\omega)dt + b_i(t,\omega)dW(t),$$

где $W(t)$ *- Винеровский процесс размерности* k, *процессы* $x_1 \in R^n$ *и* $x_2 \in R^m$, $a_1 \in R^n$, $a_2 \in R^m$, *соответственно,* b_1 *- матрица размера* $n\times k$ *и* b_2 *- матрица размера* $m \times k$.

Рассмотрим матричный процесс $Y(t) = x_1(t)x_2^*(t)$. *Применение векторной формулы Ито к элементам матрицы* $Y(t)$ *дает следующее выражение для дифференциала*

$$\begin{aligned} dY(t) &= \left[x_1(t)a_2^*(t) + a_1(t)x_2^*(t) + b_1(t)b_2^*(t)\right] dt + \\ &b_1(t)dW(t)x_2^*(t) + x_1 dW^*(t)b_2(t). \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

П р и м е р 3.2.8 *Пусть* $f(t,x_1,...,x_m) = (x, B(t)x)$, *где* $B(t)$ *- некоторая неслучайная матрица размера* $m\times m$ *с дифференцируемыми элементами. Пусть* $X = (x(t),\mathcal{F}_t)$ *- процесс Ито с дифференциалом*

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + b(t)dW(t)$$

с k *- мерным Винеровским процессом, и матрицей* $b(t)$ *размера* $m\times k$. *Определим дифференциал процесса* $Y(t) = (x(t), B(t)x(t))$. *Вначале найдем дифференциал процесса* $y(t) = B(t)x(t)$. *Применение векторной формулы Ито дает*

$$dy(t) = [\dot{B}(t)x(t) + B(t)a(t)]dt + B(t)b(t)dW(t).$$

Далее используем соотношение (3.2.18), согласно которому

$$d(x(t)y^*(t)) = [a(t)y^*(t) + x(t)x^*(t)B^*(t) + b(t)b^*(t)B(t)]dt +$$

$$x(t)dW^*(t)b^*(t)B^*(t) + b(t)dW(t)x^*(t)B^*(t).$$

Поскольку $(x(t), B(t)x(t)) = Sp\,(x(t)y^*(t))$, *то*

$$d(x(t), B(t)x(t)) = Sp\, d(x(t), y^*(t)) =$$

$$\Big[Sp\{a(t)x^*(t)B^*(t)\} + Sp\{x(t)x^*(t)\dot{B}^*(t)\} + Sp\{x(t)a^*(t)B^*(t)\} +$$

$$Sp\{b(t)b^*(t)B(t)\}\Big]\, dt +$$

$$Sp\{x(t)dW^*(t)b^*(t)B^*(t)\} + Sp\{b(t)dW(t)x^*(t)B(t)\} =$$

$$\Big[(x(t), B^*(t)a(t)) + (x(t), B(t)a(t)) + (x(t), \dot{B}(t)x(t)) +$$

$$Sp\{b(t)b^*(t)B(t)\}\Big]\, dt +$$

$$(b^*(t)B^*(t)x(t), dW(t)) + (b^*(t)B(t)x(t), dW(t)).$$

Таким образом, окончательное выражение имеет вид

$$d(x(t), B(t)x(t)) =$$

$$\Big\{(x(t), \dot{B}(t)x(t)) + (x(t), [B(t) + B^*(t)]a(t) + Sp\{b(t)b^*(t)B(t)\}\Big\}\, dt + \tag{3.2.19}$$

$$(b^*(t)[B(t) + B^*(t)]x(t), dW(t)).$$

П р и м е р 3.2.9 *Пусть* $a(t) = a(t,\omega) \in \mathcal{P}_T$, *и*

$$\eta(t) = exp\left\{\int\limits_0^t a(s)dw(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t a^2(s)ds\right\}.$$

Определим стохастический дифференциал процесса $\eta(t)$. *По формуле Ито для* $f(x) = exp(x)$ *для процесса Ито*

$$dx(t) = \int\limits_0^t a(s)dw(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t a^2(s)ds$$

имеем

$$d\eta(t) = \eta(t)a(t)dw(t). \tag{3.2.20}$$

Аналогично получаем соотношение

$$d\left\{\frac{1}{\eta(t)}\right\} = \left\{\frac{1}{\eta(t)}\right\}\left[a^2(t)dt - a(t)dw(t)\right]. \tag{3.2.21}$$

Заметим также, что $\mathbf{P}\{\inf\limits_{t\le T}\eta(t) > 0\} = 1$, *поскольку согласно условию* $\mathbf{P}\{\int\limits_0^T a^2(t)dt < \infty\} = 1$. Из формулы (3.2.20) следует, что при достаточно регулярном поведении функции $a(t,\omega)$ выполняется соотношение $\mathbf{M}\eta(t) = 1$. Действительно, уравнение (3.2.20) эквивалентно соотношению

$$\eta(t) = \eta(0) + \int\limits_0^t \eta(s)a(s)dw(s).$$

Если $\int\limits_0^T \mathbf{M}\eta^2(s)a^2(s)ds < \infty$, (это неравенство легко уставливается, например, в случае детерминированной функции $a(t)$) то

$$\mathbf{M}\int\limits_0^t \eta(s)a(s)dw(s) = 0,$$

и следовательно, $\mathbf{M}\eta(t) = \eta(0) = 1$.

П р и м е р 3.2.10 *Пусть $a(t), b(t)$ - детерминированные функции, на отрезке $[0,T]$ и*

$$\int\limits_0^T |a(t)|dt < \infty, \quad \int\limits_0^T b^2(t)dt < \infty.$$

Обозначим через

$$\Phi(t,u) = exp\left\{\int\limits_u^t a(s)ds\right\},$$

и рассмотрим случайный процесс

$$x(t) = \Phi(t,0)\xi + \int\limits_0^t \Phi(t,s)b(s)dw(s). \tag{3.2.22}$$

Тогда $x(t)$ имеет стохастический дифференциал

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + b(t)dw(t), \quad x(0) = \xi. \tag{3.2.23}$$

Таким образом формула (3.2.22) задает представление для решения линейного уравнения в форме процесса Ито.

3.2.4 Задачи для самостоятельного решения

3.2.1. Вывести соотношения (3.2.3).

3.2.2. Доказать, что Броуновское движение начинается заново в каждый Марковский момент времени. Пусть $w(t), t \geq 0$ - процесс Броуновского движения, и τ - момент остановки относительно $\mathcal{F}_t^w = \sigma\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$, то есть событие $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \geq 0$ и $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$. Тогда процесс

$$\xi(s) = \xi(\tau + s) - \xi(\tau),\ s \geq 0$$

есть процесс Броуновского движения.

3.2.3. Доказать соотношение (3.2.5).

3.2.4. Доказать свойства 1) - 6) стохастического интеграла от простых функций.

3.2.5. Доказать, что стохастический интеграл от функции $f \in \mathcal{M}_T$ не зависит от выбора последовательности простых функций, аппроксимирующих f. Иными словами, если есть две различные последовательности простых функций $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, аппроксимирующие f в смысле определения (3.2.9) и определяющие стохастический интеграл по формулам

$$J_t(f) = l.i.m._{n}\, J_t(f_n),$$

$$J_t^{'}(f) = l.i.m._{n}\, J_t(g_n),$$

то

$$\mathbf{M}|J_t(f) - J_t^{'}(f)|^2 = 0.$$

3.2.6. Доказать свойства 1) - 6) стохастического интеграла от функции $f \in \mathcal{M}_T$.

3.2.7. Пусть в Примере 3.2.3 $a(t)$ - детерминированная функция и

$$\int\limits_0^T a^2(s)ds < \infty.$$

Показать, что

$$\mathbf{M}\eta^{-1}(t) = exp\left\{\int\limits_0^t a^2(s)ds\right\}.$$

3.2.8. Пусть $f(t)$ детерминированная функция и $\sup\limits_{[0,T]} |f(t)| \leq K$. Показать, что

$$\mathbf{M}\left\{\int\limits_0^t f(s)dw(s)\right\}^{2m} \leq K^{2m}t^m(2m-1)!!.$$

[Указание: рассмотреть процесс $x(t) = \int\limits_0^t f(s)dw(s)$, и применить формулу Ито к процессу $z(t) = x^{2m}(t)$.]

3.2.9. По аналогии с доказательством для скалярного случая вывести формулу Ито для векторного процесса (Теорема 3.2.4).

3.2.10. Доказать, что стохастический интеграл от детерминированной функции

$$x(t) = \int\limits_0^t f(s)dw(s)$$

есть гауссовский случайный процесс и найти его характеристики:

$$\mathbf{M}x(t), \quad \mathbf{cov}(x(t), x(s)).$$

3.2.11. В Примере 3.2.10 показать с помощью формулы Ито, что процесс (3.2.22) действительно удовлетворяет уравнению (3.2.23).

3.2.12. В Примере 3.2.10, воспользовавшись формулой (3.2.22), найти выражения для $\mathbf{M}x(t)$ и $\mathbf{cov}(x(t), x(s))$.

3.3 Стохастические дифференциальные уравнения

В разделе ?? говорилось о процессах диффузионного типа, эволюция которых может быть описана в терминах средней скорости движения - "дрейфа", и величины ее флуктуаций "диффузии". Если эти характеристики являются функциями текущего состояния, то эволюция такого процесса может быть описана уравнением, аналогичным обыкновенному дифференциальному уравнению, для которого скорость есть детерминированная функция текущего состояния, а величина флуктуаций равна нулю. Теория стохастического интегрирования позволяет дать строгое определение случайного процесса, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения.

3.3.1 Определение и основные свойства стохастических дифференциальных уравнений

Пусть $a(t,x)$ и $b(t,x)$ - некоторые функции, определенные при $t \in [0,T]$, $x \in R^1$, $\mathcal{F}_t$ - некоторое неубывающее семейство $\sigma-$ алгебр и $(w(t), \mathcal{F}_t)$ - Винеровский процесс.

Определение 3.3.1 *Случайный процесс* $\{\xi(t),\, t \geq 0\}$ *, заданый на вероятностном пространстве* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ *, называется* решением (сильным решением) стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + b(t,\xi(t))dw(t) \qquad (3.3.1)$$

с $\mathcal{F}_0$ - измеримым начальным условием $\xi(0) = \eta$, *если он обладает следующими свойствами:*

1. $\xi(t)-$ *непрерывен* $\quad$ *(*$\mathbf{P}$*- п.н.);*
2. *при каждом* $t \in [0,T]$ *случайные величины* $\xi(t)$ $\mathcal{F}_t-$ *измеримы;*
3. $\mathbf{P}\left\{\int\limits_0^T |a(t,\xi(t))|dt < \infty\right\} = 1, \qquad \mathbf{P}\left\{\int\limits_0^T b^2(t,\xi(t))dt < \infty\right\} = 1;$
4. *для каждого* $t \in [0,T]$ *с вероятностью 1*

$$\xi(t) = \eta + \int\limits_0^t a(s,\xi(s))ds + \int\limits_0^t b(s,\xi(s))dw(s).$$

■

Определение 3.3.2 *Стохастическое дифференциальное уравнение (3.3.1) имеет* единственное решение (единственное сильное решение) *если для любых его двух решений* $\xi_1(t)$ *и* $\xi_2(t)$

$$\mathbf{P}\{\sup_{[0,T]} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| > 0\} = 0. \qquad (3.3.2)$$

■

Условия существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения даются следующей теоремой

Теорема 3.3.1 *Пусть* $a(t,x)$ *и* $b(t,x)$ *удовлетворяют условию Липшица*

$$|a(t,x) - a(t,y)|^2 + |b(t,x) - b(t,y)|^2 \leq L|x-y|^2, \qquad (3.3.3)$$

и условию линейного роста

$$a^2(t,x) + b^2(t,x) \leq L(1 + x^2), \qquad (3.3.4)$$

где $L > 0$ *- некоторая константа, а* $x, y \in R^1$*.*

Пусть $\eta = \eta(\omega)$ $\mathcal{F}_0$ *- измеримая случайная величина, такая что* $\mathbf{P}(|\eta(\omega)| < \infty) = 1$*.*

Тогда:

1. *уравнение (3.3.1) имеет единственное решение с начальным условием* $\xi(0) = \eta$,

2. *если* $\mathbf{M}\eta^{2m} < \infty, \quad m \geq 1$, *то*

$$\mathbf{M}|\xi(t)|^{2m} \leq C(L,T)(1 + \mathbf{M}\eta^{2m}), \tag{3.3.5}$$

где константа C *зависит лишь от* L *и* T.

Векторный вариант теоремы существования и единственности выполняется при следующих условиях:
условие Липшица

$$||a(t,x) - a(t,y)||^2 + ||b(t,x) - b(t,y)||^2 \leq L||x - y||^2, \tag{3.3.6}$$

и условие линейного роста

$$||a(t,x)||^2 + ||b(t,x)||^2 \leq L(1 + ||x||^2), \tag{3.3.7}$$

где $L > 0$ *- некоторая константа, а* $x, y \in R^n$. *При выполнении этих условий векторное дифференциальное уравнение (3.3.1)*

1. *имеет единственное решение с начальным условием* $\xi(0) = \eta \in R^n$,

2. *если* $\mathbf{M}||\eta||^{2m} < \infty, \quad m \geq 1$, *то*

$$\mathbf{M}||\xi(t)||^{2m} \leq C(L,T,n)(1 + \mathbf{M}\eta^{2m}), \tag{3.3.8}$$

где константа C *зависит лишь от* L, T *и размерности пространства* n.

Случайный процесс, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения при определенной степени регулярности коэффициентов сноса и диффузии обладает свойствами регулярности, такими как непрерывная зависимость от начальных условий, дифференцируемость по начальным условиям, марковость и др.

Теорема 3.3.2 [Непрерывность по начальному условию] *Пусть функции* a *и* b *удовлетворяют условиям (3.3.6), (3.3.7) теоремы 3.3.1. Пусть начальное условие* $\eta = x \in R^n$ *детерминированно и* $\xi_x(t)$ *- единственное решение уравнения (3.3.1) с начальным условием* $\xi(0) = x$. *Тогда*

$$\mathbf{M}\left\{\sup_{[0,T]} ||\xi_x(t) - \xi_y(t)||^2\right\} \leq C(L,T,n)||x - y||^2, \tag{3.3.9}$$

где константа C *зависит лишь от* L, T *и размерности пространства* n.

Теорема 3.3.3 [Непрерывная зависимость от параметра] *Пусть функции* $a(t,x,\lambda)$ *и* $b(t,x,\lambda)$ *непрерывны по совокупности переменных, и удовлетворяют условиям (3.3.6), (3.3.7) теоремы 3.3.1 при любом значении параметра* λ. *Пусть начальное условие* $\eta \in R^n$ *удовлетворяет условию*

$$\mathbf{M}||\eta||^2 < \infty$$

и $\xi_\lambda(t)$ *- единственное решение уравнения (3.3.1) с начальным условием* $\xi_\lambda(0) = \eta$. *Тогда*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \mathbf{M}\left\{\sup_{[0,T]} ||\xi_\lambda(t) - \xi_{\lambda_0}(t)||^2\right\} = 0. \tag{3.3.10}$$

Теорема 3.3.4 [Дифференцируемость по начальным условиям]
Пусть функции $a(t,x)$ *и* $b(t,x)$ *непрерывны по совокупности переменных и непрерывными и равномерно ограниченными вторыми производными, и удовлетворяют условиям (3.3.6), (3.3.7) теоремы 3.3.1. Пусть начальное условие* $\eta = x \in R^n$ *детерминированно и* $\xi_x(t)$ *- единственное решение уравнения (3.3.1) с начальным условием* $\xi(0) = x$. *Тогда для любого* $t \in [0,T]$ *случайный процесс* $\xi_x(t)$ *дифференцируем по* x *в среднем квадратическом смысле и процесс*

$$\frac{\partial \xi_x(t)}{\partial x_k} = \varphi_k(t), \quad k = 1, ..., n$$

удовлетворяет линейному стохастическому уравнению со случайными коэффициентами

$$d\varphi_k(t) = \nabla a(t,\xi_x(t))\varphi_k(t)dt + \nabla b(t,\xi_x(t))\varphi_k(t)dw(t),$$

с начальным условием

$$\varphi_k^i(0) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad i = k, \\ 0, & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Т е о р е м а 3.3.5 [Решение стохастического дифференциального уравнения как Марковский процесс] *Пусть функции a и b удовлетворяют условиям (3.3.6), (3.3.7) теоремы 3.3.1. Пусть начальное условие $\eta = x \in R^n$ не зависит от Винеровского процесса $w = (w(t), \mathcal{F}_t)$, $t \in [0,T]$ и $\xi(t)$ - единственное решение уравнения (3.3.1) с начальным условием $\xi(0) = \eta$. Тогда $\xi(t)$ является непрерывным Марковским процессом относительно $\mathcal{F}_t$.*

Если ξ_{sx} есть решение уравнения (3.3.1) на отрезке $[s,T]$ с детерминированным начальным условием $\xi(s) = x$, то переходная вероятность процесса $\xi(t)$ есть

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi(t) \in A|\mathcal{F}_s\} = \mathbf{P}\{\omega : \xi(t) \in A|\sigma\{\xi(s)\}\} =$$

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi_{sx}(t) \in A\} = \mathbf{P}(s,x,t,A).$$

Если коэффициенты уравнения (3.3.1) не зависят от t, то

$$\mathbf{P}(s,x,t,A) = \mathbf{P}(0,x,t-s,A)$$

и $\xi(t)$ - однородный Марковский процесс.

Теория стохастичсеких дифференциальных уравнений представляет собой весьма развитое направление теории случайных процессов, на результатах которой базируется теория оптимального управления и оценивания. Однако математическая техника, применяемая доказательствах является достаточно сложной и требующей знания целого ряда нетривиальных результатов в области стохастического анализа. Поэтому ниже мы рассматриваем лишь линейные стохастические дифференциальные уравнения.

3.3.2 Линейные стохастические дифференциальные уравнения

Пусть в векторном уравнении (3.3.1) $x \in R^n, w \in R^m$,

$$\mathrm{a}(t,x) = A(t)x, \quad b(t,x) = B(t),$$

где матрицы $A(t), B(t)$ имеют размерности $n \times n$, $n \times m$, соответственно, и их элементы являются непрерывными функциями $t \in [0,T]$. В этом случае уравнение (3.3.1) называется *линейным* стохастическим уравнением, для него выполняются условия теоремы 3.3.1, и следовательно, уравнение (3.3.1) имеет единственное решение. Это решение допускает явное представление в форме процесса Ито, что делает его весьма полезным для многочисленных приложений.

Т е о р е м а 3.3.6 *Пусть $\xi(t)$ - есть решение линейного стохастического дифференциального уравнения*

$$d\xi(t) = A(t)\xi(t)dt + B(t)dw(t), \tag{3.3.11}$$

с начальным условием

$$\xi(t) = x \in R^n.$$

Тогда единственное решение уравнения (3.3.11) представимо в виде

$$\xi(t) = \Phi(t,0)x + \int_0^t \Phi(t,s)B(s)dw(s), \tag{3.3.12}$$

где $\Phi(t,s)$ - решение матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,s) = A(t)\Phi(t,s), \quad \Phi(s,s) = I, \tag{3.3.13}$$

где I - единичная матрица размера $n \times n$.

Для доказательства теоремы нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Л е м м а 3.3.1 *Матрично-значная функция* $\Phi(t,s)$ *обладает следующими свойствами:*

1. *для любых* $0 \le s \le r \le t \le T$ *выполнено соотношение (полугрупповое свойство)*
$$\Phi(t,s) = \Phi(t,r)\Phi(r,s);$$
2. *матрица* $\Phi(t,s)$ *невырождена для любых* $t, s \in [0,T]$;
3. *функция* $\Phi(t,s)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*
$$\frac{d}{ds}\Phi(t,s) = -\Phi(t,s)A(s), \quad \Phi(t,t) = I, \tag{3.3.14}$$
где I *- единичная матрица размера* $n \times n$;

Доказательство. Соотношение 1) следует непосредственно из определения. Невырожденность матрицы $\Phi(t,s)$ есть следствие тождества Якоби, согласно которому
$$det\,\Phi(t,s) = det\,\Phi(s,s)\,exp\left\{\int\limits_s^t Sp(A(u))du\right\}.$$
Для вывода уравнения (3.3.14) достаточно продифференцировать соотношение $\Phi(t,s) = \Phi(t,r)\Phi(r,s)$ по r, откуда следует равенство
$$\frac{d}{dr}\Phi(t,r)\Phi(r,s) = \frac{d\Phi(t,r)}{dr}\Phi(r,s) + \Phi(t,r)A(r)\Phi(r,s) = 0$$
и соотношение (3.3.14) есть следствие невырожденности матрицы $\Phi(r,s)$.

Л е м м а 3.3.2 [Теорема Фубини для стохастического интеграла]
Пусть $w = (w(t), \mathcal{F}_t)$ *- Винеровский процесс на* $[0,T]$, $g(t,s)$ *- непрерывны по совокупности переменных,* $f(s), h(s)$ *- измеримые функции, удовлетворяющие условиям*
$$\int\limits_0^T |f(s)|ds < \infty, \qquad \int\limits_0^T h^2(s)ds < \infty.$$
Тогда

a) *процесс* $X(t)$, *определяемый соотношением*
$$X(t) = \int\limits_0^T g(t,s)h(s)dw(s)$$
непрерывен в среднем квадратическом смысле;

b) *случайные величины*
$$A_1 = \int\limits_0^T f(t)\left(\int\limits_0^T g(t,s)h(s)dw(s)\right)dt,$$
и
$$A_2 = \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t)g(t,s)dt\right)h(s)dw(s)$$
равны (**P**- *п.н.).*

Доказательство. (a) Так как функция $g(t,s)$ непрерывна, то она и ограничена на $[0,T]\times[0,T]$ и

$$\int\limits_0^T g^2(t,s)h^2(s)ds < \infty,$$

для любого $t\in[0,T]$ поэтому стохастический интеграл в правой части соотношения для $X(t)$ определен корректно. Покажем непрерывность в среднем квадратическом смысле. В силу свойств стохастического интеграла

$$\mathbf{M}|X(t)-X(t+\Delta)|^2 = \int\limits_0^T [g(t,u)-g(t+\Delta,u)]^2h^2(u)du.$$

Так как функция $g(t,s)$ непрерывна, то она и равномерно непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$, так что для любого заданного $\varepsilon>0$ можно выбрать такое δ_0, что $|g(t,u)-g(t+\Delta,u)|<\varepsilon$ для всех $\Delta<\delta_0$. Поэтому $\mathbf{M}|X(t)-X(t+\Delta)|^2\to 0$ при $\Delta\to 0$. Таким образом утверждение (a) доказано.

b) Поскольку случайный процесс $X(t)$ непрерывен в среднем квадратическом смысле, то существует измеримая версия этого процесса, и следовательно, интеграл в соотношении для случайной величины

$$A_1 = \int\limits_0^T f(t)X(t)dt$$

корректно определен. Предположим вначале, что

$$g(t,s) = \sum_{i=1}^N g_{1\,i}(t)g_{2\,i}(s),$$

где $g_{1\,i}, g_{2\,i}$ - измеримые ограниченные функции. Тогда

$$A_1 = A_2 = \sum_{i=1}^N \int\limits_0^T f(t)g_{1\,i}(t)dt \int\limits_0^T g_{2\,i}(s)h(s)dw(s).$$

Приблизим теперь непрерывную функцию $g(t,s)$ ступенчатой следующим образом. Для заданного $\varepsilon>0$ выберем N так, что $|g(t,s)-g(t^{'},s^{'})|<\varepsilon$ для $|t-t^{'}|+|s-s^{'}|<1/n$. Тогда для ступенчатой функции

$$g^N(t,s) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N g\left(\frac{j}{n},\frac{i}{n}\right) I_{[\frac{j}{N},\frac{j+1}{N}]}(t)\right) I_{[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N}]}(s),$$

имеет место соотношение

$$|g(t,s)-g^N(t,s)|<\varepsilon.$$

Если определить случайные величины A_1^N, A_2^N с помощью соответствующих интегралов, но с функцией g^N вместо g, то $A_1^N = A_2^N$. Далее поскольку g^N сходится к g равномерно, то $A_1^N\to A^1$, а $A_2^N\to A^2$ в среднем квадратическом смысле, поэтому $\mathbf{M}|A_1-A_2|^2=0$.

Доказательство теоремы. Единственность решения немедленно следует из линейности уравнения (3.3.11). Действительно, если есть два решения $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, то их разность $z(t)=\xi_1(t)-\xi_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot z(t) = A(t)z(t), \quad z(0)=0,$$

и следовательно, $z(t)=0$ для любого $t\in[0,T]$.

Проверим, что диффузионный процесс (3.3.12) действительно удовлетворяет уравнению (3.3.11). Для процесса $\xi(t)$, определенного формулой (3.3.12), с использованием результатов Лемм 3.3.1, 3.3.2, имеем

$$\int_0^t A(s)\xi(s)ds =$$

$$\int_0^t A(s)\Phi(s,0)xds + \int_0^t A(s)\int_0^s \Phi(s,\tau)B(\tau)dw(\tau)ds =$$

$$\int_0^t A(s)\Phi(s,0)xds + \int_0^t \int_\tau^t A(s)\Phi(s,\tau)dw(\tau)B(\tau)ds =$$

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\Phi(s,0)xds + \int_0^t \int_\tau^t \frac{d}{ds}\Phi(s,\tau)dw(\tau)B(\tau)ds =$$

$$\Phi(t,0)x - x + \int_0^t [\Phi(t,\tau) - I]B(\tau)dw(\tau) = \xi(t) - x - \int_0^t B(\tau)dw(\tau),$$

что и доказывает теорему.

Рассмотрим некоторые применения полученного результата.

П р и м е р 3.3.1 *Пусть начальное условие $x = \eta \in R^n$ для уравнения (3.3.11) является случайным и не зависит от Винеровского процесса $w = (w(t), \mathcal{F}_t)$. Пусть*

$$\mathbf{M}\eta = m_0, \quad \mathbf{cov}(\eta, \eta^*) = \gamma_0,$$

тогда в силу соотношения (3.3.12) для любого $t \in [0,T]$ определены

$$\mathbf{M}\xi(t) = \Phi(t,0)m_0 = m(t), \tag{3.3.15}$$

и

$$\mathbf{cov}(\xi(t), \xi^*(t)) = \Phi(t,0)\gamma_0\Phi^*(t,0) + \int_0^t \Phi(t,s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t,s)ds = \gamma(t). \tag{3.3.16}$$

Данные соотношения вытекают из свойств стохастического интеграла.

Характеристики $m(t)$ и $\gamma(t)$ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{m}(t) = A(t)m(t), \quad m(0) = m_0, \tag{3.3.17}$$

$$\dot{\gamma}(t) = A(t)\gamma(t) + \gamma(t)A^*(t) + B(t)B^*(t), \quad \gamma(0) = \gamma_0. \tag{3.3.18}$$

Эти соотношения легко выводятся из Леммы 3.3.1.

Кроме того если начальное условие - есть гауссовский случайный вектор, а именно: $\xi(0)$ имеет распределение $\mathcal{N}(m_0, \gamma_0)$, то и процесс $\xi(t)$ является гауссовским, поскольку решение уравнения представимо стохастическим интегралом от детерминированной функции. Совместное распределение случайных величин $\{\xi(t_1), ..., \xi(t_k)\}$ в этом случае будет гауссовским с математическими ожиданиями $\{m(t_1), ..., m(t_k)\}$ и ковариациями

$$C(t_i, t_j) = \mathbf{cov}(\xi(t_i), \xi^*(t_j)), i, j = 1, ..., k.$$

Ковариационная функция $C(t,s)$ для случайного процесса $\xi(t)$ также находится из представления (3.3.12)

$$C(t,s) = \mathbf{M}(\xi(t) - m(t))(\xi(s) - m(s))^* =$$

$$\Phi(t,0)\gamma_0\Phi^*(s,0) + \int\limits_0^{t\wedge s} \Phi(t,u)B(u)B^*(u)\Phi^*(s,u)du. \tag{3.3.19}$$

Ковариационная функция удовлетворяет также соотношениям

$$C(t,s) = \begin{cases} \Phi(t,s)C(s,s), & \text{при} \quad t \geq s \\ C(t,t)\Phi^*(s,t), & \text{при} \quad t \leq s. \end{cases} \tag{3.3.20}$$

Пусть матричные функции $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$ не зависят от времени. Тогда при некотором выборе начальных условий решение линейного стохастического уравнения определяет стационарный процесс. Рассмотрим уравнение (3.3.18) для матрицы ковариаций. При стационарных A, B оно принимает вид

$$\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t) + \gamma(t)A^* + BB^*.$$

Если существует единственное стационарное решение этого уравнения $\bar{\gamma}$, то оно удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$A\bar{\gamma} + \bar{\gamma}A^* + BB^* = 0,$$

получаемому из дифференциального уравнения при условии $\dot{\gamma}(t) = 0$. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений оно называется *уравнением Ляпунова.* Если положить $m_0 = 0$, $\gamma_0 = \bar{\gamma}$ то процесс $\xi(t)$ будет иметь следующие характеристики

$$\mathbf{M}\xi(t) = 0, \quad \mathbf{cov}(\xi(t), \xi(s)) = \Phi(t-s,0)\bar{\gamma},$$

то есть будет стационарным в широком смысле при $t, s \geq 0$. Если же начальное условие будет гауссовским, то стационарность будет иметь место и в узком смысле. Если матрица A устойчива (все собственные значения имеют отрицательные действительные части), то

$$\bar{\gamma} = \int\limits_0^{\infty} exp\{As\}BB^*\left(exp\{As\}\right)^* ds, \tag{3.3.21}$$

где

$$exp\{As\} = \Phi(s,0).$$

В качестве примера рассмотрим стационарный *процесс Орнштейна-Уленбека.*

П р и м е р 3.3.2 *Рассмотрим решение стохастического уравнения*

$$d\xi(t) = -\alpha\xi(t)dt + \beta dw(t),$$

где α, и β - положительные постоянные, а $w(t)$ - процесс Броуновского движения. Пусть $\mathbf{M}\xi(0) = 0$, а $\mathbf{cov}(\xi(0)) = \dfrac{\beta^2}{2\alpha}$. Тогда $\bar{\gamma} = \dfrac{\beta^2}{2\alpha}$ есть стационарное решение уравнения

$$\dot{\gamma}(t) = -2\alpha\gamma(t) + \beta^2$$

для ковариационной функции, и

$$C(t,s) = \begin{cases} \Phi(t,s)\bar{\gamma} = exp\{-\alpha(t-s)\}\dfrac{\beta^2}{2\alpha} & \text{при} \quad t \geq s \\ \bar{\gamma}\Phi(s,t) = exp\{-\alpha(s-t)\}\dfrac{\beta^2}{2\alpha} & \text{при} \quad t \leq s. \end{cases}$$

Таким образом

$$\mathbf{cov}(\xi(t),\xi(s)) = C(t-s,0) = exp\{-\alpha|t-s|\}\frac{\beta^2}{2\alpha}$$

есть ковариационная функция стационарного процесса.

Преобразование Фурье этой ковариационной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C(t,0)e^{-ixt}dt = \frac{1}{2\pi}\frac{\beta^2}{\alpha^2+x^2} = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\beta}{\alpha+ix}\right|^2. \tag{3.3.22}$$

Согласно замечанию **??** *это означает, что процесс $\xi(t)$ может быть получен при прохождении гауссовского белого шума через линейный фильтр с частотной характеристикой*

$$\varphi(x) = \frac{\beta}{\alpha+ix}.$$

Импульсная характеристика этого фильтра равна

$$h(t) = \begin{cases} \beta e^{-\alpha t}, & \text{при} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{при} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е *Совпадение ковариационной функции процесса Орнштейна-Уленбека и стационарного в широком смысле процесса может быть основой для моделирования последнего с помощью стохастических дифференциальных уравнений. Однако, использовать это совпадение можно только при достаточно больших значениях t, поскольку процесс, описываемый стохастическим уравнением начинает свою эволюцию лишь в момент времени $t=0$, а стационарный процесс существует на всей временной оси. Характерное время корреляции для процесса Орштейна-Уленбека равно $1/\alpha$ (за это время корреляция между значениями уменьшается в e раз), поэтому процесс Орнштейна-Уленбека может служить хорошей моделью стационарного процесса при $t \gg 1/\alpha$.*

З а м е ч а н и е *Процесс Орнштейна-Уленбека можно использовать как модель процесса белого шума. Действительно, его спектральная плотность 3.3.22 максимальна в точке $x=0$, симметрична и скорость её убывания на бесконечности определяется параметром α. Увеличивая α мы уменьшаем характерное время корреляции, причем в пределе при $\alpha \to 0$ мы получаем нулевое время корреляции и равномерное распределение спектральной плотности, как и для процесса белого шума. Если одновременно с увеличением α поддерживать постоянной величину β/α то устремляя $\alpha \to \infty$ мы будем получать все лучшее приближение к процессу белого шума с равномерным распределением спектральной плотности. При этом дисперсия этого процесса $\sigma^2 = \beta^2/2\alpha \to \infty$, а ковариационная функция $C(t) \to \sigma^2\delta(t)$. Однако в практических приложениях можно ограничиться конечным значением α, так как если характерная частота процессов в моделируемой системе равна λ_0, то при $\alpha \gg \lambda_0$ процесс Орнштейна-Уленбека является хорошей моделью процесса белого шума.*

3.3.3 Формирующие фильтры для стационарных случайных процессов с дробно-рациональным спектром

В предыдущем разделе мы видели как стохастические дифференциальные уравнения можно использовать для моделирования стационарных процессов. При этом само уравнение является формирующим фильтром, на вход которого поступает Винеровский процесс, а на выходе с течением времени устанавливается стационарный процесс с некоторой спектральной плотностью. Изменяя структуру линейного уравнения с постоянными коэффициентами можно целенаправленно изменять и спектральную плотность выходного процесса. Для того, чтобы описать стационарный процесс, формирующийся как решение линейного стохастического уравнения, нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Л е м м а 3.3.3 *Пусть $w(t)$ - Винеровский процесс, при $t \in R^1$. Тогда на $\sigma-$ алгебре Борелевских множеств действительной прямой можно определить ортогональную стохастическую меру $Z(dx)$ такую, что для любого $\Delta \in \mathcal{B}(R^1)$, имеющего ограниченную меру Лебега $|\Delta|$,*

$$\begin{gathered}\mathbf{M}Z(\Delta)=0, \qquad \mathbf{M}|Z(\Delta)|^2=\frac{|\Delta|}{2\pi}, \\ \mathbf{M}Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}=0, \quad \text{при} \quad \Delta_1\cap\Delta_2=\emptyset,\end{gathered} \tag{3.3.23}$$

и такую что для любой $\varphi(x) \in L_2(R^1, \mathcal{B}(R^1), dx)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) Z(dx) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) dw(t), \tag{3.3.24}$$

где

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\varphi(x)dx.$$

Доказательство. Определим случайный процесс $Z(x,x_0), \quad x\in R^1$ как

$$Z(x,x_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixt}-e^{-ix_0t}}{-it}dw(t).$$

Функция под знаком интеграла удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{-ixt}-e^{-ix_0t}}{-it}\right|^2 dt<\infty$$

для любых $x, x_0 \in R^1$, поэтому при выбранном значении x_0 процесс $Z(x,x_0)$ определен как предел в среднеквадратическом смысле. Для произвольных интервалов $\Delta=(x_1,x_2]$ таких, что $x_1\geq x_0$ приращения процесса $\Delta Z = Z(x_2)-Z(x_1)$ представимы в виде

$$\Delta Z=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix_2t}-e^{-ix_1t}}{-it}dw(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} l_\Delta(t)dw(t) \tag{3.3.25}$$

и обладают следующими свойствами

$$\mathbf{M}\Delta Z=0, \qquad \mathbf{M}|\Delta Z|^2=\frac{|x_2-x_1|}{2\pi}, \qquad \mathbf{M}(\Delta_1 Z\overline{\Delta_2 Z})=0,$$

если $\Delta_1\cap\Delta_2=\emptyset$. Два последних соотношения вытекают из того, что подинтегральная функция $l_\Delta(t)$ есть преобразование Фурье от индикаторной функции интервала Δ

$$l_\Delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}I_\Delta(x)dx.$$

В силу свойств стохастического интеграла и равенства Парсеваля имеем соотношения

$$\mathbf{M}|\Delta Z|^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_\Delta(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|I_\Delta(x)|^2dx=\frac{|x_2-x_1|}{2\pi},$$

$$\mathbf{M}(\Delta_1 Z\overline{\Delta_2 Z})=\int\limits_{-\infty}^{\infty} l_{\Delta_1}(t)\overline{l_{\Delta_2}(t)}dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_{\Delta_1}(x)\overline{I_{\Delta_2}(x)}dx=0,$$

для непересекающихся интервалов Δ_1, Δ_2.

Формула (3.3.25) показывает, что приращения процесса $Z(x)$ не зависят от выбора x_0, сам процесс $Z(x)$ является процессом с ортогональными приращениями и определяет на $\mathcal{B}(R^1)$ ортогональную стохастическую меру с требуемыми свойствами (см. раздел ??). Далее для любой функции $\varphi(x) \in L_2(R^1, \mathcal{B}(R^1), dx)$ определен стохастический интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dZ(x) = \underset{x_0 \to -\infty}{l.i.m.} \int\limits_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dZ(x).$$

Покажем теперь справедливость равенства (3.3.24). Возьмем кусочно-постоянную функцию

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k I_{\Delta_k}(x),$$

где $\Delta_k = (x_k^{'}, x_k^{''}]$ - непересекающиеся интервалы конечной длины.

По определению стохастического интеграла по мере $Z(dx)$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) Z(dx) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k Z = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx_k^{''}} - e^{-itx_k^{'}}}{-it} dw(t) =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \frac{e^{-itx_k^{''}} - e^{-itx_k^{'}}}{-it} dw(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) dw(t),$$

где

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \frac{e^{-itx_k^{''}} - e^{-itx_k^{'}}}{-it} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-itx} dx.$$

Таким образом соотношение (3.3.24) доказано для простых функций. Поскольку множество простых функций плотно в L_2, то стандартная процедура предельного перехода позволяет распространить этот результат и на произвольные функции из L_2.

З а м е ч а н и е *Равенство (3.3.24) справедливо и в векторном случае. Если $w(t) \in R^n$ - векторный Винеровский процесс с независимыми компонентами, то ему можно поставить в соответствие векторную ортогональную стохастическую меру $Z(dx) \in R^n$ с некоррелированными компонентами, при этом равенство (3.3.24) выполняется по-компонентно.*

З а м е ч а н и е *Процесс $Z(x)$ и соответствующую меру $Z(dx)$ называют преобразованием Фурье Винеровского процесса.*

З а м е ч а н и е *Лемма 3.3.3 справедлива и для любого процесса с ортогональными приращениями $\eta(t)$. Соответствующий процесс $Z(x)$ называют преобразованием Фурье процесса с ортогональными приращениями.*

Применим данную лемму к анализу процессов на выходе системы, описываемой линейным стохастическим уравнением с постоянными коэффициентами

$$d\xi(t) = A\xi(t)dt + BdW(t).$$

Общее решение такого уравнения имеет вид

$$\xi(t) = \Phi(t,0)\xi(0) + \int\limits_{0}^{t} \Phi(t-s,0) BdW(s),$$

где $\Phi(t,0)$ - матрица фундаментальных решений одноодной системы. Предположим, что однородная система $\dot{X}(t) = AX(t)$ устойчива, то есть все корни характеристического уравнения $det(A-\lambda I) = 0$ имеют отрицательные действительные части. Тогда матрица фундаментальных решений удовлетворяет при $t \geq 0$ неравенству

$$\|\Phi(t,0)\| \leq Ce^{\lambda t}, \quad \lambda < 0, \tag{3.3.26}$$

и следовательно, интегрируема с квадратом. Применим Лемму 3.3.3 к слагаемому $\int\limits_0^t \Phi(t-s,0)BdW(s)$. В силу леммы существует ортогональная стохастическая мера $Z(dx)$ такая, что имеет место равенство

$$\int\limits_0^t \Phi(t-s,0)BdW(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(t-s,0)I\{s \leq t\}BdW(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_t(x)Z(dx).$$

Функция $\varphi_t(x)$ определяется обратным преобразованием Фурье, то есть

$$\varphi_t(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\Phi(t-s,0)I\{s \leq t\}Bdx = e^{itx}\int\limits_0^{\infty} e^{-i\tau x}\Phi(\tau,0)Bd\tau.$$

Таким образом

$$\int\limits_0^t \Phi(t-s,0)BdW(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi(x)Z(dx), \tag{3.3.27}$$

где

$$\varphi(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-i\tau x}\Phi(\tau,0)Bd\tau$$

есть *частотная характеристика устойчивой линейной системы* с постоянными коэффициентами.

З а м е ч а н и е *Представление (3.3.27) показывает, что процесс на выходе усточивой линейной системы является суммой затухающего переходного процесса $\Phi(t,0)\xi(0) \to 0$ и векторного стационарного процесса, спектральная плотность компонент которого, определяется элементами матричной функции $\varphi(x)$. Это представление объясняет в каком смысле следует понимать возможность формирования стационарного процесса с помощью стохастического уравнения. Стационарный процесс устанавливается на выходе системы, когда затухает собственный переходный процесс, вызванный ненулевым начальным условием в момент времени $t=0$. Скорость затухания переходного процесса можно оценить с использованием неравенства (3.3.26), где $\lambda = \max\limits_i Re(\lambda_i)$, а λ_i - корни характеристического уравнения.*

З а м е ч а н и е *Спектральная мера $Z(dx)$ имеет постоянную плотность и соответствует спектральной плотности формально введенного ранее процесса белого шума. В силу этого стационарный процесс, который устанавливается па выходе линейной системы, можно формально представить как результат прохождения процесса белого шума через линейную систему с частотной характеристикой $\varphi(x)$.*

П р и м е р 3.3.3 *[Построение стационарного процесса с заданной дробно-рациональной спектральной плотностью.]*

Пусть $\eta(t)$ - действительный стационарный процесс, допускающий спектральное представление

$$\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\frac{P_{n-1}(ix)}{Q_n(ix)}Z(dx), \tag{3.3.28}$$

где $Z(dx)$ - ортогональная стохастическая мера, удовлетворяющая условиям (3.3.23). В соответствии с соглашением ?? *процесс $\eta(t)$ есть результат прохождения белого шума через линейный фильтр с* *частотной характеристикой* $\varphi(x) = \dfrac{P_{n-1}(ix)}{Q_n(ix)}$, *где* $P_{n-1}(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, $Q_n(z) = z^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k z^k$. *При этом мы полагаем, что действительные части корней уравнения* $P(z) = 0$ *являются отрицательными, так как только в этом случае соответствующий фильтр будет физически реализуемым (см. Замечание .) Построим такой процесс как компоненту векторного марковского процесса, описываемого некоторым линейным стохастическим уравнением.*

Рассмотрим линейное стохастическое уравнение с матрицами

$$d\tilde{\eta}(t) = A\tilde{\eta}(t)dt + Bdw(t), \tag{3.3.29}$$

где $\tilde{\eta}(t) \in R^n$, $w(t) \in R^1$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & .. & .. & \dots\dots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ .. \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Найдем спектральное представление для процесса $\eta(t) = \tilde{\eta}_1(t)$ *- первой компоненты векторного процесса* $\tilde{\eta}(t)$ *и покажем, что при соответствущем выборе коэффициентов* β_k *этот процесс имеет заданную дробно-рациональную спектральную плотность. Стационарная составляющая процесса* $\tilde{\eta}(t)$ *в соответствии с (3.3.27) допускает представление*

$$\tilde{\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi(x)Z(dx),$$

где

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

вектор-функция частотных характеристик для каждой из компонент векторного процесса $\tilde{\eta}(t)$. *Система уравнений для компонент вектор-функции* $\tilde{\eta}(t)$ *имеет вид*

$$\begin{aligned} &\tilde{\eta}_1(t) - \tilde{\eta}_1(0) = \int\limits_0^t \tilde{\eta}_2(s)ds + \beta_1[w(t) - w(0)], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\tilde{\eta}_k(t) - \tilde{\eta}_k(0) = \int\limits_0^t \tilde{\eta}_{k+1}(s)ds + \beta_k[w(t) - w(0)], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\tilde{\eta}_n(t) - \tilde{\eta}_n(0) = \int\limits_0^t (-a_0\tilde{\eta}_1(s) - a_1\tilde{\eta}_2(s) - \ldots - a_{n-1}\tilde{\eta}_n(s))ds + \\ &\beta_n[w(t) - w(0)]. \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Поскольку $\tilde{\eta}_k(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_k Z(dx)$, *то подстановка этого представления в систему (3.3.30) позволяет вычислить и частотные характеристики* $\varphi_k(x)$, *не прибегая к процедуре прямого вычисления преобразования Фурье.*

Прежде всего заметим, что из формулы (3.3.24) следует спектральное представление Винеровского процесса

$$w(t) - w(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}-1}{ix} Z(dx), \tag{3.3.31}$$

поскольку

$$w(t) - w(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I\{s : 0 \le s \le t\} dw(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{0}^{t} e^{isx} ds \right\} Z(dx).$$

Далее нам потребуются спектральные представления процессов типа $\int\limits_0^t \tilde{\eta}_k(s)ds$. *Для вычисления такого представления мы воспользуемся теоремой Фубини для стохастических интегралов по ортогональной стохастической мере (доказательство полностью аналогично доказательству Леммы 3.3.2). Вычисление спектрального представления дает*

$$\begin{gathered} \int\limits_0^t \tilde{\eta}_k(s)ds = \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \varphi_k(x) Z(dx) \right\} ds = \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_0^t e^{isx} ds \right) \varphi_k(x) Z(dx) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}-1}{ix} \varphi_k(x) Z(dx). \end{gathered} \tag{3.3.32}$$

Изменение порядка интегрирования возможно, если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_k(x)|^2 dx < \infty.$$

В нашем случае это условие выполняется, поскольку $\varphi(x)$ *- есть преобразование Фурье функции* $\Phi(t, 0)$, *интегрируемой с квадратом. Наконец, используя соотношение*

$$\eta_k(t) - \eta_k(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [e^{itx} - 1] \varphi_k(x) Z(dx), \tag{3.3.33}$$

и подставляя соотношения (3.3.31)-(3.3.33) в систему (3.3.30), получаем систему уравнений

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\varphi_k(x) Z(dx) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}-1}{ix} \left[\varphi_k(x) + \beta_k\right] Z(dx), \quad k = 1, ..., n-1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\varphi_n(x) Z(dx) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}-1}{ix} \left[\sum_{k=0}^{n-1} -a_k \varphi_{k+1}(x) + \beta_n\right] Z(dx).$$

В силу того, что мера $Z(dx)$ *имеет равномерную спектральную плотность из данного соотношения следует равенство подинтегральных функции для почти всех* $x \in R^n$. *(Чтобы убедиться в этом достаточно вычислить среднее значение квадрата модуля разности левой и правой частей.) Таким образом мы получаем следующую систему уравнений для частотных характеристик* $\varphi_k(x), \quad k = 1, ..., n$,

$$\begin{aligned} &z\varphi_1(z) = \varphi_2(z) + \beta_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &z\varphi_k(z) = \varphi_{k+1}(z) + \beta_k, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &z\varphi_n(z) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_{k+1}(z) + \beta_n, \end{aligned}$$

где для удобства использованы обозначения $ix = z, \quad \varphi_k(x) = \varphi_k(z)$. *Из первых* $n-1$ *следуют соотношения*

$$\varphi_{k+1}(z) = z^k \varphi_1(z) - \sum_{l=1}^{k} z^{k-l}\beta_l, \quad k = 1, ..., n-1,$$

подстановка которых в $n-$*е уравнение дает*

$$\begin{gathered}\left[z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right]\varphi_1(z) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{l=1}^{k} z^{k-l}\beta_l + \sum_{l=1}^{n-1} z^{n-l}\beta_l + \beta_n = \\ \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{l=1}^{k} z^{k-l}\beta_l + \sum_{l=1}^{n} z^{n-l}\beta_l = \sum_{l=0}^{n-1} z^l \beta_{n-l} + \sum_{l=0}^{n-2} z^l \sum_{k=l+1}^{n-1} \beta_{k-l} a_k.\end{gathered} \tag{3.3.34}$$

Последнее соотношение получается с использованием изменения порядка суммирования, а именно,

$$\sum_{l=1}^{n} z^{n-l}\beta_l = \sum_{l=0}^{n-1} z^l \beta_{n-l}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{l=1}^{k} z^{k-l}\beta_l = \sum_{l=0}^{n-2} z^l \sum_{k=l+1}^{n-1} \beta_{k-l} a_k.$$

В правой части (3.3.34) мы получили выражение, которое есть полином степени не выше $n-1$. *Приравнивая коэффициенты этого полинома коэффициентам полинома* $P_{n-1}(z)$, *мы получаем следующую рекуррентую систему для вычисления параметров* β_k,

$$\begin{aligned}&\beta_1 = b_{n-1},\\ &\beta_2 = b_{n-2} - \beta_1 a_{n-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\beta_k = b_{n-k} - \sum_{k=l+1}^{n-1} \beta_{k-l} a_k, \quad k = 2, ..., n.\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

Таким образом, если необходимо реализовать формирующий фильтр для стационарного процесса с заданной дробно-рациональной спектральной плотностью, можно использовать уравнение (3.3.29) с матрицей A *и вектором* B, *компоненты которого определяются соотношениями (3.3.35).*

П р и м е р 3.3.4 *Рассмотрим задачу реализации формирующего фильтра для процесса, имеющего спектральную плотность*

$$\varphi(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2 + 4x^2}.$$

Приводим спектральную плотность к дробно-рациональному виду с учетом обозначения $ix = z$. *Имеем*

$$\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2+4x^2} = \left|\frac{ix+1}{1-x^2+2ix}\right|^2 = \left|\frac{z+1}{z^2+2z+1}\right|^2$$

и коэффициенты соответствующих полиномов

$$P_1(z) = 1 + z, \qquad Q_2(z) = z^2 + 2z + 1,$$

равны

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

Оба корня полинома $Q_2(z)$ *равны* -1, *поэтому фильтр является физичеки реализуемым. Используя соотношения (3.3.35) получаем,*

$$\beta_1 = b_1 = 1, \quad \beta_2 = b_0 - a_1\beta_1 = 1 - 1 \times 2 = -1.$$

Таким образом матрицы A и B равны

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

а соответствующая система уравнений для формирующего фильтра

$$d\tilde{\eta}_1(t) = \tilde{\eta}_2(t)dt + dw(t),$$

$$d\tilde{\eta}_2(t) = -\tilde{\eta}_1(t)dt - 2\tilde{\eta}_2(t) - dw(t).$$

В правильности подбора формирующего фильтра нетрудно убедиться непосредственной проверкой. Уравнение, которому удовлетворяет спектральная плотность

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix},$$

есть

$$ix\varphi(x) = A\varphi(x) + B,$$

сводиться к системе

$$ix\varphi_1(x) = \varphi_2(x) + 1,$$

$$ix\varphi_2(x) = -\varphi_1(x) - 2\varphi_2(x) - 1,$$

разрешая которую относительно $\varphi_1(x)$, получаем

$$\varphi_1(x) = \frac{1 + ix}{1 + 2ix - x^2}.$$

3.3.4 Моделирование линейных стохастических уравнений с помощью систем разностных уравнений

При построении моделей динамических систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, можно использовать разностные стохастические уравнения. Как и при моделировании детерминированных систем необходимо добиваться определенной степени похожести моделируемого и модельного процессов. Для стохастической системы степень похожести определяется степенью совпадения распределениий. Оказывается, что для системы, описываемой линейным стохастическим уравнением можно подобрать систему разностных уравнений, имеющую тоже самое распределение.

Пусть векторный случайный процесс $X(t) \in R^n, \quad t \in [0, T]$ описывается линейным стохастическим уравнением

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + B(t)dw(t),$$

где $A(t), B(t)$ - детерминированные матричные функции размера $n \times n$ и $n \times m$, соответственно, а $w(t) \in R^m$ - Винеровский процесс. Предположим, что в момент времени $t = 0$ задано начальное условие $X(0)$ с математическим ожиданием m_0 и матрицей ковариаций γ_0. Зафиксируем некоторую совокупность моментов времени $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_N = T$, и построим систему разностных уравнений для последовательности $X_k = X(t_k)$. Из формулы (3.3.12) следует

$$X(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1})X(t_{k-1}) + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, s)B(s)dw(s).$$

Примем обозначения

$$\tilde{A}(k) = \Phi(t_k, t_{k-1}), \quad \tilde{B}(k) = \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t_k, s)ds \right)^{1/2}$$

и введем последовательность независимых случайных векторов $\varepsilon_k \in R^m$ с независимыми компонентами и $\mathbf{M}\varepsilon_k = 0, \quad \mathbf{cov}(\varepsilon_k \varepsilon_k^*) = I_m$.

Рассмотрим последовательность $\tilde{X}_k$, определяемую системой разностных уравнений

$$\tilde{X}_k = \tilde{A}(k)\tilde{X}_{k-1} + \tilde{B}(k)\varepsilon_k, \tag{3.3.36}$$

$\tilde{X}_0 = X(0)$. Тогда для любых $l, k \geq 0$ выполняются соотношения

$$\mathbf{M}\tilde{X}_k = \mathbf{M}X_k = \mathbf{M}X(t_k), \quad \mathbf{cov}(\tilde{X}_k \tilde{X}_l^*) = \mathbf{cov}(X(t_k)X^*(t_l)), \tag{3.3.37}$$

а если случайные векторы X_0, ε_k, - гауссовские, то совместные распределения векторов $\tilde{X}_k, \quad k = 0, 1, ...$ и $X(t_k), \quad k = 0, 1, ...$ совпадают.

Покажем, что соотношения (3.3.37) выполняются. Из формулы (3.3.12) следует, что

$$\mathbf{M}X(t_k) = \Phi(t_k, 0)\mathbf{M}X(0),$$

$$\mathbf{cov}(X(t_k), X^*(t_l)) = \int\limits_0^{t_k \wedge t_l} \Phi(t_k \wedge t_l, s)B(s)B^*(s)\Phi(t_k \wedge t_l, s)ds.$$

Для решения уравнения (3.3.36) справедливо соотношение

$$\tilde{X}(k) = \prod_{l=1}^{k} \tilde{A}(l)X(0) + \sum_{l=1}^{k} \prod_{j=l+1}^{k} \tilde{A}(j)\tilde{B}(l)\varepsilon(l),$$

где для определенности полагаем

$$\prod_{j=k}^{k} \tilde{A}(j) = I_n,$$

откуда в силу свойств последовательности $\{\varepsilon(k)\}$ и матричной функции $\Phi(t, s)$ имеем

$$\mathbf{M}\tilde{X}(k) = \prod_{l=1}^{k} \tilde{A}(l)\mathbf{M}X(0) =$$

$$\prod_{l=1}^{k} \Phi(t_l, t_{l-1})\mathbf{M}X(0) = \Phi(t_k, 0)\mathbf{M}X(0) = \mathbf{M}X(t_k).$$

Для ковариации векторов $\tilde{X}(k)$ с учетом независимости случайных векторов $\varepsilon(l)$ имеем соотношение

$$\mathbf{cov}(\tilde{X}_k, \tilde{X}_l) = \sum_{m}^{k \wedge l} \left(\prod_{j=m+1}^{k \wedge l} \tilde{A}(j) \right) \tilde{B}(m)\tilde{B}^*(m) \left(\prod_{j=m+1}^{k \wedge l} \tilde{A}(j) \right)^* .$$

Далее с использованием равенств

$$\prod_{j=m+1}^{k \wedge l} \tilde{A}(m) = \Phi(t_k \wedge t_l, t_m),$$

$$\tilde{B}(m)\tilde{B}^*(m) = \int\limits_{t_{m-1}}^{t_m} \Phi(t_m, s)B(s)B^*(s)\Phi(t_m, s)ds$$

получаем

$$\mathbf{cov}(\tilde{X}_k,\tilde{X}_l) =$$

$$\sum_{m=1}^{k\wedge l}\Phi(t_k\wedge t_l,t_m)\left(\int\limits_{t_{m-1}}^{t_m}\Phi(t_m,s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t_m,s)ds\right)\Phi^*(t_k\wedge t_l,t_m) =$$

$$\sum_{m=1}^{k\wedge l}\int\limits_{t_{m-1}}^{t_m}\Phi(t_k\wedge t_l,s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t_k\wedge t_l,s)ds =$$

$$\int\limits_0^{t_k\wedge t_l}\Phi(t_k\wedge t_l,s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t_k\wedge t_l,s)ds = \mathbf{cov}(X(t_k),X^*(t_l)).$$

З а м е ч а н и е *В гауссовском случае из совпадения двух первых моментных характеристик следует и совпадение любых конечномерных распределений векторов* $\{X(t_k), k=0,1,2,...\}$ *и* $\{\tilde{X}(k), k=0,1,2,...\}$.

Если матричные функции $A(t)$ и $B(t)$ не зависят от времени, а моменты времени $t_k = k\Delta$, $k=0,1,2,...$, то матрицы $\tilde{A}(k)$, $\tilde{B}(k)$ - постоянны и удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{A}(k) = \Phi(\Delta,0) = exp\{A\Delta\} = I_n + A\Delta + \frac{A^2\Delta^2}{2} + \ldots.$$

$$\tilde{B}(k)\tilde{B}^*(k) = \int\limits_0^{\Delta}\Phi(\Delta-s,0)BB^*\Phi^*(\Delta-s,0)ds =$$

$$BB^*\Delta + [ABB^* + BB^*A^*]\,\frac{\Delta^2}{2} + \ldots.$$

В этом случае мы приходим к традиционному методу моделирования линейного стохастического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при помощи разностного уравнения вида

$$\tilde{X}(k) = (I_n + A\Delta)\tilde{X}(k-1) + \tilde{B}(\Delta)\varepsilon(k).$$

Выбор матрицы $\tilde{B}$ определяется требуемой точностью метода моделирования, если $\tilde{B} = B\sqrt{\Delta}$, то точность совпадения моментных характеристик есть $o(\Delta)$. Если необходима более высокая точность, то необходимо использовать более точные разложения для матриц $\tilde{A}(\Delta)$, $\tilde{B}(\Delta)$.

3.3.5 Оценивание случайных процессов. Фильтр Калмана-Бьюси

В разделе ?? приведено решение задачи оценивания случайных последовательностей, описываемых линейными разностными уравнениями. В гауссовском случае эта задача имеет явное решение в форме дискретного фильтра Калмана. Оказывается, что этот результат можно распространить и на случай непрерывных случайных процессов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями Ито.

Задача фильтрации.

Рассмотрим пару случайных процессов $\{x(t)\in R^n, y(t)\in R^m,\ t\in[0,T]\}$, описываемых системой линейных дифференциальных стохастических уравнений

$$\begin{aligned} dx(t) &= A(t)x(t)dt + B(t)dw^1(t),\\ dy(t) &= a(t)x(t)dt + b(t)dw^2(t), \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

с начальными условиями $x(0) \in R^n$, $y(0) = 0$. В уравнениях (3.3.38) w^1, w^2 - Винеровские процессы, размерности k_1, k_2 - соответственно, $x(0)$ - гауссовский случайный вектор с параметрами

$$\mathbf{M}x(0) = m_0, \quad \mathbf{cov}(x(0), x^*(0)) = \gamma_0,$$

случайные процессы w^1, w^2 и случайный вектор $x(0)$ независимы. В задаче фильтрации (оценивания) мы полагаем, что процесс $x(t)$ не наблюдаем, а наблюдать можно лишь процесс $y(t)$, который несет неполную информацию о процессе x. Задача фильтрации состоит в определении оптимальной оценки процесса $x(t)$ по наблюдениям значений процесса $y(s)$ с начального момента времени $s = 0$ до текущего момента времени $s = t$. Наилучшей в среднеквадратическом смысле оценкой является условное математическое ожидание, а именно:

$$m(t) = \mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_t^y\},$$

где

$$\mathcal{F}_t^y = \sigma\{y(s) : 0 \leq s \leq t\},$$

есть $\sigma-$ алгебра, порожденная значениями процесса $y(s)$ до текущего момента времени. Замечательный результат Калмана и Бьюси состоит в выводе уравнений, описывающих эволюцию условного математического ожидания $m(t)$.

Т е о р е м а 3.3.7 *[Калман - Бьюси] Пусть в уравнениях (3.3.38) матричные функции $A(t), B(t), a(t), b(t)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\int_0^T \|A(t)\|dt < \infty, \quad \int_0^T (\|B(t)B^*(t)\| + \|b(t)b^*(t)\|)\, dt < \infty,$$

$$\int_0^T a_{ij}^2(t)dt < \infty, \quad i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n,$$

матричные функции $b(t)b^*(t)$, $t \in [0, T]$ - равномерно невырождены, то есть существует константа $c > 0$ такая, что для любого $t \in [0, T]$ и вектора $u \in R^m$ имеет место неравенство

$$u^* b(t)b^*(t)u \geq c\|u\|^2. \tag{3.3.39}$$

Тогда условное математическое ожидание $m(t) = \mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_t^y\}$ - есть единственное решение системы стохастичсеких дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dm(t) &= A(t)m(t)dt + \gamma(t)a^*(t)\left(b(t)b^*(t)\right)^{-1}[dy(t) - a(t)m(t)dt] \\ \dot{\gamma}(t) &= A(t)\gamma(t) + \gamma(t)A^*(t) + B(t)B^*(t) - \gamma(t)a^*(t)\left(b(t)b^*(t)\right)^{-1} a(t)\gamma(t), \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

с начальными условиями

$$m(0) = m_0, \qquad \gamma(0) = \gamma_0.$$

Детерминированная матричная функция $\gamma(t)$ в уравнениях (3.3.40) равна

$$\gamma(t) = \mathbf{cov}\{x(t) - m(t), (x(t) - m(t))^*\} = \mathbf{M}\{(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^*\}, \tag{3.3.41}$$

а процесс

$$\xi(t) = \int_0^t \left(b(s)b^*(s)\right)^{-1/2}[dy(s) - a(s)m(s)ds]$$

есть Винеровский по отношению к потоку σ - алгебр $\mathcal{F}_t^y$, $t \in [0, T]$.

З а м е ч а н и е *Процесс $\xi(t)$ называется* обновляющим *для процесса наблюдений $y(t)$. Возможность представления условного математического ожидания в форме стохастического интеграла по обновляющему процессу есть весьма глубокий факт теории мартингалов. Обновляющий процесс возникает в задачах предсказания стационарных процессов и последовательностей, и в задаче дискретной фильтрации. Его важность определяется тем, что он, являясь стандартным процессом Броуновского движения порождает то же самое пространство, что и процесс наблюдений $y(t)$. В задачах оценивания последовательностей обновляющая последовательность есть последовательность белого шума, которая также порождает то же самое пространство, что и наблюдаемый процесс.*

Доказательству основной теоремы предшествует ряд вспомогательных утверждений. Вначале мы покажем, что в гауссовском случае условное математическое ожидание является линейным функционалом от наблюдаемого процесса и может быть представлено в форме стохастического интеграла по процессу наблюдений.

Л е м м а 3.3.4 *В условиях теоремы для каждого $t \in [0, T]$ существует матричная функция $G(t, s)$, $s \in [0, t]$, размера $n \times m$ такая, что*

$$\int_0^t G(t,s)G^*(t,s)ds < \infty, \quad \int_0^t G(t,s)b(s)b^*(s)G^*(t,s)ds < \infty,$$

$$\int_0^t \int_0^t G(t,u)a(u)\mathbf{M}(x(u)x^*(v))a^*(v)G^*(t,v)dudv < \infty,$$

и процесс условного математического ожидания допускает представление

$$\mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_t^y\} = Mx(t) + \int_0^t G(t,s)dy(s). \tag{3.3.42}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о Пусть $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_{2^n}^{(n)} = t$ - двоично-рациональное разбиение отрезка $[0, t], t_k^n = \frac{k}{2^n}t$. Обозначим

$$\mathcal{F}_{t,n}^y = \sigma\left\{y(t_0^n), ..., y(t_{2^n}^n)\right\} = \sigma\left\{y(t_0^n), y(t_1^n) - y(t_0^n), ..., y(t_{2^n}^n) - y(t_{2^n-1})\right\},$$

σ - алгебру, порожденную значениями наблюдаемого процесса в точках двоично-рационального разбиения. Процесс наблюдений непрерывен, поэтому $\mathcal{F}_{t,n}^y \uparrow \mathcal{F}_t^y$ и по Теореме 5.3.2

$$\mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_{t,n}^y\} \to \mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_t^y\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}). \tag{3.3.43}$$

Семейство компонент случайных векторов $(\mathbf{M}\{x^i(t)|\mathcal{F}_{t,n}^y\})^2$ равномерно интегрируемо, поскольку для любого $k \geq 1$ в силу неравенства Йенсена и гауссовости вектора $x(t)$

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}\{x^i(t)|\mathcal{F}_{t,n}^y\})^{2k} \leq \mathbf{M}(\mathbf{M}\{(x^i(t))^{2k}|\mathcal{F}_{t,n}^y\}) \leq \mathbf{M}(x^i(t))^{2k} < \infty,$$

откуда равномерная интегрируемость следует по критерию Валле-Пуссена. Таким образом последовательность случайных векторов в соотношении (3.3.43) сходится и в среднем квадратическом, что означает выполнение соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_{t,n}^y\} - \mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_t^y\}\right)\left(\mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_{t,n}^y\} - \mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_t^y\}\right)^* = 0. \tag{3.3.44}$$

Семейство случайных векторов $\{x(t), y(t_{k+1}^{(n)}) - y(t_k^{(n)}), k = 0, 1, ..., 2^n\}$ имеет совместное гауссовское распределение, поэтому по Теореме о нормальной корреляции (5.4.4),(5.4.5) для каждого $n = 1, 2, ..$

$$\mathbf{M}(x(t)|\mathcal{F}_{t,n}^y) = \mathbf{M}x(t) + \sum_{k=0}^{2^n-1} G_n(t, t_k^{(n)})\left(y(t_{k+1}^{(n)} - y(t_k^{(n)})\right) \tag{3.3.45}$$

с некоторой неслучайной функцией $G_n(t, t_k^{(n)}), k = 0, ..., 2^n - 1$. Определим функцию

$$G_n(t,s) = G_n(t, t_k^{(n)}), \quad \text{при} \quad t_k^{(n)} \le s < t_{k+1}^{(n)},$$

тогда соотношение (3.3.45) можно записать в форме стохастического интеграла

$$\mathbf{M}(x(t)|\mathcal{F}_{t,n}^y) = \mathbf{M}x(t) + \int\limits_0^t G_n(t,s)dy(s). \tag{3.3.46}$$

Покажем, что последовательность функций $G_n(t,s)$ сходится к функции $G(t,s)$ в представлении (3.3.42). Для этого вычислим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}\left(\mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_{t,n}^y\} - \mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_{t,m}^y\}\right)\left(\mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_{t,n}^y\} - \mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_t^{y,m}\}\right)^* = \\
&\mathbf{M}\left(\int\limits_0^t [G_n(t,s) - G_m(t,s)]dy(s)\right)\left(\int\limits_0^t [G_n(t,s) - G_m(t,s)]dy(s)\right)^* = \\
&\mathbf{M}\left(\int\limits_0^t [G_n(t,s) - G_m(t,s)]a(s)x(s)ds\right)\left(\int\limits_0^t [G_n(t,s) - G_m(t,s)]a(s)x(s)ds\right)^* + \\
&\mathbf{M}\left(\int\limits_0^t [G_n(t,s) - G_m(t,s)]b(s)dw^2(s)\right)\left(\int\limits_0^t [G_n(t,s) - G_m(t,s)]b(s)dw^2(s)\right)^* = \\
&\int\limits_0^t\int\limits_0^t [G_n(t,u) - G_m(t,u)]a(u)\mathbf{M}(x(u)x^*(v))a^*(u)[G_n(t,u) - G_m(t,u)]^* dudv + \\
&\int\limits_0^t [G_n(t,s) - G_m(t,s)]b(s)b^*(s)[G_n(t,s) - G_m(t,s)]^* ds.
\end{aligned} \tag{3.3.47}$$

Поскольку левая часть (3.3.47) стремится к нулю при $n, m \to \infty$, то к нулю стремятся и неотрицательно определенные интегралы в правой части

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\limits_0^t\int\limits_0^t [G_n(t,u) - G_m(t,u)]a(u)\mathbf{M}(x(u)x^*(v))a^*(u)[G_n(t,u) - G_m(t,u)]^* dudv = 0,$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\limits_0^t [G_n(t,s) - G_m(t,s)]b(s)b^*(s)[G_n(t,s) - G_m(t,s)]^* ds = 0.$$

Из последнего равенства и равномерной невырожденности матриц $(b(t)b^*(t))$ (см. неравенство (3.3.39)) следует соотношение

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\limits_0^t [G_n(t,s) - G_m(t,s)][G_n(t,s) - G_m(t,s)]^* ds = 0,$$

которое означает, что последовательность функций $G_n(t,s)$ фундаментальна в $L_2([0,T])$, и следовательно, существует

$$\underset{n}{l.i.m.}\, G_n(t,s) = G(t,s) \in L_2([0,T]).$$

Поскольку $\mathbf{M}(x(u)x^*(v))$ равномерно ограничено при $(u,v)\in[0,T]\times[0,T]$, то

$$\mathbf{M}\left(\int_0^t [G_n(t,s)-G(t,s)]a(s)x(s)ds\right)\left(\int_0^t [G_n(t,s)-G(t,s)]a(s)x(s)ds\right)^* \to 0,$$

аналогично

$$\mathbf{M}\left(\int_0^t [G_n(t,s)-G(t,s)]b(s)dw^2(s)\right)\left(\int_0^t [G_n(t,s)-G(t,s)]b(s)dw^2(s)\right)^* \to 0,$$

следовательно,

$$\lim_n \int_0^t G_n(t,s)dy(s) = \int_0^t G(t,s)dy(s),$$

что вместе с (3.3.43) и (3.3.46) завершает доказательство. ■

Л е м м а 3.3.5 *В условиях теоремы процесс* $\xi(t)$

$$\xi(t) = \int_0^t (b(s)b^*(s))^{-1/2}\left[dy(s)-a(s)m(s)ds\right], \tag{3.3.48}$$

где $m(t)=\mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_t^y\}$, *есть Винеровский по отношению к потоку* σ *- алгебр* $\mathcal{F}_t^y$, $t\in[0,T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о Покажем, что $\xi(t)$ есть непрерывный квадратично - интегрируемый мартингал относительно потока σ - алгебр $\mathcal{F}_t^y$. Процесс $x(t)$ является непрерывным и интегрируемым в среднем квадратическом смысле, это следует из возможности представления $x(t)$ по Теореме 3.3.6 и вытекающей из нее непрерывности и ограниченности математического ожидания и ковариационной функции $x(t)$. Следовательно, условное математическое ожидание для $x(t)$ существует и интегрируемо в среднем квадратическом. Более того по теореме Фубини

$$\int_0^t a(s)m(s)ds = \int_0^t a(s)\mathbf{M}(x(s)|\mathcal{F}_s^y)ds = \mathbf{M}\left\{\int_0^t a(s)x(s)ds\,|\mathcal{F}_s^y\right\},$$

и следовательно, существует в силу интегрируемости процесса $x(t)$. Таким образом из представления (3.3.48) следует непрерывность процесса $\xi(t)$.

Покажем, что $\xi(t)$ - мартингал относительно $\mathcal{F}_t^y$. Вычислим

$$\mathbf{M}\left\{\xi(t)-\xi(u)|\mathcal{F}_u^y\right\} = \mathbf{M}\left[\int_u^t (b(s)b^*(s))^{-1/2}(dy(s)-a(s)m(s)ds)\,|\mathcal{F}_u^y\right] =$$

$$\mathbf{M}\left[\int_u^t (b(s)b^*(s))^{-1/2}(a(s)(x(s)-m(s))ds\,|\mathcal{F}_u^y\right] + \mathbf{M}\left[\int_u^t (b(s)b^*(s))^{-1/2}b(s)dw^2(s)\,|\mathcal{F}_u^y\right].$$

Применяя теорему Фубини и используя свойства условного математического ожидания с учетом включения $\mathcal{F}_u^y \subseteq \mathcal{F}_u^y$, получаем для первого интеграла

$$\mathbf{M}\left[\int_u^t (b(s)b^*(s))^{-1/2}(a(s)(x(s)-m(s))ds\,|\mathcal{F}_u^y\right] =$$

$$\int_u^t (b(s)b^*(s))^{-1/2}a(s)\mathbf{M}\left[x(s)-m(s)|\mathcal{F}_u^y\right]ds =$$

$$\int_u^t (b(s)b^*(s))^{-1/2}a(s)\mathbf{M}\left[\mathbf{M}(x(s)-m(s)|\mathcal{F}_s^y)|\mathcal{F}_u^y\right]ds = 0.$$

Второй интеграл равен нулю в силу свойств стохастического интеграла по Винеровскому процессу.

Далее вычислим произведение $\xi(t)\xi^*(t)$. По формуле Ито

$$\xi(t)\xi^*(t) = \int_0^t \xi(t)d\xi^*(t) + \int_0^t d\xi(t)\xi^*(t) + \int_0^t (b(s)b^*(s))^{-1/2}(b(s)b^*(s))(b(s)b^*(s))^{-1/2}ds =$$

$$\int_0^t \xi(t)d\xi^*(t) + \int_0^t d\xi(t)\xi^*(t) + \int_0^t I_m ds$$

Покажем, что первые два члена в данном соотношении являются мартингалами относительно $\mathcal{F}_t^y$. Действительно, используя теорему Фубини и свойства условного математического ожидания, получаем

$$\mathbf{M}\left[\int_0^t \xi(s)d\xi^*(s)\,|\mathcal{F}_u^y\right] = \mathbf{M}\left[\int_0^t \xi(s)(x(s)-m(s))^*a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1/2}ds\,|\mathcal{F}_u^y\right] +$$

$$\mathbf{M}\left[\int_0^t \xi(s)(b(s)b^*(s))^{-1/2}d(w^2(s))^*\,|\mathcal{F}_u^y\right] =$$

$$\int_0^t \mathbf{M}\left[\xi(s)\mathbf{M}(x(s)-m(s)^*|\mathcal{F}_s^y)|\mathcal{F}_u^y\right]a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1/2}ds = 0.$$

Аналогично устанавливается мартингальное свойство и для второго слагаемого. Таким образом

$$\mathbf{M}\left[\xi(t)\xi^*(t)-\xi(u)\xi^*(u)\,|\mathcal{F}_u^y\right] = I_m|t-u|,$$

и по Теореме Леви 4.1.20 процесс $\xi(t)$ - есть стандартное Броуновское движение относительно $\mathcal{F}_t^y$. ■

Следующий результат показывает, что обновляющий процесс действительно порождает то же самое пространство, что и процесс наблюдений $y(t)$.

Л е м м а 3.3.6 *В условиях теоремы имеет место равенство*

$$\mathcal{F}_t^y = \mathcal{F}_t^\xi. \tag{3.3.49}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о Включение $\mathcal{F}_t^\xi \subseteq \mathcal{F}_t^y$ очевидно, поэтому необходимо установить обратное включение. Для доказательства этого мы покажем, что значение процесса $y(t)$ для любого $t \in [0,T]$

можно представить в виде стохастического интеграла по обновляющему процессу $\xi(t)$ от некоторой неслучайной функции. При некоторой произвольной неслучайной вектор-функции $F(t)$ рассмотрим

$$\int_0^t F^*(u)d\xi(u) = \int_0^t F^*(u)(b(u)b^*(u))^{-1/2}[dy(u) - a(u)m(u)du].$$

По Лемме 3.3.4

$$m(u) = \int_0^u G(u,s)dy(s),$$

для упрощения выкладок мы полагаем, что $\mathbf{M}x(t) = 0$. Тогда используя теорему Фубини для стохастических интегралов 3.3.2 получаем

$$\int_0^t F^*(u)d\xi(u) = \int_0^t F^*(u)(b(u)b^*(u))^{-1/2}[dy(u) - a(u)\int_0^u G(u,s)dy(s)du] =$$

$$\int_0^t \left[F^*(u)(b(u)b^*(u))^{-1/2} - \int_u^t F^*(b(s)b^*(s))^{-1/2}a(s)G(s,u)ds \right] dy(u).$$

Предположим, что можно выбрать функцию F таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$F^*(u)(b(u)b^*(u))^{-1/2} - \int_u^t F^*(b(s)b^*(s))^{-1/2}a(s)G(s,u)ds = e^k = (0,...,0,1,0,...0), \tag{3.3.50}$$

с единицей на k - ом месте. Тогда

$$\int_0^t F^*(u)d\xi(u) = \int_0^t e^k dy(u) = y^k(t),$$

и следовательно, случайная величина $y^k(t)$ - $\mathcal{F}_t^\xi$ - измерима.

Равенство (3.3.50) можно представить как уравнение относительно вектор-функции F

$$F(u) = (b(u)b^*(u))_k^{1/2} + \int_u^t (b(u)b^*(u))^{1/2}G(s,u)a(s)(b(s)b^*(s))^{-1/2}F(s)ds,$$

где $(b(u)b^*(u))_k^{1/2}$ - k - ый столбец матрицы. Это уравнение относится к классу интегральных уравнений Волтерра (второго рода) относительно f вида

$$f(u) = \varphi(u) + \int_0^u K(u,s)f(s)ds,$$

которые имеют единственное интегрируемое с квадратом решение на $[0,T]$, если

$$\varphi \in L_2([0,T]), \quad \int_0^T\int_0^T K(u,s)K^*(t,s)dsdu < \infty.$$

В условиях теоермы в силу невырожденности матричной функции $b(t)b^*(t)$, интегируемости с квадратом $G(t,s)$ и непрерывности $a(t)$ условия существования и единственности решения выполнены и само исходное уравнение с помощью замены переменной $v = t - u$ приводится к каноническому виду. Тем самым доказана возможность выбора соотвествующей функции F, а вместе с этим и утверждение леммы. ■

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы.

Доказательство В силу Лемм 3.3.4 и 3.3.6 условное математическое ожидание представимо в виде стохастического интеграла по обновляющему процессу

$$\mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_t^y\} = \mathbf{M}x(t) + \int\limits_0^t F(t,s)d\xi(t).$$

Таким образом необходимо найти выражение для функции $F(t,s)$. Далее для упрощения выкладок мы полагаем $\mathbf{M}x(t) = 0$, это предположение, однако, не ограничивает общности, поскольку $\mathbf{M}x(t) = \Phi(t,0)m_0$ (здесь и далее $\Phi(t,s)$ - матрица фундаментального решения линейной системы $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ см. Лемму 3.3.1) и в силу линейности для получения результата в общем случае достаточно добавить это выражение к полученному при $m_0 = 0$.

Условное математическое ожидание удовлетворяет следующему соотношению, имеющему смысл *условия ортогональности*

$$\mathbf{M}\{(x(t) - m(t))\varphi^*(t)\} = 0,$$

где $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(t,s)d\xi(t)$ с произвольной функцией $f(t,s)$. Условие ортогональности переписывается в виде

$$\mathbf{M}x(t)\left[\int\limits_0^t f(t,s)d\xi(s)\right]^* = \int\limits_0^t F(t,s)f^*(t,s)ds. \tag{3.3.51}$$

Вычислим левую часть (3.3.51) используя представление для обновляющего процесса.

$$\mathbf{M}x(t)\left[\int\limits_0^t f(t,s)d\xi(s)\right]^* = \mathbf{M}x(t)\left[\int\limits_0^t f(t,s)(b(s)b^*(s))^{-1/2}b(s)dw^2(s)\right]^* +$$

$$\mathbf{M}x(t)\left[\int\limits_0^t f(t,s)(b(s)b^*(s))^{-1/2}a(s)(x(s)-m(s))ds\right]^* =$$

$$\int\limits_0^t \mathbf{M}[x(t)(x(s)-m(s))^*]a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1/2}f^*(t,s)ds.$$

Далее

$$\mathbf{M}[x(t)(x(s)-m(s))^*] = \mathbf{M}[\mathbf{M}(x(t)|\mathcal{F}_s)(x(s)-m(s))^*] = \mathbf{M}[\Phi(t,s)x(s)(x(s)-m(s))^*] =$$

$$\Phi(t,s)\mathbf{M}[(x(s)-m(s)(x(s)-m(s))^*] + \Phi(t,s)\mathbf{M}[m(s)(x(s)-m(s))^*] = \Phi(t,s)\mathbf{cov}(x(s)-m(s)),$$

поскольку,

$$\mathbf{M}[m(s)(x(s)-m(s))^*] = \mathbf{M}[m(s)\mathbf{M}(x(s)-m(s)|F_s^y)^*].$$

Обозначим $\mathbf{cov}(x(s)-m(s)) = \gamma(s)$ и подставим полученные выражения в (3.3.51), это приводит нас к следующему соотношению

$$\int\limits_0^t F(t,s)f^*(t,s)ds = \int\limits_0^t \Phi(t,s)\gamma(s)a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1/2}f^*(t,s)ds,$$

выполняющемуся при любой функции $f(t,s)$. В силу произвольности f отсюда следует, что

$$F(t,s) = \Phi(t,s)\gamma(s)a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1/2},$$

и соотношение для условного математического ожидания имеет вид

$$m(t) = \mathbf{M}x(t) + \int\limits_0^t F(t,s)s\xi(s) = \Phi(t,0)m_0 + \int\limits_0^t \Phi(t,s)\gamma(s)a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1/2}d\xi(s).$$

По Теореме 3.3.6 процесс $m(t)$ есть решение линейного стохастического уравнения (3.3.40) с процессом Броуновского движения $\xi(t)$. Для завершения доказательства осталось вывести уравнение для матричной функции $\gamma(t)$. Применяя формулу Ито к процессу $Z(t) = (x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^*$ с учетом стохастического уравнения, которому удовлетворяет разность $x(t) - m(t)$, а именно:

$$d(x(t) - m(t)) = [A(t) - \gamma(t)a^*(t)(b(t)b^*(t))^{-1}](x(t) - m(t))dt + B(t)dw^1(t) +$$

$$\gamma(t)a^*(t)(b(t)b^*(t))^{-1}dw^2(t),$$

получаем

$$Z(t) = Z(0) +$$

$$\int\limits_0^t [A(s) - \gamma(s)a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1}]Z(s)ds + \int\limits_0^t Z(s)[A(s) - \gamma(s)a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1}]^*ds +$$

$$\int\limits_0^t B(s)B^*(s)ds + \int\limits_0^t \gamma(s)a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1}a(s)\gamma(s)ds +$$

$$\int\limits_0^t (x(s) - m(s))[B(s)dw^1(s) + \gamma(s)a^*(s)(b(s)b^*(s)b(s)dw^2(s)]^* +$$

$$\int\limits_0^t [B(s)dw^1(s) + \gamma(s)a^*(s)(b(s)b^*(s)b(s)dw^2(s)](x(s) - m(s))^*.$$

Производя усреднение с учетом соотношений $\mathbf{M}Z(t) = \gamma(t), \mathbf{M}Z(0) = \gamma_0$ и равенства нулю матожиданий от стохастических интегралов получаем

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \int\limits_0^t [A(s)\gamma(s) + \gamma(s)A^*(s) + B(s)B^*(s) - \gamma(s)a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1}a(s)\gamma(s)]ds, \qquad (3.3.52)$$

откуда следует, что матричная функция $\gamma(t)$ действительно удовлетворяет уравнению (3.3.40).

Таким образом показано, что пара $(m(t), \gamma(t))$ действительно является решением системы стохастических дифференциальных уравнений (3.3.40). Для завершения доказательства осталось убедиться в единственности этого решения.

Уравнение, которому удовлетворяет матричная функция $\gamma(t)$ называется *матричным уравнением Риккати* и имеет единственное неотрицательно определенное решение. Действительно, как следует из (3.3.52) любое неотрицательно определенное решение этого уравнения удовлетворяет неравенству

$$\gamma(t) \leq \Phi(t,0)\gamma_0\Phi^*(t,0) + \int\limits_0^t \Phi(t,s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t,s)ds, \qquad (3.3.53)$$

и следовательно, равномерно ограничено. В силу этого правая часть системы стохастических дифференциальных уравнений 3.3.40) удовлетворяет условию Липшица, и по Теореме 3.3.1 эта система имеет единственное решение. ■

Рассмотрим некоторые примеры использования полученного результата.

П р и м е р 3.3.5 [Задача оценивания параметра]. Пусть требуется оценить гауссовскую случайную величину $\theta \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ по наблюдениям случайного процесса $y(t)$, удовлетворяющего стохастическому уравнению

$$dy(t) = \theta dt + \sigma_1 dw(t), \quad y(0) = 0.$$

Если положить переменную $x(t) = \theta$, то пара переменных $\{x(t), y(t)\}$ удовлетворяет линейной системе стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx(t) &= 0, \\ dy(t) &= x(t)dt + \sigma_1 dw(t) \end{aligned} \tag{3.3.54}$$

и наилучшая в среднеквадратическом смысле оценка θ есть $\mathbf{M}\{\theta|\mathcal{F}_t\} = \mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_t\} = m(t)$. Применяя Теорему 3.3.7, и формулы (3.3.40) с параметрами

$$A(t) = 0, \quad B(t) = 0, \quad a(t) = 1, \quad b(t) = \sigma_1$$

получаем, что $\{m(t), \gamma(t)\}$, где $\gamma(t) = \mathbf{M}(\theta - m(t))^2$ удовлетворяют системе стохастических уравнений

$$\begin{aligned} dm(t) &= \frac{\gamma(t)}{\sigma^2}[dy(t) - m(t)dt], \\ \dot{\gamma}(t) &= -\frac{\gamma^2(t)}{\sigma^2}, \end{aligned}$$

с начальными условиями $m(0) = m_0, \gamma(0) = \sigma_0^2$. Уравнение для переменной $\gamma(t)$ имеет явное решение, которое нетрудно найти, если рассмотреть переменную $g(t) = \gamma^{-1}(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\dot{g}(t) = \sigma_1^{-2},$$

откуда

$$\gamma^{-1}(t) = g(t) = \sigma_0^{-2} + \sigma_1^{-2}t.$$

Следовательно,

$$\gamma(t) = \frac{\sigma_0^2\sigma_1^2}{t\sigma_0^2 + \sigma_1^2}.$$

Можно вывести и явное выражение для $m(t)$, которое удовлетворяет линейному стохастическому уравнению

$$dm(t) = \frac{\sigma_0^2}{t\sigma_0^2 + \sigma_1^2}[dy(t) - m(t)dt],$$

решение которого имеет вид

$$m(t) = \Phi(t, 0)m_0 + \int_0^t \Phi(t, s)\frac{\sigma_0^2}{s\sigma_0^2 + \sigma_1^2}dy(s),$$

где

$$\Phi(t, s) = exp\left\{-\int_s^t \frac{\sigma_0^2}{u\sigma_0^2 + \sigma_1^2}du\right\}.$$

Заметим, что

$$\frac{d}{ds}\Phi(t, s)\frac{\sigma_0^2\sigma_1^2}{s\sigma_0^2 + \sigma_1^2} = \frac{d}{ds}\Phi(t, s)\gamma(s) = 0,$$

поэтому

$$\Phi(t, s)\frac{\sigma_0^2}{s\sigma_0^2 + \sigma_1^2} = \Phi(t, t)\frac{\sigma_0^2}{t\sigma_0^2 + \sigma_1^2} = \frac{\sigma_0^2}{t\sigma_0^2 + \sigma_1^2}.$$

Подставляя это соотношение в представление для $m(t)$, получаем

$$\Phi(t,0)m_0 = \frac{\Phi(t,0)\gamma(0)}{\sigma_0^2}m_0 = \frac{\gamma(t)m_0}{\sigma_0^2},$$

$$\int\limits_0^t \Phi(t,s)\frac{\sigma_0^2}{s\sigma_0^2+\sigma_1^2}dy(s) = \int\limits_0^t \frac{\gamma(t)}{\sigma_1^2}dy(s) = \frac{\gamma(t)}{\sigma_1^2}y(t),$$

и окончательно,

$$m(t) = \gamma(t)\left[\frac{m_0}{\sigma_0^2} + \frac{y(t)}{\sigma_1^2}\right] = \frac{m_0\sigma_1^2 + y(t)\sigma_0^2}{t\sigma_0^2+\sigma_1^2}.$$

П р и м е р 3.3.6 [Наблюдение процесса Орнштейна-Уленбека] Пусть скалярные процессы $\{x(t), y(t)\}$ удовлетворяют системе уравнений

$$dx(t) = -\alpha x(t)dt + dw^1(t), \quad x(0) \sim \mathcal{N}(m_0, \gamma_0),$$

$$dy(t) = x(t)dt + \sigma dw^2(t), \quad y(0) = 0.$$

Уравнение фильтра Калмана-Бьюси для процесса $m(t) = \mathbf{M}(x(t)|\mathcal{F}_t^y)$ имеет вид

$$dm(t) = -\alpha m(t)dt + \frac{\gamma(t)}{\sigma^2}[dy(t) - m(t)dt], \quad m(0) = m_0,$$

а уравнение для ковариации $\gamma(t) = \mathbf{M}(x(t)-m(t))^2$ есть скалярное уравнение Рикатти

$$\dot\gamma(t) = -2\alpha\gamma(t) + 1 - \frac{\gamma^2(t)}{\sigma^2}, \quad \gamma(0) = \gamma_0.$$

Это уравнение имеет явное решение

$$\gamma(t) = \bar\gamma_1 + \frac{(\bar\gamma_1 - \bar\gamma_2)(\gamma_0 - \bar\gamma_1)}{(\gamma_0-\bar\gamma_2)\,exp\{2\beta t\} - (\gamma_0 - \bar\gamma_1)},$$

где

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{\sigma^2}}, \quad \bar\gamma_1 = \sigma^2(\beta-\alpha), \quad \bar\gamma_2 = -\sigma^2(\beta+\alpha).$$

Отметим, что $\gamma(t) \to \bar\gamma_1$ при $t \to \infty$. Если $\gamma_0 = \bar\gamma_1$, то $\dot\gamma(t) = 0$ и $\gamma(t) = \bar\gamma_1$.

Задача экстраполяции.

Рассмотрим некоторые обобщения задачи фильтрации. Одной из таких задач является задача прогнозирования или *экстраполяции*. Пусть процессы $\{x(t), y(t)\}$, описываются линейной системой стохастических уравнений (3.3.38). Предположим, что наблюдению доступны значения процесса $y(t)$ лишь до некоторого момента времени $s < t$ и требуется оценить $x(t)$ оптимальным в средне-квадратическом смысле образом. Такая оценка есть $m(t,s) = \mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_s^y\}$ и называется оценкой прогноза или экстраполяции. Покажем, как оценка прогноза выражается через оценку фильтра Калмана-Бьюси.

В силу уравнения (3.3.38) процесс $x(t)$ допускает представление

$$x(t) = \Phi(t,s)x(s) + \int\limits_s^t \Phi(t,u)B(u)dw^1(u), \tag{3.3.55}$$

где матричная функция $\Phi(t,s)$ есть матрица фундаментального решения линейной системы $\dot x(t) = A(t)x(t)$. Поскольку процессы w^1, w^2 независимы, то значения приращений Винеровского процесса $w^1(u)$ при $u \geq s$ не зависят от значений процесса $y(u)$ при $u < s$. Поэтому

$$\mathbf{M}\left\{\int\limits_s^t \Phi(t,u)B(u)dw^1(u)\,|\mathcal{F}_s^y\right\} = 0,$$

и следовательно,
$$m(t,s)=\mathbf{M}\{\Phi(t,s)x(s)|\mathcal{F}_s^y\}=\Phi(t,s)\mathbf{M}\{x(s)|\mathcal{F}_s^y\}=\Phi(t,s)m(s).$$
Использование представления (3.3.55) позволяет получить выражение и для ковариации оценки прогноза
$$\gamma(t,s)=\mathbf{M}\{(x(t)-m(t,s))(x(t)-m(t,s))^*\}=$$
$$\Phi(t,s)\gamma(s)\Phi^*(t,s)+\int\limits_s^t\Phi(t,u)B(u)B^*(u)\Phi(t,u)du. \tag{3.3.56}$$

Фильтрация по дискретным наблюдениям

При построении систем наблюдения реальными объектами наблюдаемый процесс, часто бывает дискретным, то есть наблюдается не непрерывная траектория $y(t)$, а ее значения в некоторые моменты времени $0\le t_1<t_2<...<t_n\le T$. Предположим, что наблюдаемые значения связаны с ненаблюдаемой компонентой $x(t)$ соотношениями
$$y(t_i)=a(t_i)x(t_i)+b(t_i)\varepsilon(t_i),$$
где $a(t_i),b(t_i)$ - известные матрицы, а случайные векторы $\varepsilon(t_i),i=1,2,...$ образуют последовательность гауссовского белого шума. Оптимальная в среднеквадратическом оценка процесса $x(t)$ по наблюдениям последовательности $\{y(t_1),...,y(t_i),\quad t_i\le t\}$ есть условное математическое ожидание $\mathbf{M}\{x(t)|\mathcal{F}_t^y\}$, где
$$\mathcal{F}_t^y=\sigma\{y(t_i):t_i\le t\}.$$
Заметим, что поток σ - алгебр $\mathcal{F}_t^y$ обладает следующими свойствами
$$\mathcal{F}_t^y=\mathcal{F}_{t_i}^i,\quad \text{при}\quad t_i\le t<t_{i+1},$$
$$\mathcal{F}_{t_{i+1}}^y=\sigma\{\mathcal{F}_i^y,y(t_{i+1})\}.$$
З а м е ч а н и е   Эти соотношения означают, что в промежутках между моментами времени t_i не происходит обновления информации (нет наблюдений) и σ - алгебра, соответствующая процессу наблюдений остается неизменной. В каждый из моментов времени t_i происходит обновление информации (появляется новое значение $y(t_i)$), и соответственно, изменяется и σ - алгебра $\mathcal{F}_t^y$.

Поскольку на интервалах $[t_i,t_{i+1})$ наблюдения отсутствуют, в соответствии с результатами предудущего раздела, оптимальная оценка определяется соотношениями для оценки оптимального прогноза, а именно: при $t_i\le t<t_{i+1}$
$$m(t)=m(t,t_i)=\Phi(t,t_i)m(t_i),$$
$$\gamma(t)=\gamma(t,t_i)=\Phi(t,t_i)\gamma(t_i)\Phi^*(t,t_i)+\int\limits_{t_i}^t\Phi(t,u)B(u)B^*(u)\Phi^*(t,u)du. \tag{3.3.57}$$

В моменты времени t_i происходит скачкообразное изменение σ - алгебр $\mathcal{F}_t$, и соответственно, скачкообразное изменение оценки $(m(t),\gamma(t))$.

Выведем соотношения для изменения оценок в моменты времени t_i с использованием обобщенной теоремы о нормальной корреляции. Обозначим
$$m(t_{i+1}-)=m(t_{i+1},t_i)=\mathbf{M}\{x(t_{i+1})|\mathcal{F}_{t_i}^y\},$$
$$\gamma(t_{i+1}-)=\gamma(t_{i+1},t_i)=\mathbf{M}\{(x(t_{i+1})-m(t_{i+1}-)(x(t_{i+1})-m(t_{i+1}-)^*\},$$
$$m(t_{i+1})=\mathbf{M}\{x(t_{i+1})|\mathcal{F}_{t_{i+1}}^y\},$$
$$\gamma(t_{i+1}-)=\gamma(t_{i+1},t_i)=\mathbf{M}\{(x(t_{i+1})-m(t_{i+1})(x(t_{i+1})-m(t_{i+1})^*\}.$$

По обобщенной теореме о нормальной корреляции имеем

$$m(t_{i+1}) = m(t_{i+1}-)+$$

$$\mathbf{cov}\{x(t_{i+1}), y^*(t_{i+1})|\mathcal{F}^y_{t_i}\}(\mathbf{cov}\{y(t_{i+1}), y^*(t_{i+1})|\mathcal{F}^y_{t_i}\})^{-1}[y(t_{i+1}) - \mathbf{M}\{y(t_{i+1})|\mathcal{F}^y_{t_i}\}].$$

Далее в силу свойств последовательности $\varepsilon(t_i)$

$$\mathbf{M}\{y(t_{i+1})|\mathcal{F}^y_{t_i}\} = \mathbf{M}\{a(t_{i+1})x(t_{i+1}) + b(t_{i+1})\varepsilon(t_{t+1})|\mathcal{F}^y_{t_i}\} =$$

$$a(t_{i+1})\mathbf{M}\{x(t_{i+1})|\mathcal{F}^y_{t_i}\} = a(t_{i+1})m(t_{i+1}-),$$

$$\mathbf{cov}\{x(t_{i+1}), y^*(t_{i+1})|\mathcal{F}^y_{t_i}\} =$$

$$\mathbf{M}\{(x(t_{i+1}) - m(t_{i+1}))(y(t_{i+1}) - a(t_i)m(t_{i+1}))^*|\mathcal{F}^y_{t_i}\} = \gamma(t_{i+1}-)a^*(t_{i+1}),$$

$$\mathbf{cov}\{y(t_{i+1}), y^*(t_{i+1})|\mathcal{F}^y_{t_i}\} = \mathbf{M}\{(y(t_{i+1}) - a(t_{i+1})m(t_{i+1}))(y(t_{i+1}) - a(t_i)m(t_{i+1}))^*|\mathcal{F}^y_{t_i}\} =$$

$$a(t_{i+1})\gamma(t_{i+1}-)a^*(t_{i+1}) + b(t_{i+1})b^*(t_{i+1}).$$

Подставляя полученные соотношения в уравнение для $m(t_{i+1})$ приходим к рекуррентным уравнениям

$$\begin{aligned} &m(t_{i+1}) = m(t_{i+1}-)+ \\ &\gamma(t_{i+1}-)a^*(t_{i+1})[a(t_{i+1})\gamma(t_{i+1}-)a^*(t_{i+1}) + b(t_{i+1})b^*(t_{i+1})]^{-1}[y(t_{i+1}) - a(t_{i+1})m(t_{i+1}-)], \\ &\gamma(t_{i+1}) = \gamma(t_{i+1}-)- \\ &\gamma(t_{i+1}-)a^*(t_{i+1})[a(t_{i+1})\gamma(t_{i+1}-)a^*(t_{i+1}) + b(t_{i+1})b^*(t_{i+1})]^{-1}a(t_{i+1})\gamma(t_{i+1}-). \end{aligned} \tag{3.3.58}$$

Совокупность уравнений (3.3.57), (3.3.58) определяет решение задачи фильтрации по дискретным наблюдениям.

З а м е ч а н и е Отметим, что по форме уравнения (3.3.58) полностью соответствуют уравнениям дискретного фильтра Калмана.

3.3.6 Задачи для самостоятельного решения

3.3.1. Пусть случайный процесс $\{\xi(t), t > 0\}$ удовлетворяет условиям Теоремы 3.3.1. Показать, что при $\mathbf{M}\xi^2(0) < \infty$ имеет место неравенство

$$\mathbf{M}\xi^2(t) \leq \left[\mathbf{M}\xi^2(0) + L(1+t)\int\limits_0^t (1 + \mathbf{M}\xi^2(s))ds\right].$$

Показать, что существуют константы $A > 0, \alpha > 0$ такие, что

$$\mathbf{M}\xi^2(t) \leq Ae^{\alpha t^2}, \quad t \geq 0.$$

У к а з а н и е Воспользоваться неравенством Гроноула-Беллмана.

3.3.2. Пусть $\varphi(x)$ - действительная функция с ограниченной второй производной, а $w(t)$ - стандартное Броуновское движение. Показать, что процесс

$$X(t) = \varphi(w(t)) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \varphi''(w(s))ds$$

является мартингалом.

З а м е ч а н и е Таким образом, если $\varphi''(x) \geq 0$ $(\varphi''(x) \leq 0)$ то процесс $\varphi(w(t))$ - субмартингал (супермартингал). Сравните с Примером 2.2.7 для мартингалов в дискретном времени.

3.3.3. Пусть $w_i(t), i = 1, ..., n$ - независимые броуновские движения. Определим процесс

$$X(t) \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2(t) \right)^{1/2}.$$

Показать, что $X(t)$ есть решение некоторого стохастического диференциального уравнения. Вывести это уравнение. Является ли процесс $X(t)$ Марковским?

О т в е т

$$dX(t) = \frac{n-1}{2X(t)} dt + dW(t).$$

У к а з а н и е Вывести уравнение для процесса $Z(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2(t)$. Используя теорему Леви показать, что имеет место равенство

$$\int_0^t \sum_{i=1}^{n} 2w_i(t) dw_i = 2 \int_0^t \sqrt{Z(s)} dW(s),$$

с некоторым процессом Броуновского движения $W(t), t > 0$.

3.3.4. Пусть случайный процесс $\xi(t), t \geq 0$ удовлетворяет стохастическомц уравнению

$$d\xi(t) = a(t)\xi(t)dt + \sigma(t)\xi(t)dw(t), \quad \mathbf{P}\{\xi(0) > 0\} = 1,$$

с детерминированными функциями $a(t), \sigma(t)$, удовлетворяющими ограничениям

$$\int_0^T |a(s)| ds < \infty, \quad \int_0^T \sigma^2(s) ds < \infty.$$

Доказать, что

$$\xi(t) = \xi(0)\, exp \left\{ \int_0^t [a(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)] ds + \int_0^t \sigma(s) dw(s) \right\}.$$

У к а з а н и е Рассмотреть переменную $Y(t) = ln\{\xi(t)\}$, и воспользовавшись формулой Ито вывести уравнение, которому удовлетворяет переменная $Y(t)$.

3.3.5. Пусть требуется оценить гауссовский случайный вектор $\theta \in R^n \sim \mathcal{N}(\mu, \gamma_0)$ по наблюдениям случайного процесса $y(t) \in R^m$, удовлетворяющего стохастическому уравнению

$$dy(t) = a(t)\theta dt + b(t) dw(t), \quad y(0) = 0,$$

где матрицы a и b имеют соответствующие размерности и матрица $b(t)b^*(t)$ - равномерно невырождена. Вывести уравнения для оптимальной оценки $m(t) = \mathbf{M}\{\theta | \mathcal{F}_t\}$ и ковариационной матрицы $\gamma(t) = \mathbf{M}(\theta - m(t))(\theta - m(t))^*$.

О т в е т

$$dm(t) = \gamma(t) a^*(t) (b(t) b^*(t))^{-1} [dy(t) - a(t) m(t) dt],$$

$$\dot{\gamma}(t) = -\gamma(t) a^*(t) (b(t) b^*(t))^{-1} a(t) \gamma(t),$$

$$m(0) = m_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0.$$

3.3.6. [Продолжение задачи 3.3.5.] Доказать, что в условиях предыдущей задачи при положительно определенной матрице $\gamma_0 > 0$

$$\gamma(t) = \left[(\gamma_0)^{-1} + \int\limits_0^t a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1}a(s)ds\right]^{-1}.$$

У к а з а н и е   Рассмотреть переменную $G(t) = \gamma^{-1}(t)$ и убедиться, что

$$\dot{G}(t) = a^*(t)(b(t)b^*(t))^{-1}a(t).$$

3.3.7. [Продолжение задачи 3.3.5.] Доказать, что в условиях предыдущей задачи при положительно определенной матрице $\gamma_0 > 0$

$$m(t) = \gamma(t)\left[(\gamma_0)^{-1}m_0 + \int\limits_0^t a^*(s)(b(s)b^*(s))^{-1}dy(s)\right]^{-1}.$$

У к а з а н и е   Рассмотреть переменную $G(s) = \Phi_1(t,s)\gamma(s)$, где матричная функция $\Phi_1(t,s)$ есть фундаментальное решение линейной системы

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t,s) = A_1(t)\Phi_1(t,s), \quad \Phi_1(s,s) = I_n,$$

$$A_1(t) = -\gamma(t)a^*(t)(b(t)b^*(t))^{-1}a(t).$$

Убедиться, что

$$G(s) = \Phi_1(t,0)\gamma_0 = const\,.$$

3.3.8. Пусть в задаче оценки одномерного параметра $\theta \sim \mathcal{N}(0,1)$ наблюдаемый процесс $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dy(t) = \theta dt + dw(t), \quad y(0) = 0.$$

1) Найти уравнение для оценки $m(t) = \mathbf{M}\{\theta|\mathcal{F}_t^y\}$.

2) Вывести уравнение, которому удовлетворяет минимальное время наблюдения, при котором

$$\mathbf{P}\{|m(t)-\theta| \le \varepsilon\} \ge 1-\delta.$$

О т в е т

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{(\gamma(t))^{1/2}}\right) = 1-\delta,$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа.

У к а з а н и е   Воспользоваться тем, что распределение случайной величины $m(t)-\theta$ является гауссовским с параметрами $(0,\gamma(t))$.

3) Пусть $y(2) = 1$. Определить $\mathbf{P}\left\{|\theta - 1/3| \ge \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|\mathcal{F}_2^y\right\}$.

О т в е т   0.67

3.3.9. Пусть эволюция двумерного ненаблюдаемого процесса $(x_1(t), x_2(t))$ описывается системой уравнений

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0,$$

$$dx_2(t) = -\alpha x_2(t)dt + \sigma_1 dw^1(t), \quad x_2(0) = 0, \quad \alpha > 0.$$

Процесс наблюдений описывается уравнением

$$dy(t) = x_1(t)dt + \sigma_2 dw^2(t), \quad y(0) = 0.$$

Найти предельное условное распределение процесса (x_1, x_2).

О т в е т   Предельное распределение является гауссовским с параметрами

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ \\ m_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\gamma_{12} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}}{ds2\sigma_2^2}, \quad \gamma_{11} = \left(\frac{2\gamma_{12}}{\sigma_2^2}\right)^{1/2}, \quad \gamma_{22} = \sigma_2^2\gamma_{11}\gamma_{12}.$$

У к а з а н и е   Рассмотреть уравнение для матрицы ковариаций и найти предельное значение из условия $\dot{\gamma}(t) = 0$.

3.3.10. Доказать соотношение (3.3.56).

Глава 4

Приложение 1. Необходимые сведения из теории функций и функционального анализа.

4.1 Теория меры и интеграла

4.1.1 Алгебры и $\sigma-$ алгебры множеств

О п р е д е л е н и е 4.1.1 Пусть X - некоторое множество элементов $x \in X$. Система $\mathcal{A}$ подмножеств X называется *алгеброй,* если:

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. $A, B \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A \bigcup B \in \mathcal{A}, \quad A \bigcap B \in \mathcal{A}$,
3. $A \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \bar{A} \in \mathcal{A}$.

■

О п р е д е л е н и е 4.1.2 Система подмножеств из Определения 4.1.1 называется $\sigma-$ *алгеброй* если, кроме того, выполнено следующее усиление свойства 2):

если $A_n \in \mathcal{A}, \quad n = 1, 2, ...$ то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

■

О п р е д е л е н и е 4.1.3 Множество X вместе с $\sigma-$ алгеброй его подмножеств $\mathcal{A}$ называется *измеримым пространством* и обозначается $\{X, \mathcal{A}\}$. ■

На одном и том же множестве x могут быть заданы различные алгебры его подмножеств, при этом, соответственно, возникают различные измеримые пространства. Например, системы множеств

$$\mathcal{A}_* = \{\emptyset, X\}, \quad \mathcal{A}^* = \{A : A \subseteq X\}$$

являются и алгебрами и $\sigma-$ алгебрами. При этом $\mathcal{A}_*$ - тривиальная, самая "бедная" σ - алгебра, а $\mathcal{A}^*$ - самая "богатая" σ - алгебра, состоящая из всех подмножеств X.

Т е о р е м а 4.1.1 *Пусть $\mathcal{D}$ - некоторая произвольная система множеств из X. Тогда существует наименьшая σ - алгебра, обозначаемая $\sigma(\mathcal{D})$, содержащая все множества из $\mathcal{D}$.*

З а м е ч а н и е Систему множеств $\sigma(\mathcal{D})$ называют наименьшей $\sigma-$ алгеброй, порожденной системой множеств $\mathcal{D}$.

4.1.2 Меры на измеримых пространствах

О п р е д е л е н и е 4.1.4 Пусть $\mathcal{A}$ алгебра подмножеств X. Функция множества $\mu = \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}$, принимающая значения в $[0, \infty]$, называется *конечно-аддитивной мерой,* заданной на $\mathcal{A}$, если для любых двух непересекающихся множеств A и B из $\mathcal{A}$

$$\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Конечно-аддитивная мера μ с $\mu(X) < \infty$ называется *конечной*, а в случае $\mu(X) = 1$ - *конечно-аддитивной вероятностной мерой* или *конечно-аддитивной вероятностью.* ■

Из свойства конечной аддитивности следует, что для любого конечного набора попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ из $\mathcal{A}$ таких, что

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A},$$

выполняется

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \tag{4.1.1}$$

О п р е д е л е н и е 4.1.5 Конечно-аддитивная мера μ, заданная на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества X называется *счетно-аддитивной (σ - аддитивной)* или просто мерой, если свойство (4.1.1) можно распространить на любой счетный набор множеств. ■

Свойства счетно-аддитивных конечных мер можно суммировать следующим образом:

1. Если $\emptyset$ - пустое множество, то
$$\mu(\emptyset) = 0.$$
2. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, и $B \subseteq A$, то
$$\mu(A) \leq \mu(B).$$
4. Если $A_n \in \mathcal{A}, \quad n = 1, 2, ...$ - конечная или счетная совокупность множеств таких, что $A_n \cap A_m = \emptyset$ если $m \neq n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, то выполняется соотношение
$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Т е о р е м а 4.1.2 *Пусть μ - конечно-аддитивная функция множества, заданная на алгебре $\mathcal{A}$, с $\mu(X) < \infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *мера μ σ - аддитивна,*
2. *мера μ непрерывна в "нуле", то есть для любых множеств $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ таких, что $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$*
$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0.$$

Следующий результат является одним из наиболее важных результатов теории меры.

Т е о р е м а 4.1.3 Теорема Каратеодори. *Пусть X - некоторое множество, $\mathcal{A}$ - алгебра его подмножеств и $\sigma(\mathcal{A})$ - наименьшая σ - алгебра, содержащая $\mathcal{A}$. Пусть μ_0 - конечная $\sigma-$ аддитивная мера на $\{X, \mathcal{A}\}$. Тогда существует единственная мера μ на $\{X, \sigma(\mathcal{A})\}$, являющаяся продолжением μ_0, то есть такая, что*

$$\mu(A) = \mu_0(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

4.1.3 Задание мер на измеримых пространствах

Следующие примеры измеримых пространств являются наиболее важными в теории вероятностей и случайных процессов.

Измеримое пространство с конечным или счетным множеством элементов

Пусть множество $X = \{x_1, x_2, ...\}$, где $\{x_n, n = 1, 2, ...\}$ конечная или бесконечная последовательность элементов. Система подмножеств, содержащая в качестве подмножеств все элементы $A_n = x_n$ $\mathcal{A} = \sigma\{x_1, ...\}$, является алгеброй и наименьшей σ - алгеброй, содержащей все элементы $\{x_1, ...\}$. Она также совпадает и с наиболее богатой σ - алгеброй всех подмножеств множества X. Конечная мера на пространстве $\{X, \mathcal{A}\}$ задается числами $\mu_n = \mu(\{x_n\}) > 0$ такими, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x_n\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) = \mu(X) < \infty.$$

Для любого подмножества $A \in \mathcal{A}$ мера $\mu(A)$ равна

$$\mu(A) = \sum_{\{n: x_n \in A\}} \mu_n.$$

Данная мера является σ - аддитивной.

Измеримое пространство $\{R, \mathcal{B}(R)\}$.

Пусть $X = R = (-\infty, \infty)$ - действительная прямая и $< a, b >$ одно из множеств вида

$$(a, b], \quad [a, b), \quad (a, b), \quad [a, b],$$

где $-\infty \le a \le b \le \infty$. Обозначим через $\mathcal{A}$ систему подмножеств R, состоящих из конечных сумм непересекающихся множеств вида $< a, b >$, то есть,

$$A \in \mathcal{A}, \quad \text{если} \quad A = \sum_{i=1}^{n} < a_i, b_i >, \quad n < \infty.$$

Если дополнить систему $\mathcal{A}$ пустым множеством $\emptyset$, то она образует алгебру, но не является σ - алгеброй.

О п р е д е л е н и е 4.1.6 Наименьшая $\sigma(\mathcal{A})$ - алгебра, содержащая систему $\mathcal{A}$ обозначается $\mathcal{B}(R)$ и называется *борелевской* алгеброй множеств действительной прямой, а ее множества - *борелевскими.* ■

Аналогично определяется измеримое пространство $\{[a, b], \mathcal{B}([a, b])\}$, где $\mathcal{B}([a, b])$ - есть σ - алгебра подмножеств вида $A \cap [a, b]$, где $A \in \mathcal{B}(R)$, то есть,

$$\mathcal{B}([a, b]) = \{A \cap [a, b] : A \in \mathcal{B}(R)\}.$$

О п р е д е л е н и е 4.1.7 Пусть задана некоторая мера μ на измеримом пространстве $\{R, \mathcal{B}(R)\}$ или пространстве $\{[a, b], \mathcal{B}([a, b])\}$. Определим для нее *функцию распределения*

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]),$$

обладающую следующими свойствами:

1. $F_\mu(x)$ - неубывающая функция (*монотонность*);
2. $F_\mu(-\infty) = \lim\limits_{x \downarrow -\infty} F_\mu(x) = 0, \quad F_\mu(\infty) = \lim\limits_{x \uparrow \infty} F_\mu(x) = \mu(R) < \infty$, (*условие нормировки*),
3. $F_\mu(x)$ непрерывна справа и имеет пределы слева в каждой точке $x \in R$, то есть

$$\lim_{y \downarrow x} F_\mu(y) = F_\mu(x), \quad \lim_{y \uparrow x} F_\mu(y) = F_\mu(x-),$$

(*непрерывность справа.*)

■

Для любого из интервалов $< a, b >$ мера $\mu(< a, b >)$ определяется соотношениями

$$\mu((a,b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a), \quad \mu([a,b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a-),$$

$$\mu((a,b)) = F_\mu(b-) - F_\mu(a), \quad \mu([a,b)) = F_\mu(b-) - F_\mu(a),$$

$$\mu(\{a\}) = F_\mu(a) - F_\mu(a-).$$

Мера μ задана на множествах $A = \sum\limits_{i=1}^{n} < a_i, b_i >, \quad n < \infty$ алгебры $\mathcal{A}$ соотношением

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n} < a_i, b_i >\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(< a_i, b_i >).$$

Мера μ счетно-аддитивна на алгебре $\mathcal{A}$ и по Теореме Каратеодори может быть продолжена единственным образом на σ - алгебру борелевских множеств $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(R)$. Тем самым для каждого множества $A \in \mathcal{B}(R)$ единственным образом определена мера $\bar{\mu}(A)$, совпадающая с мерой μ на алгебре $\mathcal{A}$.

Определение 4.1.8 Всякая функция $F(x)$, обладающая свойствами 1)-3), функции распределения некоторой меры μ, (см. Определение 4.1.7) а именно, (монотонности, нормировки и непрерывности справа) называется *функцией распределения на* R. ■

Между функциями распределения и конечными мерами на $\{R, \mathcal{B}(R)\}$ существует взаимно однозначное соответствие, то есть, всякой мере μ соответствует некоторая функция распределения $F_\mu(x)$, и наоборот, для всякой $F(x)$ - функции распределения на R существует мера μ, имеющая функцию распределения $F_\mu(x)$, совпадающую с $F(x)$.

Функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

соответствует *мера Лебега* λ, которая на интервалах $< a, b > \subseteq [0,1]$ равна

$$\lambda(< a, b >) = b - a.$$

Меру Лебега можно определить и на любом ограниченном подмножестве, принадлежащем σ - алгебре $\mathcal{B}(R)$.

Всякая функция распределения на R является функцией ограниченной вариации и допускает единственное разложение вида

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy + \sum_{x_i \leq x} \Delta F(x_i) + F^s(x), \tag{4.1.2}$$

где

$$f(y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy < \infty,$$

плотность распределения, причем $f(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$, почти всюду по мере Лебега,

$$\Delta F(x_i) > 0, \quad \sum_{x_i < \infty} \Delta F(x_i) < \infty,$$

совокупность x_i - точек разрыва функции распределения, множество которых не более чем счетно, называется *атомами* или *дискретной* компонентой распределения, а

$$F^s(x) - \quad \text{неубывающая непрерывная функция такая, что}$$

$$\dot{F}^s(x) = 0, \quad \text{почти всюду по мере Лебега на} \quad R,$$

называется *сингулярной* компонентой распределения.

Измеримое пространство $\{R^n, \mathcal{B}(R^n)\}$

Рассмотрим прямое произведение n экземпляров пространств R, то есть $R^n = R \times ... \times R$ - множество упорядоченных наборов $x = (x_1, ..., x_n)$. Определим на этом пространстве систему подмножеств (см. предыдущий пример)

$$\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \times ... \times \mathcal{A},$$

которая, образована множествами

$$A = A_1 \times ... A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k, \quad A_k \in \mathcal{A}.$$

Будучи дополненной пустым множеством эта система множеств, образует алгебру.

Определение 4.1.9 Наименьшая σ - алгебра, содержащая систему множеств $\mathcal{A}^n$ обозначается $\mathcal{B}(R^n)$ и называется *борелевской* алгеброй множеств в R^n, а ее множества - *борелевскими.* ■

Определение 4.1.10 Функция распределения конечной меры μ на измеримом пространстве $\{R^n, \mathcal{B}(R^n)\}$ определяется соотношением

$$F_\mu(x_1, ..., x_n) = \mu\left(\prod_{k=1}^{n}(-\infty, x_k]\right).$$

Функция распределения меры μ обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F_\mu(x_1, ..., x_n) \le \mu(R^n) < \infty$;
2. функции $F_\mu(x_1, ..., x_n)$ непрерывны справа по переменным x_i;
3. если хотя бы одна из переменных $x_i \to -\infty$, то
$$F_\mu(x_1, ..., x_n) \to 0,$$
и если все переменные $x_i \to \infty$, то
$$F_\mu(x_1, ..., x_n) \to \mu(R^n);$$
4. функции $F_\mu(x_1, ..., x_n)$ монотонны в следующем смысле: определим оператор Δ_i взятия конечной разности по переменной x_i как
$$\Delta_i F = F(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, ..., x_n) - F(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n), \quad h_i > 0,$$
тогда для любого набора $h_i \ge 0$,
$$\Delta_1 \Delta_2 ... \Delta_n F_\mu(x_1, ..., x_n) \ge 0.$$

■

Определение 4.1.11 Всякая функция $F = F(x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющая условиям 1) - 4) называется $n-$ *мерной функцией распределения* (в пространстве R^n). ■

Т е о р е м а 4.1.4 *Пусть* $F = F(x_1, ..., x_n)$ *- некоторая функция распределения в* R^n. *Тогда на* $\{R^n, \mathcal{B}(R^n)\}$ *существует единственная конечная мера* μ *такая, что*

$$F_\mu(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n).$$

О п р е д е л е н и е 4.1.12 Если мера задана на произведении интервалов $A = \prod_{k=1}^n < a_k, b_k > \in \mathcal{A}^n$ соотношением

$$\mu(A) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k),$$

то ее продолжение на $\sigma-$ алгебру борелевских множеств называется *мерой Лебега в* R^n. ■

Большой запас $n-$ мерных функций распределения задается с помощью интеграла Римана (или в более общем случае интеграла Лебега) от плотности

$$F(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, ..., y_n) dy_n ... dy_1,$$

где *плотность распределения* f удовлетворяет условиям

$$f(y_1, ..., y_n) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, ..., y_n) dy_n ... dy_1 < \infty.$$

Измеримое пространство $\{R^T, \mathcal{B}(R^T)\}$

Пусть T некоторое произвольное множество. Рассмотрим пространство отображений $x = x(t) : \quad T \to R$, определенных для $t \in T$. Если $T = \{-2, -1, 0, 1, 2, \}$ - множество целых чисел или некоторое его счетное подмножество, то данное пространство есть пространство последовательностей, если T действительная прямая или отрезок действительной прямой, то R^T есть пространство действительных функций $T \to R$. На множестве R^T определяется $\mathcal{A}(R^T)$ - алгебра *цилиндрических множеств* или множеств вида

$$A_{t_1, \ldots, t_n}(B^n) = \{x : (x(t_1), ..., x(t_n)) \in B^n\},$$

где

$$t_1, ..., t_n \in T, \quad B^n \in \mathcal{B}(R^n), \quad n < \infty.$$

О п р е д е л е н и е 4.1.13 Наименьшая σ - алгебра, содержащая систему множеств $\mathcal{A}(R^T)$ обозначается $\mathcal{B}(R^T)$ и называется σ - *алгеброй цилиндрических множеств в* R^T, а ее множества - *цилиндрическими.* ■

Мера на $\sigma-$ алгебре цилиндрических множеств задается для произвольного конечного набора индексов $\{t_1, ..., t_n\} \in T$ на множествах вида

$$A_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, ..., x_n) = \bigcap_{k=1}^n \{x : x(t_k) \leq x_k\} \in \mathcal{B}(R^T),$$

порождающих ту же самую $\sigma-$ алгебру цилиндрических множеств $\mathcal{B}(R^T)$.

О п р е д е л е н и е 4.1.14 Функции

$$F_\mu(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = \mu(A_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, ..., x_n))$$

для всевозможных конечных множеств индексов $\{t_1, ..., t_n\} \in T$ наборов $\{x_1, ..., x_n\} \in R^n$ и $n < \infty$ образуют *семейство конечно-мерных распределений меры* μ и удовлетворяют следующему набору условий:

1. $0 \leq F_\mu(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) \leq \mu(R^T) < \infty$; (условие нормировки)

2. функции $F_\mu(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$ непрерывны справа по переменным x_i;

3. если хотя бы одна из переменных $x_i \to -\infty$, то

$$F_\mu(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) \to 0,$$

и если все переменные $x_i \to \infty$,

$$F_\mu(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) \to \mu(R^T);$$

4. функции $F_\mu(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$ монотонны в следующем смысле: определим оператор Δ_i взятия конечной разности по переменной x_i как

$$\Delta_i F = F(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, ..., x_n) - F(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n), \quad h_i > 0,$$

тогда для любого набора $h_i \geq 0$,

$$\Delta_1\Delta_2...\Delta_n F_\mu(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) \geq 0;$$

5. для любой перестановки $\{k_1, ..., k_n\}$ индексов $\{1, ..., n\}$

$$F_\mu(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = F_\mu(x_{k_1}, ..., x_{k_n}; t_{k_1}, ..., t_{k_n});$$

6. для любых $1 \leq k < n$ и $x_1, ..., x_k \in R$

$$F_\mu(x_1, ..., x_k; t_1, ..., t_k) = F_\mu(x_1, ..., x_k, \infty, ..., \infty; t_1, ..., t_n).$$

■

Т е о р е м а 4.1.5 Теорема Колмогорова. *Мера μ, заданная на множествах $A_{t_1,...,t_n}(x_1, ..., x_n)$, конечно-мерные распределения которой удовлетворяют условиям 1)-6), продолжима единственным образом на $\sigma-$ алгебру цилиндрических множеств $\mathcal{B}(R^T)$.*

З а м е ч а н и е Эта теорема является основой для построения случайного процесса по семейству его конечно-мерных распределений.

Полное измеримое пространство

О п р е д е л е н и е 4.1.15 Пусть $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ - некоторое измеримое пространство с мерой. Определим $\bar{\mathcal{A}}^\mu$ как совокупность всех подмножеств $B \subseteq X$, для которых существуют $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ такие, что $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$ и $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$ и мера $\mu(B)$ определяется соотношением

$$\mu(B) = \mu(A_1) = \mu(A_2).$$

Полученное таким образом пространство $\{X, \bar{\mathcal{A}}^\mu, \mu\}$ называется *пополнением пространства* $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ *относительно меры* μ.

Если мера μ такова, что $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}^\mu$ то она называется *полной*, а пространство $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ - *полным измеримым пространством.* Множества $\sigma-$ алгебры $\mathcal{A}$ называются также $\mu-$ *измеримыми.* ■

4.1.4 Измеримые функции

Определение измеримой функции

Пусть $\{X, \mathcal{A}\}$ - некоторое измеримое пространство и $\{R, \mathcal{B}(R)\}$ - числовая прямая с системой борелевских множеств.

О п р е д е л е н и е 4.1.16 Действительная функция $f(x)$, определенная на $\{X, \mathcal{A}\}$ называется $\mathcal{A}-$ измеримой, если для любого $B \in \mathcal{B}(R)$

$$\{x : f(x) \in B\} \in \mathcal{A}, \tag{4.1.3}$$

или, что тоже самое, если прообраз $f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$ является измеримым множеством в X.

Если $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ - полное измеримое пространство, то есть любое множество $A \in \mathcal{A}$ является $\mu-$ измеримым, то $\mathcal{A}-$ измеримая функция называется также $\mu-$ измеримой. ■

Числовая функция, заданная на действительной прямой, называется *борелевской*, если прообраз каждого борелевского множества является борелевским множеством.

Т е о р е м а 4.1.6 *Пусть числовая функция $f(x)$, заданная на пространстве $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$, $\mu-$ измерима, а $g(x)$ - борелевская. Тогда, $g(f(x))$ $\mu-$ измерима.*

В качестве простого критерия измеримости часто используется следующий.

Т е о р е м а 4.1.7 *Для того, чтобы числовая функция $f(x)$, заданная на пространстве $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$, была $\mu-$ измерима, необходимо и достаточно, чтобы при любом действительном $c \in R$ множество $\{x \in X : f(x) \leq c\}$ было $\mu-$ измеримым.*

Свойства измеримых функций

В случае, когда пространство $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$, задано, то вместо $\mu-$ измеримости говорят просто об измеримости. Рассмотрим пространство измеримых функций. Простые арифметические операции и операции предельного перехода не выводят за рамки множества измеримых функций.

Т е о р е м а 4.1.8 *Сумма, разность и произведение двух измеримых функций измеримы. Частное двух измеримых функций, при условии, что знаменатель не обращается в нуль, тоже измеримо.*

Т е о р е м а 4.1.9 *Пусть задана последовательность измеримых функций $\{f_n(x), n = 1, 2, ...\}$ тогда*

$$\sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x), \quad \limsup_n f_n(x), \quad \liminf_n f_n(x),$$

и $\lim_n f_n(x)$ если он существует, являются измеримыми функциями.

О п р е д е л е н и е 4.1.17 Две измеримые функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на одном и том же измеримом пространстве $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$, называются *эквивалентными,* если

$$\mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

■

Если некоторое свойство выполнено для множества точек $x \in A$ такого, что $\mu(A) = \mu(X)$, то говорят, что данное свойство выполнено *почти всюду на* X. Например, эквивалентные функции равны почти всюду на X.

Сходимость по мере и почти всюду

О п р е д е л е н и е 4.1.18 Последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, ...\}$ функций, определенных на измеримом пространстве $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$, называется *сходящейся почти всюду* к функции $f(x)$, если

$$\mu\{x \in X : \lim_n f_n(x) \neq f(x)\} = 0.$$

■

Следующая теорема обобщает Теорему 4.1.9

Т е о р е м а 4.1.10 *Если последовательность измеримых функций $\{f_n(x), n = 1, 2, ...\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на X, то $f(x)$ - измерима.*

О п р е д е л е н и е 4.1.19 Последовательность измеримых функций $\{f_n(x), n = 1, ...\}$ *сходится по мере* к измеримой функции $f(x)$ если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_n \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

■

Соотношение между этими двумя типами сходимости определяется следующими теоремами.

Т е о р е м а 4.1.11 *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду, то она сходится к $f(x)$ по мере.*

Обратная теорема вообще говоря не верна, однако,

Т е о р е м а 4.1.12 *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере, из нее можно извлечь подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, которая сходится к $f(x)$ почти всюду.*

4.1.5 Интеграл Лебега и его основные свойства

Определение интеграла Лебега

Интеграл Лебега определяется для измеримых функций, заданных на некотором полном измеримом пространтстве $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$, вначале на множестве простых функций, а затем продолжается на существенно более широкий класс функций. Примем обозначение $I_A(x)$ для индикаторной функции множества A, то есть

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \in A, \\ 0, & \text{при} \quad x \in X \setminus A \end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 4.1.20 Измеримая функция называется *простой,* если она принимает не более, чем счетное множество значений, иными словами, существует не более, чем счетное множество различных чисел $\{f_1, ..., f_n, ...\}$, таких что

$$f(x) = \sum_k f_n I_{A_n}(x), \tag{4.1.4}$$

где множества A_n таковы, что

$$A_n = \{x \in X : f(x) = f_n\} \in \mathcal{A}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m, \quad \bigcup_n A_n = X.$$

■

Основой для построения интеграла Лебега является следующая

Т е о р е м а 4.1.13 *Для измеримости функции $f(x)$ необходимо и достаточно существования последовательности простых измеримых функций, которая равномерно сходится к $f(x)$.*

О п р е д е л е н и е 4.1.21 Интеграл Лебега от простой функции (4.1.4 определяется равенством

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \sum_n f_n \mu(A_n), \tag{4.1.5}$$

если ряд справа сходится абсолютно. В этом случае простая функция называется *интегрируемой (μ−интегрируемой)* или *суммируемой* (по мере μ).

Интеграл по множеству $A \subseteq X, A \in \mathcal{A}$ определяется как

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \int_X f(x) I_A(x)\mu(dx) = \sum_n f_n \mu(A_n \cap A).$$

■

О п р е д е л е н и е 4.1.22 Функция $f(x)$ называется *интегрируемой,* если существует последовательность простых интегрируемых функций $\{f_n(x)\}$ *сходящаяся равномерно* к $f(x)$. Предел

$$I = \lim_n \int\limits_X f_n(x)\mu(dx) \tag{4.1.6}$$

обозначается

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx)$$

и называется *интегралом функции* f. Интеграл по множеству $A \subseteq X, A \in \mathcal{A}$ определяется как интеграл от функции $f(x)I_A(x)$. ■

Данное определение корректно, поскольку выполняются следующие условия:

1. Предел (4.1.6) существует для любой равномерно сходящейся последовательности простых интегрируемых функций.

2. Этот предел при заданной функции $f(x)$ не зависит от выбора последовательност $\{f_n(x)\}$.

Основные свойства интеграла Лебега

Следующие свойства вытекают непосредственно из определения интеграла Лебега.

1. $\int\limits_A 1\mu(dx) = \int\limits_X I_A(x)\mu(dx) = \mu(A)$.

2. Для любой константы k
$$\int\limits_X kf(x)\mu(dx) = k\int\limits_X f(x)\mu(dx).$$

3. Аддитивность:
$$\int\limits_X [f(x)+g(x)]\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\mu(dx) + \int\limits_X g(x)\mu(dx),$$
и из существования интегралов в правой части следует существование интеграла в левой.

4. Если $f(x), g(x)$ интегрируемы, и $f(x) \geq g(x)$, то
$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) \geq \int\limits_X g(x)\mu(dx).$$

5. Если $\mu(A) = 0$, то $\int\limits_A f(x)\mu(dx) = 0$.

6. Если $f(x) = g(x)$ почти всюду, то
$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) = \int\limits_X g(x)\mu(dx),$$
причем оба интеграла существуют или не существуют одновременно.

7. Если $\varphi(x) \geq 0$ интегрируема и почти всюду $|f(x)| \leq \varphi(x)$, то $f(x)$ - интгерируема.

8. Интегралы
$$I_1 = \int\limits_X f(x)\mu(dx), \quad I_2 = \int\limits_X |f(x)|\mu(dx)$$
существуют и не существуют одновременно.

$\sigma-$ аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега

Т е о р е м а 4.1.14 *Пусть* $X = \bigcup\limits_n A_n$, *и* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *при* $n \neq m$. *Тогда*

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) = \sum_n \int\limits_{A_n} f(x)\mu(dx),$$

причем из существования интеграла в левой части вытекает существование интегралов и абсолютная сходимость ряда в правой части.

Т е о р е м а 4.1.15 *Пусть* $X = \bigcup\limits_n A_n$, *и* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *при* $n \neq m$ *и ряд*

$$\sum_n \int\limits_{A_n} |f(x)|\mu(dx)$$

сходится.

Тогда $f(x)$ *интегрируема на* X *и*

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) = \sum_n \int\limits_{A_n} f(x)\mu(dx).$$

Т е о р е м а 4.1.16 Неравенство Чебышева *Если* $\varphi(x) \geq 0$ *на* X *и* $c > 0$, *то*

$$\mu\{x \in X : \varphi(x) \geq \mathrm{c}\} \leq \frac{1}{c}\int\limits_X \varphi(x)\mu(dx).$$

Т е о р е м а 4.1.17 Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. *Пусть* $f(x)$ *- суммируемая функция, тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что*

$$\left|\int\limits_A f(x)\mu(dx)\right| < \varepsilon,$$

для всякого измеримого множества $A \in \mathcal{A}$ *такого, что* $\mu(A) < \delta$.

Из этих теорем следует, что для любой неотрицательной суммируемой функции $f(x) \geq 0$ интеграл Лебега задает на $\{X, \mathcal{A}\}$ счетно-аддитивную функцию множеств

$$\nu(A) = \int\limits_A f(x)\mu(dx).$$

Следующая теорема Родона-Никодима говорит о том, что представление меры интегралом Лебега есть универсальный способ задания абсолютно непрерывной меры.

О п р е д е л е н и е 4.1.23 Мера $\nu(dx)$ называется абсолютно-непрерывной относительно меры $\mu(dx)$ если

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Соответствующее обозначение $\nu(dx) \ll \mu(dx)$. ■

Т е о р е м а 4.1.18 Теорема Родона-Никодима. *Пусть* $\nu(dx) \ll \mu(dx)$. *Тогда существует измеримая* $\mu-$ *интегрируемая функция* $\rho(x) \geq 0$ *такая, что*

$$\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) = \int\limits_A \rho(x)\mu(dx).$$

Функция $\rho(x)$ *называется производной Родона-Никодима меры* $\nu(dx)$ *по мере* $\mu(dx)$ *и часто обозначается*

$$\rho(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x).$$

Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Следующие результаты показывают в каких случаях можно переходить к пределу под знаком интеграла. Необходимо отметить, что для интеграла Лебега эти условия являются значительно более слабыми, по сравнению с условиями предельного перехода под знаком интеграла Римана, где достаточным условием является равномерная сходимость последовательности функций.

Т е о р е м а 4.1.19 Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. *Если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *на* X *сходится к* $f(x)$ *и при всех* n

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x), \tag{4.1.7}$$

где $\varphi(x)$ *- интгерируема на* X, *то предельная функция* $f(x)$ *интегрируема на* X *и*

$$\lim_n \int_X f_n(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx).$$

З а м е ч а н и е Данная теорема справедлива и при ослабленных предположениях: она остается верной если сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ имеет место лишь почти всюду на X и неравенство (4.1.7) при каждом n также выполнено почти всюду.

Т е о р е м а 4.1.20 Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. *Пусть последовательность функций* $\{f_n(x)\}$ *неубывающая,то есть*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f_n(x) \leq ...,$$

причем функции $f_n(x)$ *интегрируемы и их интегралы ограничены в совокупности*

$$\int_X f_n(x)\mu(dx) \leq K.$$

Тогда почти всюду существует конечный предел

$$f(x) = \lim_n f_n(x),$$

функция $f(x)$ *интегрируема и*

$$\lim_X f_n(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx).$$

Т е о р е м а 4.1.21 Лемма Фату. *Если последовательность измеримых неотрицательных функций* $\{f_n(x)\}$ *сходится почти всюду на* X *к* $f(x)$ *и*

$$\int_X f_n(x)\mu(dx) \leq K,$$

то $f(x)$ *интегрируема и*

$$\int_X f(x)\mu(dx) \leq K.$$

Интеграл Лебега, интеграл Римана и интеграл Стилтьеса

Поскольку вычисление интеграла Римана для кусочно-непрерывных функций является хорошо известной задачей классичсекого анализа, то для приложений весьма важно, когда вычисление интеграла Лебега можно свести к интегралу Римана. Ограничимся случаем линейной меры Лебега на действительной прямой.

Т е о р е м а 4.1.22 *Если существует интеграл Римана*

$$I = (R) \int_a^b f(x)dx,$$

то $f(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$ *по мере Лебега* $\lambda(dx) = dx$ *и*

$$\int_{[a,b]} f(x)\lambda(dx) = I.$$

Во многих практически важных случаях вычисление интеграла Лебега по некоторой мере на действительно прямой можно свести к вычислению интеграла Стилтьеса по функции распределения этой меры.

Т е о р е м а 4.1.23 *Пусть* $f(x)$ *-* μ *- интегрируема на* $[a,b]$, *тогда*

$$\int_{[a,b]} f(x)\mu(dx) = (S) \int_a^b f(x)dF_\mu(x),$$

где $F_\mu(x)$ *- функция распределения меры* $\mu(dx)$, *а* (S) *- символ интеграла Стилтьеса.*

Для большинства приложений достаточно следующего представления для интеграла Стилтьеса. Пусть (см. Раздел 4.1.3)

$$F_\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dy}F_\mu(y)dy + \sum_{y \le x} \Delta F(y),$$

где $F^{'}(x)$ - кусочно-непрерывна и интеграл понимается в смысле Римана, а суммирование осуществляется по не более чем счетному множеству точек разрыва функции $F(x)$, тогда если функция $f(x)$ - кусочно-непрерывна и μ- интегрируема, то

$$(L) \int_R f(x)\mu(dx) = (S) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_\mu(x) = (R) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F^{'}(x)dx + \sum_{y \in R} f(y)\Delta F(y).$$

4.1.6 Прямые поизведения систем множеств и мер

Прямые произведения систем множеств

О п р е д е л е н и е 4.1.24 Множество Z упорядоченных пар (x_1, x_2), где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ называется *прямым произведением множеств* X_1 *и* X_2 и обозначается $X_1 \times X_2$.

Аналогично множество Z упорядоченных конечных последовательностей $(x_1, ..., x_n)$, где $x_k \in X_k$, называется *прямым произведением множеств* $X_1, ..., X_n$ и обозначается

$$Z = X_1 \times ... \times X_n.$$

■

О п р е д е л е н и е 4.1.25 Если $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ - $\sigma-$ алгебры множеств на пространствах X_k, то

$$\sigma\{\mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_n\}$$

обозначает наименьшую σ - алгебру на Z, содержащую все множества вида

$$A = A_1 \times ... \times A_n, \quad A_k \in \mathcal{A}_k.$$

■

Таким образом прямое произведение измеримых пространств $\{X_k, \mathcal{A}_k\}, k = 1, ..., n\}$ есть пространство

$$\{X_1 \times ... \times X_n, \sigma\{\mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_n\}\}.$$

Для $\sigma-$ алгебры $\sigma\{\mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_n\}$ используется обозначение

$$\mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_n.$$

Произведения мер. Теорема Фубини.

О п р е д е л е н и е 4.1.26 Мера $\mu = \mu_1 \times ... \times \mu_n$ на измеримом пространстве

$$\{X_1 \times ... \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_n\}$$

определяется как продолжение меры, заданной на алгебре, образованной конечными объединениями непересекающихся множеств вида

$$A = A_1 \times ... \times A_n, \quad A_k \in \mathcal{A}_k,$$

мера которых определена соотношением

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)...\mu_n(A_n).$$

Данная мера обозначается

$$\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes ... \otimes \mu_n.$$

■

Для приложений наиболее важна следующая

Т е о р е м а 4.1.24 Теорема Фубини. *Пусть заданы полные измеримые пространства* $\{X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1\}$ *и* $\{X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2\}$ *и на произведении измеримых пространств* $\{X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2\}$, *пополненном относительно меры* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, *задана измеримая функция* $f(x_1, x_2)$, *интегрируемая по мере* μ. *Тогда*

$$\int\limits_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\mu(dx_1 \times dx_2) = \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} f(x_1, x_2)\mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) = \int\limits_{X_2} \left(\int\limits_{X_1} f(x_1, x_2)\mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2). \tag{4.1.8}$$

З а м е ч а н и е Поскольку функции f и $|f|$ интегрируемы или не интегрируемы одновременно, то этот результат находится в соответствии с Теоремой Фубини в классическом анализе, где для возможности перестановки пределов интегрирования в кратном интеграле Римана по некоторому множеству $A \in R^2$ достаточно существования интеграла от модуля функции

$$\int\limits_A |f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 < \infty.$$

З а м е ч а н и е Из существования повторных интегралов в правой части (4.1.8) не следует ни само равенство (4.1.8), ни $\mu-$ интегрируемость функции f. Однако, если существует хотя бы один из повторных интегралов

$$\int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} |f(x_1, x_2)|\mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) < \infty, \quad \int\limits_{X_2} \left(\int\limits_{X_1} |f(x_1, x_2)|\mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2) < \infty,$$

то существует и любой из остальных интегралов в (4.1.8) и справедливо равенство (4.1.8).

4.2 Гильбертово пространство

4.2.1 Определение и основные свойства

О п р е д е л е н и е 4.2.1 *Линейное пространство* - это непустое множество X, элементы которого называются также *векторами,* на котором определены две операции: сложение (+) и умножение на скаляры ($*$). Если умножение определено на вещественные константы из R, то пространство наэывается *вещественным* или *действительным*, если умножение определено на комплексные константы из поля комплексных чисел C, то пространство называется *комплексным.*

Операции сложения и умножения обладают следующими свойствами:

1. $x + y = y + x, \quad$ (коммутативность);
2. $(x + y) + z = x + (y + z), \quad$ (ассоциативность)
3. $\exists \emptyset \in X \quad$ такой, что $\quad \emptyset + x = x$
4. $\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$;
5. $(\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * y$;
6. $(\alpha\beta) * x = \alpha(\beta * x)$;
7. $0 * x = \emptyset, \quad 1 * x = x$.

■

З а м е ч а н и е Когда это не будет вызывать недоразумений мы используем одно обозначение для нулевого элемента $\emptyset \in X$ и $0 \in R$, кроме того будем опускать знак умножения $*$.

О п р е д е л е н и е 4.2.2 *Подпространство* M линейного пространства X - есть подмножество, замкнутое относительно операций сложения и умножения: то есть

$$\forall \alpha, \beta \in R \quad \text{или} \in C, \quad x, y \in M : \qquad \alpha x + \beta y \in M.$$

■

Если $\{M_\alpha, \alpha \in I\}$ некоторый набор подпространств пространства X, то $\bigcap\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$ также подпространство пространства X.

О п р е д е л е н и е 4.2.3 Для произвольного множества $N \subseteq X$, *подпространство, натянутое на* N - есть множество всех линейных комбинаций элементов N. Это подпространство, обозначаемое $\mathcal{L}(N)$ можно еще охарактеризовать, как наименьшее подпространство X, содержащее множество M. ■

О п р е д е л е н и е 4.2.4 *Скалярным произведением* на линейном пространстве называется билинейная функция, обозначаемая в дальнейшем (x, y), принимающая значения из поля скаляров R или C, и обладающая следующмими свойствами:

1. $\forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in R \quad$ или $\in C \qquad (\alpha * x + \beta * y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;
2. $\overline{(x, y)} = (y, x)$, символ $\overline{(\cdot)}$ - есть символ комплексного сопряжения;
3. $\forall x \in X, \quad (x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Rightarrow x = \emptyset$.

Линейное пространство со скалярным произведением называется еще *евклидовым* пространством. ■

Скалярное произведение определяет на X *норму* соотношением

$$||x|| = (x, x)^{1/2}.$$

Непосредственно из определений вытекают следуюшие свойства скалярного произведения и определяемой им нормы:

1. $||\alpha * x|| = |\alpha| ||x||$;
2. $|(x, y)| \leq ||x|| ||y||, \quad$ (неравенство Коши-Буняковского);
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \quad$ (неравенство треугольника);

4. скалярное произведение непрерывно, то есть если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Тем самым линейное пространство со скалярным произведением становится *линейным нормированным пространством.*

Определение 4.2.5 Последовательность элементов $\{x_n\} \in X$ называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши* если

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0,$$

то есть

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon): \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon), \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

■

Определение 4.2.6 Линейное нормированное пространство называется *полным* если любая фундаментальная последовательность сходится по норме к элементу этого пространства. ■

Определение 4.2.7 *Гильбертовым пространством* называется полное пространство со скалярным произведением или полное евклидово пространство. ■

Замечание Любое нормированное линейное пространство может быть пополнено до полного пространства. Таким образом, любое евклидово пространство может быть пополнено до гильбертова пространства.

Замечание В дальнейшем гильбертово пространство будут обозначаться буквами H или $\mathcal{H}$.

Определение 4.2.8 Подпространство гильбертова пространства называется *замкнутым,* если оно содержит все пределы фундаментальных последовательностей. Таким образом, замкнутое подпространство гильбертова пространства само является гильбертовым пространством. ■

4.2.2 Гильбертово пространство $L^2\{X, \mathcal{A}, \mu\}$.

Определение 4.2.9 Множество действительных измеримых функций интегрируемых с квадратом по мере μ есть евклидово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_X f(x)g(x)\mu(dx).$$

■

В силу неравенства

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)|^2 + |g(x)|^2,$$

скалярное произведение определено для любой пары функций, f, g, удовлетворяющих неравенствам

$$\int\limits_X |f(x)|^2\mu(dx) < \infty, \quad \int\limits_X |g(x)|^2\mu(dx) < \infty.$$

Норма, определяемая скалярным произведением есть

$$\|f\| = \left(\int\limits_X |f(x)|^2\mu(dx)\right)^{1/2},$$

при этом нулевой элемент - есть функция равная нулю почти всюду. Пополненное по этой норме евклидово пространство есть гильбертово пространство *классов эквивалентности функций, совпадающих почти всюду,* то есть мы считаем, что $f = g$, если

$$\mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

При этом для каждого из класов эквивалентности выбирается один из представителей.

О п р е д е л е н и е 4.2.10 Пространство классов эквивалентности квадратично интегрируемых функций называется действительным гильбертовым пространством $L^2\{X, \mathcal{A}, \mu\}$. ■

Для вероятностных приложений часто удобно рассматривать пространство измеримых комплексных функций

$$f(x) = a(x) + ib(x),$$

с измеримыми функциями $a(x), b(x)$, скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_X f(x)\overline{g(x)}\mu(dx),$$

и нормой

$$||f|| = \left(\int\limits_X |f(x)|^2 \mu(dx) \right)^{1/2}, \tag{4.2.1}$$

где $|f(x)|^2 = |a(x)|^2 + |b(x)|^2$. Пополнение этого евклидова пространства по норме (4.2.1) - есть гильбертово пространство классов эквивалентности измеримых комплексных функций совпадающих почти всюду.

4.2.3 Ортогональность и проектирование

О п р е д е л е н и е 4.2.11 Два элемента $x, y \in H$ называются *ортогональными* (обозначается $x \perp y$) если $(x, y) = 0$.

Если $Y \subset H$ - произвольное подмножество, то ортогональность $x \perp Y$ означает, что $(x, y) = 0, \forall y \in Y$. ■

Пусть $\mathcal{L}(Y)$ наименьшее замкнутое пространство, содержащее Y. Тогда в силу непрерывности скалярного произведения из $x \perp Y$ следует $x \perp \mathcal{L}(Y)$.

О п р е д е л е н и е 4.2.12 Если M - замкнутое подпространство, то определим его *ортогональное дополнение* $M^\perp$ как

$$M^\perp = \{x \in H : x \perp M\}.$$

■

В силу непрерывности скалярного произведения $M^\perp$ - есть замкнутое подпространство.

Т е о р е м а 4.2.1 *Пусть H - гильбертово пространство и $M \subset H$ - замкнутое подпространство. Тогда любой элемент $x \in H$ имеет единственное разложение вида:*

$$x = y + z,$$

где $y \in M, z \perp M$. Кроме того,

$$||x - y|| = \min_{v \in M} ||x - v||.$$

О п р е д е л е н и е 4.2.13 Элемент $y(x)$ называется *проекцией x на M* и обозначается $\hat{\pi}_M(x)$. ■

При этом

$$(\hat{\pi}_M(x), \hat{\pi}_M(x) - x) = 0,$$

а условия

$$\hat{\pi}_M(x) \in M, \quad (\hat{\pi}_M(x), \hat{\pi}_M(x) - x) = 0, \tag{4.2.2}$$

определяют проекцию единственным образом.

Поскольку для любого $x \in H$

$$x = (x - \hat{\pi}_M(x)) + \hat{\pi}_M(x),$$

то тем самым определяется разложение любого элемента $x \in H$ на сумму двух ортогональных элементов, и следовательно, пространство H разложимо в прямую сумму

$$H = M \oplus M^\perp,$$

пространства M и его ортогонального дополнения $M^{\perp}$.

Оператор $\hat{\pi}_M(x)$, который ставит в соответствие каждому элементу $x \in H$ его проекцию на подпространство M, является линейным и удовлетворяет следующему естественному свойству

$$\hat{\pi}_M(\hat{\pi}_M(x)) = \hat{\pi}_M(x).$$

Глава 5

Приложение 2. Необходимые сведения из теории теории вероятностей.

5.1 События и вероятности

О п р е д е л е н и е 5.1.1 Совокупность объектов $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, где

1. Ω - множество точек $\omega \in \Omega$, называемых *элементарными событиями*;
2. $\mathcal{F}$ - алгебра подмножеств Ω, образующих систему *событий*;
3. $\mathbf{P}$ - конечно-аддитивная непрерывная мера на алгебре $\mathcal{F}$, с $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, называемая *вероятностью* (см. Определение 4.1.4)

образуют *вероятностную модель.* ■

В дальнейшем мы полагаем, что система событий $\mathcal{F}$ - есть σ - алгебра (см. Определение 4.1.2, с продолженной мерой (вероятностью) $\mathbf{P}$ и пополненная множествами нулевой меры $\mathbf{P}$ (нулевой вероятности)(см. Определение 4.1.15). Такая вероятностная модель называется в дальнейшем *полным вероятностным пространством.*

5.2 Случайные величины

5.2.1 Определение и основные свойства

О п р е д е л е н и е 5.2.1 *Случайной величиной* называется действительная измеримая функция $\xi(\omega)$, определенная на измеримом пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}\}$. ■

В силу Теорем 4.1.8, 4.1.9 сумма, разность и произведение двух случайных величин, частное двух случайных величин, при условии, что знаменатель не обращается в нуль, также случайная величина.

Последовательность случайных величин $\{\xi_n(\omega), n = 1, 2, ...\}$ обладает тем свойством, что

$$\sup_n \xi_n(\omega), \quad \inf_n \xi_n(\omega), \quad \limsup_n \xi_n(\omega), \quad \liminf_n \xi_n(\omega),$$

и $\lim\limits_n \xi_n(\omega)$ если он существует, являются случайными величинами.

О п р е д е л е н и е 5.2.2 Две случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, называются *эквивалентными,* если

$$\mathbf{P}\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\} = 0.$$

■

Из Теоремы 4.1.6 следует, что любая борелевская функция $g(x)$ от случайной величины $\xi(\omega)$ является случайной величиной, то есть функция $g(\xi(\omega))$ является $\mathcal{F}$ - измеримой.

5.2.2 Различные виды сходимости случайных величин

О п р е д е л е н и е 5.2.3 Последовательность $\{\xi_n(\omega), n = 1, 2, ...\}$ случайных величин называется *сходящейся* $(\mathbf{P} - $ *п.н.*$)$ к случайной величине $\xi(\omega)$, если

$$\mathbf{P}\{\omega \in \Omega : \lim_n \xi_n(\omega) \neq \xi(\omega)\} = 0.$$

■

О п р е д е л е н и е 5.2.4 Последовательность $\{\xi_n(\omega), n = 1, 2, ...\}$ случайных величин называется *сходящейся по вероятности* к случайной величине $\xi(\omega)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_n \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} = 0.$$

■

Т е о р е м а 5.2.1 *У любой последовательности* $\{\xi_n(\omega), n = 1, 2, ...\}$ *случайных величин, сходящейся по вероятности к случайной величине* $\xi(\omega)$, *существует подпоследовательность* $\xi_{n_k} \to \xi, \quad (\mathbf{P} - $ *п.н.*$)$.

Необходимое и достаточное условие сходимости по вероятности есть *фундаментальность* последовательности $\{\xi_n(\omega), n = 1, 2, ...\}$.

О п р е д е л е н и е 5.2.5 Последовательность $\{\xi_n(\omega), n = 1, 2, ...\}$ случайных величин называется *фундаментальной по вероятности* если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n,m} \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi m(\omega)| > \varepsilon\} = 0.$$

■

Т е о р е м а 5.2.2 *Для сходимости последоватетельности* ξ_n *по вероятности необходимо и достаточно, чтобы последовательность была фундаментальной.*

Аналогичный критерий существует и для сходимости $(\mathbf{P} - \text{п.н.})$.

Т е о р е м а 5.2.3 *Для сходимости последовательности* $\xi_n \quad (\mathbf{P} - $ *п.н.*$)$ *необходимо и достаточно, чтобы последовательность была фундаментальной с вероятностью* 1 *то есть*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{\sup_{k \geq 0} |\xi_{n+k} - \xi_n| > \varepsilon\} = 0.$$

5.2.3 $\sigma-$ алгебры и функции распределения, порождаемые случайными элементами

Случайная величина

Пусть $\xi(\omega)$ - случайная величина. Рассмотрим множества из $\mathcal{F}$ вида

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B, \quad B \in \mathcal{B}(R)\}, \tag{5.2.1}$$

иными словами, прообразы борелевских множеств, при отображении $\Omega \to R$, задаваемой функцией $\xi(\omega)$.

О п р е д е л е н и е 5.2.6 Наименьшую $\sigma-$ алгебру, содержащую все множества вида (5.2.1), будем называть $\sigma-$ алгеброй, порожденной случайной величиной ξ. Эта $\sigma-$ алгебра обозначается $\mathcal{F}^\xi$. ■

Т е о р е м а 5.2.4 *Пусть* $\varphi(x)$ *- некоторая борелевская функция, тогда случайная величина* $\eta(\omega) = \varphi(\xi(\omega))$ *-* $\mathcal{F}^\xi$ *измерима.*

Обратно, если некоторая случайная величина $\eta(\omega)$ *-* $\mathcal{F}^\xi$ *измерима, то существует борелевская функция* $\varphi(x)$ *такая, что* $\eta(\omega) = \varphi(\xi(\omega))$.

О п р е д е л е н и е 5.2.7 Функция $F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\}$ называется *функцией распределения случайной величины* ξ. ■

Функция распределения $F_\xi(x)$ обладает свойствами функции распределения меры на измеримом пространстве $\{R, \mathcal{B}(R)\}$ (см. Определение 4.1.7), которое полностью применимо с учетом соотношения $\mu(R) = 1$. Для любой функции распределения $F(x)$ существует полное вероятностое пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ и случайная величина $\xi(\omega)$ такая, что $\mathbf{P}\{\xi(\omega) \le x\} = F(x)$.

Определение 5.2.8 Если случайная величина принимает конечное или счетное множество значений $\{a_1, ..., a_n, ...\}$ с вероятностями $\{p_1, ..., p_n, ...\}$, $\quad p_n > 0, \quad \sum\limits_n p_n = 1$, то случайная величина называется *дискретной* и ее функция распределения равна

$$F_\xi(x) = \sum_{a_k \le x} p_k,$$

при этом для любого множества $B \in \mathcal{B}(R)$,

$$\mathbf{P}\{\xi(\omega) \in B\} = \sum_{\{n : \xi_n \in B\}} p_n.$$

■

Определение 5.2.9 Если функция распределения случайной величины допускает представление

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(y) dy, \quad \text{где} \quad p_\xi(y) \ge 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y) dy = 1,$$

а интеграл понимается как интеграл Римана или Лебега, то случайная величина называется *непрерывной*. Для любого множества $B \in \mathcal{B}(R)$

$$\mathbf{P}\{\xi(\omega) \in B\} = \int\limits_{\{y \in B\}} p_\xi(y) dy.$$

Функция $p_\xi(y)$ называется *плотностью распределения случайной величины* ξ. ■

В общем случае функция распределения $F_\xi(x)$ есть функция ограниченной вариации непрерывная справа и для вычисления вероятностей событий $\{\xi(\omega) \in B\}$ следует вычислять иетеграл Лебега-Стилтьеса или Римана-Стилтьеса (если он определен)

$$\mathbf{P}\{\xi(\omega) \in B\} = \int\limits_{\{y \in B\}} dF_\xi(y).$$

Случайный вектор

Пусть $\xi(\omega) = \{\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)\}$ - упорядоченная совокупность случайных величин - (*случайный вектор*). Рассмотрим множества из $\mathcal{F}$ вида

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B, \quad B \in \mathcal{B}(R^n)\}, \tag{5.2.2}$$

иными словами, прообразы борелевских множеств, при отображении $\Omega \to R^n$, задаваемом вектор-функцией $\xi(\omega)$.

Определение 5.2.10 Наименьшую $\sigma-$ алгебру, содержащую все множества вида (5.2.2), будем называть $\sigma-$ алгеброй, порожденной совокупностью случайных величин $\xi_k, k = 1, ..., n$. Эта $\sigma-$ алгебра обозначается $\sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\}$. ■

Определение 5.2.11 Функция

$$F_\xi(x_1, ..., x_n) = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) \le x_1, ..., \xi_n(\omega) \le x_n\}$$

называется *функцией распределения случайного вектора* ξ. ■

Функция распределения случайного вектора обладает свойствами функции распределения меры на измеримом пространстве $\{R^n, \mathcal{B}(R^n)\}$ (см. Определение 4.1.10), которое полностью применимо с учетом соотношения $\mu(R^n) = 1$. Для любой функции распределения $F(x_1, ..., x_n)$ существует полное вероятностое пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ и случайный вектор $\xi(\omega)$ такой, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\omega) \le x_1, ..., \xi_n(\omega) \le x_n\} = F(x_1, ..., x_n).$$

Для любого борелевского множества в R^n вероятность события $\{\xi(\omega) \in R^n\}$ вычисляется как интеграл Лебега

$$\mathbf{P}\{\xi(\omega) \in R^n\} = \int_B F_\xi(dx_1, ..., dx_n).$$

Если мера F_ξ имеет плотность, то есть

$$F_\xi(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} ... \int_{-\infty}^{x_1} p_\xi(y_1, ..., y_n) dy_1 ... dy_n,$$

то

$$\mathbf{P}\{\xi(\omega) \in R^n\} = \int_B p_\xi(y_1, ..., y_n) dy_1, ..., dy_n.$$

Интеграл понимается как интеграл Лебега или как кратный интеграл Римана, если он определен.

О п р е д е л е н и е 5.2.12 Случайные величины $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ независимы в совокупности, если для любого набора событий $B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}(R)$

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\omega) \in B_1, ..., \xi_n(\omega) \in B_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1(\omega) \in B_1\} ... \mathbf{P}\{\xi_n(\omega) \in B_n.$$

■

Т е о р е м а 5.2.5 *Для того, чтобы случайные величины* $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ *были независимы в совокупности необходимо и достаточно, чтобы для всех* $(x_1, ..., x_n) \in R^n$

$$F_\xi(x_1, ..., x_n) = F_{\xi_1}(x_1) ... F_{\xi_n}(x_n).$$

Случайный процесс

Пусть $\{\xi(t, \omega), \quad t \in T, T \in R\}$ - случайный процесс. Рассмотрим множества из $\mathcal{F}$ вида

$$\{\omega \in \Omega : (\xi(t_1, \omega), ..., \xi(t_n, \omega) \in B, \quad B \in \mathcal{B}(R^n), \{t_1, ..., t_n\} \in T, n < \infty\}, \tag{5.2.3}$$

иными словами, прообразы борелевских множеств, при отображениях $\Omega \to R^n$, задаваемых всевозможными вектор-функциями $\{\xi(t_1, \omega), ..., \xi(t_n, \omega)\}, \{t_1, ..., t_n\} \in T, n < \infty\}$.

О п р е д е л е н и е 5.2.13 Наименьшую $\sigma-$ алгебру, содержащую все множества вида (5.2.3), будем называть $\sigma-$ алгеброй, порожденной случайным процессом $\{\xi(t, \omega), \quad t \in T\}$. Эта $\sigma-$ алгебра называется также $\sigma-$ алгеброй *цилиндрических множеств* в измеримом пространстве $\{R^T, \mathcal{B}(R^T)\}$.

О п р е д е л е н и е 5.2.14 **Функция**

$$F_\xi(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : \xi(t_1, \omega) \le x_1, ..., \xi(t_n, \omega) \le x_n\}$$

называется *$n-$ мерной функцией распределения случайного процесса* ξ. ■

Функция распределения случайного вектора обладает свойствами функции распределения меры на измеримом пространстве $\{R^T, \mathcal{B}(R^T)\}$ (см. Определение 4.1.14), которое полностью применимо с учетом соотношения $\mu(R^T) = 1$. По теореме Колмогорова (см. Теорему 4.1.5) для любой совокупности конечно-мерных функций распределения $F(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$ существует полное вероятностое пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ и случайный процесс $\xi(t, \omega)$ такой, что

$$\mathbf{P}\{\xi(t_1, \omega) \le x_1, ..., \xi(t_n, \omega) \le x_n\} = F(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n).$$

5.3 Математическое ожидание

5.3.1 Определение и свойства

О п р е д е л е н и е 5.3.1 *Математическим ожиданием случайной величины* $\xi(\omega)$, определенной на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, называется

$$\mathbf{M}\{\xi\} = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega).$$

Математическое ожидание определено, если соответствующий интеграл существует в смысле Лебега. ■

Если математическое ожидание случайной величины ξ определено, то его значение можно найти как

$$\mathbf{M}\{\xi\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y F_{\xi}(dy), \tag{5.3.1}$$

где интеграл справа понимается как интеграл Лебега по мере на R. Существование интеграла в правой части (5.3.1) вытекает из существования математического ожидания и наборот, из существования интеграла следует существование математического ожидания.

Если этот интеграл существует как интеграл Римана-Стилтьеса и функция распределения не имеет сингулярной компоненты, то его можно записать в более привычном виде, используя представление для функции распределения (4.1.2)

$$\mathbf{M}\{\xi\} = (R) \int\limits_{-\infty}^{\infty} y p_{\xi}(y) dy + \sum_{x_i} x_i \Delta F(x_i).$$

Основные свойства математического ожидания аналогичны свойствам интеграла Лебега (см. Раздел 4.1.5)

1. Математические ожидания $\mathbf{M}\{\xi\}$ и $\mathbf{M}\{|\xi|\}$ существуют или не существуют одновременно, и $|\mathbf{M}\{\xi\}| \le \mathbf{M}\{|\xi|\}$.

2. $\mathbf{M}\{I_A(\omega)\} = \int\limits_{\Omega} I_A(\omega) \mathbf{P}(d\omega) = \mathbf{P}\{\omega \in A\}$.

3. Если $\mathbf{M}\{\xi\}$ существует, то для любой константы k
$$\mathbf{M}\{k\xi\} = k\mathbf{M}\{\xi\}.$$

4. Если $\mathbf{M}\{\xi\}$ и $\mathbf{M}\{\eta\}$ существуют, то
$$\mathbf{M}\{\xi + \eta\} = \mathbf{M}\{\xi\} + \mathbf{M}\{\eta\}.$$

5. Если $\xi \le \eta$, то $\mathbf{M}\{\xi\} \le \mathbf{M}\{\eta\}$.

6. Если $\mathbf{M}\{\xi\}$ существует, то для каждого $A \in \mathcal{F}$ существует $\mathbf{M}\{\xi I_A(\omega)\}$.

7. Пусть $\mathbf{M}\{\xi\}$ существует, тогда функция множеств
$$Q(A) = \int\limits_{A} \xi(\omega) P(d\omega) = \mathbf{M}\{\xi I_A(\omega)\}$$
счетно-аддитивна.

8. *Неравенство Чебышева.* Если $\xi \geq 0$, $\mathbf{M}\{\xi\}$ существует, и $c > 0$, то

$$\mathbf{P}\{\xi \geq c\} \leq \frac{\mathbf{M}\{\xi\}}{c},$$

если существует $\mathbf{M}\{|\xi|^p\} < \infty, \quad p > 0$, то выполняется *неравенство Маркова*

$$\mathbf{P}\{\xi \geq c\} \leq \frac{\mathbf{M}\{|\xi|^p\}}{c^p}$$

и если существует $\mathbf{M}\{\xi^2\} < \infty$, то

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\{\xi\}| \geq c\} \leq \frac{\mathbf{D}\{\xi\}}{c^2},$$

где $D\{\xi\} = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi\})^2\}$ - дисперсия случайной величины ξ.

Сходимость в среднем и сходимость по распределению.

Определение 5.3.2 Последовательность $\{\xi_n(\omega), n = 1, 2, ...\}$ случайных величин называется *сходящейся в среднем порядка* p, $\quad 0 < p < \infty$, к случайной величине $\xi(\omega)$, если

$$\lim_n \mathbf{M}\{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p\} = 0.$$

■

Этот вид сходимости называется сходимостью в L^p при $p = 2$ этот вид сходимости называется также сходимостью в среднем квадратическом и обозначается $\xi = \underset{n}{l.i.m.}\xi_n$. ■

Определение 5.3.3 Последовательность $\{\xi_n(\omega), n = 1, 2, ...\}$ случайных величин называется *сходящейся по распределению* к случайной величине $\xi(\omega)$, если для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$

$$\lim_n \mathbf{M}\{f(\xi_n(\omega))\} = \mathbf{M}\{f(\xi(\omega))\}.$$

■

Соотношение между всеми типами сходимости определяется следующей теоремой.

Теорема 5.3.1 *Имеют место следующие импликации:*

1. *"Сходимость* ($\mathbf{P}$ *− п.н.)" ⇒ "Сходимость по вероятности;"*

2. *"Сходимость в* L^p*" ⇒ "Сходимость по вероятности;"*

3. *"Сходимость по вероятности" ⇒ "Сходимость по распределению."*

Предельный переход под знаком математического ожидания

Следующие результаты вытекают из теорем о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Теорема 5.3.2 *о монотонной сходимости. Пусть* $\eta, \xi, \xi_1, ...$ *- случайные величины.*

Если $\xi_n \geq \eta$ *для всех* $n \geq 1, \quad \mathbf{M}\{\eta\} > -\infty$ *и* $\xi_n \uparrow \xi$, *то*

$$\mathbf{M}\{\xi_n\} \uparrow \mathbf{M}\{\xi\}.$$

Если $\xi_n \leq \eta$ *для всех* $n \geq 1, \quad \mathbf{M}\{\eta\} < \infty$ *и* $\xi_n \downarrow \xi$, *то*

$$\mathbf{M}\{\xi_n\} \downarrow \mathbf{M}\{\xi\}.$$

Т е о р е м а 5.3.3 Лемма Фату. *Если последовательность* $\{\xi_n, n \geq 1\}$ *неотрицательных случайных величин сходится почти всюду к случайной величине* ξ *и*

$$\mathbf{M}\{\xi_n\} \leq K,$$

то $\mathbf{M}\{\xi\}$ *существует и*

$$\mathbf{M}\{\xi\} \leq K.$$

Т е о р е м а 5.3.4 Лебега о мажорируемой сходимости. *Если последовательность* $\{\xi_n\}$ *сходится к* ξ *почти всюду и для некоторой случайной величины* $\eta, \quad \mathbf{M}\{\eta\} < \infty, \quad |\xi_n| \leq \eta$, *тогда*

$$\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty, \quad \mathbf{M}\{\xi_n\} \to \mathbf{M}\{\xi\},$$

и

$$\mathbf{M}\{|\xi_n - \xi|\} \to 0,$$

при $n \to \infty$.

Необходимое и достаточное условие для предельного перехода под знаком математического ожидания формулируется в терминах понятия равномерной интегрируемости.

О п р е д е л е н и е 5.3.4 Последовательность случайных величин ξ_n *равномерно интегрируема* если

$$\lim_{C \uparrow \infty} \sup_{n \geq 0} \int\limits_{|\xi_n| > C} |\xi_n| \mathbf{P}(d\omega) = 0.$$

■

Простое достаточное условие равномерной интегрируемости выражается следующим *критерием Валле-Пуссена.*

Т е о р е м а 5.3.5 *Пусть* $\{\xi_1,\, n \geq 1\}$ *- последовательность интегрируемых случайных величин и* $G = G(t)$ *- неотрицательная возрастающая функция, определенная для* $t \geq 0$, *такая, что*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{G(t)}{t} = \infty, \quad \sup_n \mathbf{M}\{G(|\xi_n|)\} < \infty.$$

Тогда семейство случайных величин $\{\xi_n,\, n \geq 1\}$ *является равномерно интегрируемым.*

Т е о р е м а 5.3.6 *Пусть* $0 \leq \xi_n \to \xi$ *и* $\mathbf{M}\{\xi_n\} < \infty$. *Тогда* $\mathbf{M}\{\xi_n\} \to \mathbf{M}\{\xi\} < \infty$ *тогда и только тогда, когда семейство случайных величин* $\{\xi_n,\, n \geq 1\}$ *равномерно интегрируемо.*

5.4 Условное математическое ожидание

5.4.1 Условное математическое ожидание относительно σ - алгебр

Понятие условного математического ожидания относительно некоторой σ - алгебры является обобщением классического понятия, вводимого с помощью формулы Байеса и которое можно определить как

$$\mathbf{M}\{\xi|B\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x|B)$$

с интегралом по условной функции распределения

$$F_\xi(x|B) = \mathbf{P}\{\xi \leq x|B\} = \frac{\mathbf{P}\{(\xi \leq x) \cap B\}}{\mathbf{P}\{B\}}.$$

Необходимоть обобщения этого определения связана с тем, что данная формула теряет смысл если вероятность события B равна нулю, что часто имеет место, если событие B порождается случайной величиной с непрерывным распределением. Поэтому в ниже вводится общее определение условного математического ожидания и приводятся основные свойства этой характеристики случайной величины.

Определение и существование условного математического ожидания

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, $\mathcal{G}$ - некоторая σ - подалгебра алгебры $\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ и $\xi(\omega)$ - случайная величина такая, что $\mathbf{M}|\xi| < \infty$.

О п р е д е л е н и е 5.4.1 *Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$* называется случайная величина, обозначаемая $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}$ является $\mathcal{G}$ - измеримой;
2. для любого множества $A \in \mathcal{G}$ выполняется равенство

$$\int\limits_A \xi d\mathbf{P} = \int\limits_A \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} d\mathbf{P}. \tag{5.4.1}$$

■

Т е о р е м а 5.4.1 *Условное математическое ожидание случайной величины ξ, такой что $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$ существует и определено единственным образом с точностью до множества $\mathcal{N}$, $\mathbf{P}\{\mathcal{N}\} = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Определим меру $\mathbf{Q}$ на измеримом пространстве $\{\Omega, \mathcal{G}\}$ соотношением

$$\mathbf{Q}(A) = \int\limits_A \xi d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{G}.$$

Эта мера является абсолютно непрерывной относительно меры $\mathbf{P}$, рассматриваемой на том же пространстве (см. Теорема 4.1.17). Действительно, если для некоторого множества A мера $\mathbf{P}(A) = 0$ то отсюда в силу интегрируемости случайной величины ξ следует, что и мера $\mathbf{Q}(A) = 0$. По теореме Родона-Никодима (см. Теорема 4.1.18) это означает, что существует случайная величина, называемая производной Родона-Никодима $\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega)$, определенная с точностью до множества меры нуль (по мере $\mathbf{P}$) и измеримая относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$ такая, что для любого события $A \in \mathcal{G}$

$$\mathbf{Q}(A) = \int\limits_A \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) d\mathbf{P}.$$

Данное соотношение означает, что для любого события $A \in \mathcal{G}$

$$\mathbf{Q}(A) = \int\limits_A \xi d\mathbf{P} = \int\limits_A \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) d\mathbf{P},$$

и следовательно,

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega).$$

■

Свойства условного математического ожидания

Следующие свойства условного математического ожидания непосредственно вытекают из определения

1. Если $\xi(\omega) = C = const \quad (\mathbf{P} -$ п.н.), то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = C \quad (\mathbf{P} -$ п.н.).
2. Если $\xi(\omega) \le \eta(\omega) \quad (\mathbf{P} -$ п.н.), то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} \le \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} -$ п.н.).
3. $|\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}| \le \mathbf{M}\{|\xi||\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} -$ п.н.).
4. Если a, b - заданные константы, ξ, η - интегрируемые случайные величины, то

$$\mathbf{M}\{a\xi + b\eta|\mathcal{G}\} = a\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} + b\mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

5. Пусть $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ - тривиальная σ - алгебра. Тогда,
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
6. Пусть случайная величина ξ измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$, тогда $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \xi, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
7. $\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\xi\}$.
8. Если $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_1\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
9. Если $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
10. Если случайная величина ξ не зависит от σ - алгебры $\mathcal{G}$, то есть для любого $B \in \mathcal{G}$ случайные величины ξ и I_B - независимы, то
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi\}.$$
11. Пусть η измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$, и $\mathbf{M}\{|\xi\eta|\} < \infty$, тогда
$$\mathbf{M}\{\xi\eta|\mathcal{G}\} = \eta\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
12. **Неравенство Иенсена.** Пусть $g(x)$ - выпуклая вниэ функция такая, что $\mathbf{M}\{|g(x)|\} < \infty$, тогда
$$g[\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}] \leq \mathbf{M}\{[g(\xi)|\mathcal{G}]\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
13. Пусть η - $\mathcal{G}$ произвольная измеримая случайная величина. Если $\mathbf{M}\{\xi^2\} < \infty$, $\mathbf{M}\{\eta^2\} < \infty$, то
$$\mathbf{M}\{(\xi - \eta)^2\} \geq \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2\}.$$

Доказательство [свойство (13)]. Вычислим
$$\mathbf{M}\{(\xi - \eta)^2\} = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} + \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2\} =$$
$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2\} + \mathbf{M}\{(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2\} + 2\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\}.$$
Покажем, что последнее слагаемое равно нулю. Действительно, по свойству (7)
$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)|\mathcal{G}\}\}.$$
Далее, поскольку случайная величина $(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)$ является $\mathcal{G}-$ измеримой и
$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = 0,$$
то по свойству (10)
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\}(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\} = 0.$$
И, наконец, так как $\mathbf{M}\{(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2)\} \geq 0$, получаем соотношение (13). ■

Замечание Свойство (13) является чрезвычайно важным в задачах оценивания случайных величин. Действительно, пусть дана пара случайных величин, $\{\xi, \eta\}$, первая из которых ненаблюдаема, а вторая наблюдаема. Предположим, что мы хотим оценить случайную величину ξ наилучшим образом по наблюдению случайной величины η. Ясно, что всякая такая оценка есть не что иное как какая-то измеримая функция случайной величины η, то есть оценка ищется в виде $\hat{\xi} = \varphi(\eta)$. В качестве меры близости оценки и самой случайной величины ξ можно выбрать
$$\mathbf{M}|\xi - \hat{\xi}|^2 = \mathbf{M}|\xi - \varphi(\eta)|^2.$$
Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{F}^\eta$, тогда $\varphi(\eta)$ - есть $\mathcal{G}$ - измеримая случайная величина, и в силу свойства (13)
$$\mathbf{M}\{\xi - \varphi(\eta)\}^2 \geq \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2$$
для любой функции φ. Это означает, что условное математическое ожидание обладает экстремальным свойством наилучшей оценки в среднеквадратическом смысле.

З а м е ч а н и е   Если объединить это свойство вместе со свойством (8), то можно увидеть, что оператор взятия условного математического ожидания является оператором проектирования случайных величин $\xi \in L^2\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ на множество $\mathcal{G}$ - измеримых случайных величин, и при этом выполняется естественное условие ортогональности

$$(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}) \perp \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\},$$

поскольку

$$\mathbf{cov}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}), \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\}\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = 0.$$

5.4.2 Примеры вычисления условных математических ожиданий

Дискретная случайная величина

Пусть η - дискретная случайная величина, принимающая счетное множество значений $\{y_k,\, k = 1, ...\}$ с вероятностями $\mathbf{P}\{\eta = y_k\} > 0$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta = y_k\} = 1$.

Пусть ξ интегрируемая случайная величина. Для любого события $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{P}(A|\eta = y_k) = \frac{\mathbf{P}(A \cap \{\eta = y_k\})}{\mathbf{P}(\eta = y_k)}, \quad k \geq 1.$$

Для $y \in R \setminus \{y_1, y_2, ...\}$ условная вероятность может быть определена произвольным образом, например, можно положить ее равной нулю.

По определению для любого множества $A \in \mathcal{F}^\eta$ должно выполняться равенство

$$\int\limits_A \xi d\mathbf{P} = \int\limits_A \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} d\mathbf{P}. \tag{5.4.2}$$

Возьмем в качестве $A = \{\eta = y_k\}$, тогда равенство (5.4.2) будет выполняться если

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} = \mathbf{M}\{\xi|\eta = y\} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbf{P}(\eta = y)} \displaystyle\int\limits_{\{\omega:\eta = y\}} \xi d\mathbf{P}, & y = y_k,\, k \geq 1, \\ 0, \quad y = R \setminus \{y_1, y_2, ...\}. \end{cases}$$

Поскольку любое подмножество $A \in \mathcal{F}^\eta$ представимо как счетное объединение множеств вида $\{\eta = y_k\}$, то равенство (5.4.2) выполнено и для любого множества $A \in \mathcal{F}^\eta$, и следовательно условное математическое ожидание определено как измеримая функция от случайной величины η.

Случайная величина, имеющая плотность

Пусть дана пара случайных величин $\{\xi, \eta\}$, имеющих совместную плотность распределения $p_{\xi\,\eta}(x, y) \geq 0$ и $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$. Покажем, что условное математическое ожидание $\mathbf{M}\{\xi|\eta\}$ можно вычислить по формуле

$$\mathbf{M}\{\xi|\eta\} = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx}{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx}, & \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx > 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx = 0. \end{cases}$$

По определению должно выполняться равенство (5.4.1). В качестве множества $A \in \mathcal{F}^{\eta}$ возьмем $A = \{\eta \leq y\}$. Кроме того, условное математическое ожидание есть $\mathcal{F}^{\eta}$ - измеримая случайная величина, и поэтому по Теореме 5.2.4 существует борелевская функция $\varphi(y)$ такая, что

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^{\eta}\} = \varphi(\eta).$$

Подставив это соотношение в равенство (5.4.1), получим

$$\int\limits_{A} \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^{\eta}\} d\mathbf{P} = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du\,dv,$$

$$\int\limits_{A} \xi\, d\mathbf{P} = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du\,dv.$$

Равенство (5.4.1) выполняется при всех $y \in R$, поэтому в силу теоремы Фубини, получаем следующее соотношение, которому должна удовлетворять функция φ

$$\varphi(v) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du. \tag{5.4.3}$$

Поскольку равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du = 0$$

влечет за собой в силу интегрируемости ξ выполнение равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du = 0$$

то функция $\varphi(v)$

$$\varphi(v) = \begin{cases} \dfrac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du}, & \text{если} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du > 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du = 0. \end{cases}$$

лействительно удовлетворяет уравнению (5.4.3), и определяет условное математическое ожидание.

Гауссовские случайные величины и вектора

Пусть в предыдущем примере совместное распределение случайных векторов $\{\xi, \eta\}$ - гауссовское с параметрами

$$\mathbf{M}\{\xi\} = m_{\xi}, \quad \mathbf{M}\{\eta\} = m_{\eta},$$

$$\mathbf{cov}\{\xi\} = d_{\xi\,\xi}, \quad \mathbf{cov}\{\eta\} = d_{\eta\,\eta} > 0, \quad \mathbf{cov}\{\xi, \eta\} = d_{\xi\,\eta}.$$

Тогда условное математическое ожидание $\mathbf{M}\{\xi|\eta\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^{\eta}\}$ можно вычислить по формуле

$$\mathbf{M}\{\xi|\eta\} = m_{\xi} + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_{\eta}), \tag{5.4.4}$$

при этом
$$\mathbf{cov}\{(\xi - M\{\xi|\eta\})\} = d_{\xi\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1} d_{\eta\,\xi}. \tag{5.4.5}$$

Рассмотрим случайный вектор
$$\theta = \xi - m_\xi + C(\eta - m_\eta)$$
и выберем матрицу C таким образом, чтобы $\theta \perp \eta - m_\eta$. Условие ортогональности дает соотношение
$$d_{\xi\,\eta} + C d_{\eta\,\eta} = 0,$$
откуда $C = -d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}$. Следовательно, случайный вектор
$$\theta = \xi - m_\xi - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)$$
не зависит от η и по свойствам условного математического ожидания
$$\mathbf{M}\{\theta|\eta\} = \mathbf{M}\{\theta\} = 0.$$
Вычисляя $\mathbf{M}\{\theta|\eta\}$ получаем
$$0 = \mathbf{M}\{\theta|\eta\} = \mathbf{M}\{\xi|\eta\} - m_\xi - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)$$
откуда и следует (5.4.4). Подставляя соотношение для условного математического ожидания в формулу для условной ковариации с учетом соотношения $d_{\xi\,\eta} = d^*_{\eta\,\xi}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{cov}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\eta\})\} = \\
&\mathbf{M}\{(\xi - m_\xi + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta))(\xi - m_\xi + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta))^*\} = \\
&\mathbf{M}\{(\xi - m_\xi)(\xi - m_\xi)^*\} + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}\mathbf{M}\{(\eta - m_\eta)(\eta - m_\eta)^*\}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} - \\
&\mathbf{M}\{(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)^*(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi}\} - \mathbf{M}\{d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)(\xi - m_\xi)^*\} = \\
&d_{\xi\,\xi} + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} = d_{\xi\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi}.
\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е Соотношения (5.4.4), (5.4.5) являются выражением важной *теоремы о нормальной корреляции,* дающей простое соотношение для вычисления условных математических ожиданий гауссовских случайных векторов.

5.5 Гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом

Среди гильбертовых пространств, общая теория которых изложена в разделе 4.2 и гильбертовых пространств измеримых функций интегрируемых с квадратом 4.2.2 для вероятностных приложений наиболее важным является пространство $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ или пространство случайных величин $\xi(\omega)$, интегрируемых с квадратом по мере $\mathbf{P}(d\omega)$ то есть таких, что
$$\int\limits_\Omega \xi^2(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \mathbf{M}\{\xi^2\} < \infty.$$
Также как и в разделе 4.2.2 мы рассматриваем пространство классов эквивалентых случайных величин с конечным вторым моментом, (см. Определение 4.2.10) совпадающих ($\mathbf{P}$ – п.н.).

Если $\xi, \eta \in L^2$, то положим
$$(\xi, \eta) = \mathbf{M}\{\xi\eta\}.$$

Если $\xi, \eta, \zeta \in L^2$, то имеем следующие свойства операции $(\cdot, \cdot)$

$$(\alpha\xi + \beta\eta, \zeta) = \alpha(\xi, \zeta) + \beta(\eta, \zeta), \quad \forall \alpha, \beta \in R,$$

$$\forall \xi \in L^2, \quad (\xi, \xi) \geq 0, \quad \text{и} \quad (\xi, \xi) = 0 \Rightarrow \xi = 0, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

Тем самым $(\cdot, \cdot)$ является *скалярным произведением* и относительно нормы, определяемой этим произведелением

$$||\xi|| = (\xi, \xi)^{1/2},$$

пространство L^2 является полным гильбертовым пространством.

О п р е д е л е н и е 5.5.1 Если $(\xi, \eta) = 0$, то случайные величины назывются *ортогональными* и это обозначается как $\xi \perp \eta$. ■

Понятие ортогональности играет важную роль в задачах оценивания случайных величин.

Пусть $\{\xi, \eta_1, ... \eta_n\} \in L^2$. Предположим, мы хотим оценить случайную величину ξ по наблюдениям $\{\eta_1, ..., \eta_n\}$. Как следует из свойства (13) условного математического ожидания наилучшей оценкой в среднеквадратическом смысле является $\mathbf{M}\{\xi | \sigma\{\eta_1, ..., \eta_n\}\}$. Однако, вычисление условного математического ожидания требует знания закона совместного распределения всех случайных величин $\{\xi, \eta_1, ..., \eta_n\}$, что довольно редко выполняется для практических задач. Если доступная информация ограничена лишь первыми двумя моментами совместного распределения, то можно определить *наилучшую в среднеквадратическом смысле линейную оценку* ξ.

О п р е д е л е н и е 5.5.2 Функция

$$\hat{\xi}(\eta) = l(\eta_1, ..., \eta_n) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \eta_k,$$

есть *наилучшая в среднеквадратическом смысле линейная оценка* ξ *по наблюдениям* $\{\eta_1, ..., \eta_n\}$ если для любой другой линейной оценки $\bar{l}(\eta_1, ..., \eta_n)$ имеет место неравенство

$$\mathbf{M}\{|\xi - \hat{\xi}(\eta)|^2\} \leq \mathbf{M}\{|\xi - \bar{l}(\eta_1, ..., \eta_n)|^2\}.$$

■

Т е о р е м а 5.5.1 *Пусть матрица* $\mathbf{cov}\{\eta, \eta\} = \mathbf{M}\{(\eta - \mathbf{M}\{\eta\})(\eta - \mathbf{M}\{\eta\})^*\}$ *положительно определенная. Тогда оценка* $\hat{\xi}(\eta)$ *вычисляется по формуле*

$$\hat{\xi}(\eta) = \mathbf{M}\{\xi\} + \mathbf{cov}\{\xi, \eta\}(\mathbf{cov}\{\eta, \eta\})^{-1}(\eta - \mathbf{M}\{\eta\}), \tag{5.5.1}$$

при этом

$$\mathbf{M}\{(\xi - \hat{\xi}(\eta))^2\} = \mathbf{cov}\{\xi, \xi\} - \mathbf{cov}\{\xi, \eta\}(\mathbf{cov}\{\eta, \eta\})^{-1}\mathbf{cov}\{\eta, \xi\}, \tag{5.5.2}$$

где

$$\mathbf{cov}\{\xi, \xi\} = D_\xi = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi\})^2\}, \quad \mathbf{cov}\{\xi, \eta\} = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi\})(\eta - \mathbf{M}\{\eta\})^*\},$$

$$\mathbf{cov}\{\eta, \eta\} = \mathbf{M}\{(\eta - \mathbf{M}\{\eta\})(\eta - \mathbf{M}\{\eta\})^*\} > 0.$$

З а м е ч а н и е   Совпадение формул (5.4.4), (5.4.5) в теореме о нормальной корреляции и (5.5.1), (5.5.2) не случайно. Действительно для любой совокупности случайных величин из L^2 существует семейство гауссовских случайных величин, имеющих те же моменты первого и второго порядка. Для этих гауссовских величин наилучшая в среднеквадратическом смысле оценка ξ - есть условное математическое ожидание, которая по теореме о нормальной корреляции является линейной функцией от наблюдений, поэтому параметры, определяющие эту линейную функцию задают и наилучшую линейную оценку в L^2.

З а м е ч а н и е   Заметим, что оценка $\hat{\xi}$ такова, что центрированная случайная величина $\hat{\xi} - \mathbf{M}\{\xi\} \perp \xi - \hat{\xi}$.

Напомним, что *проекцией элемента* x гильбертова пространства H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $||x|| =< x, x >^{1/2}$ на некоторое подпространство $L \subseteq H$ называется элемент $\hat{\pi}_L(x) \in L$ такой, что

$$\forall y \in L, \quad ||y - x|| \geq ||\hat{\pi}_L(x) - x||.$$

При этом

$$(\hat{\pi}_L(x), \hat{\pi}_L(x) - x) = 0.$$

В задаче оптимального линейного оценивания $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и можно рассматривать лишь случайные величины $\xi \in H$ такие, что $\mathbf{M}\{\xi\} = 0$ (это предположение не ограничивает общности, но значительно упрощает выкладки). Тогда подпространство $L = L(\eta)$ - есть минимальное линейное пространство, содержащее все наблюдаемые случайные величины η, а наилучшая линейная оценка есть проекция ξ на $L(\eta)$, которая единственным образом определяется соотношениями

$$\hat{\pi}_{L(\eta)}(\xi) \in L(\eta), \quad (\hat{\pi}_{L(\eta)}(\xi), \xi - \hat{\pi}_{L(\eta)}(\xi)) = 0. \tag{5.5.3}$$

Оператор $\hat{\pi}_{L(\eta)}\xi)$, который ставит в соответствие каждому элементу $\xi \in= L^2$ его проекцию на подпространство $L(\eta)$, является линейным и удовлетворяет следующему естественному свойству

$$\hat{\pi}_{L(\eta)}(\hat{\pi}_{L(\eta)}(\xi)) = \hat{\pi}_{L(\eta)}(\xi).$$

5.6 Стохастические меры и стохастический интеграл

Понятие стохастического интеграла является математическим выражением суммы бесконечного (очень большого) числа некоррелированных величин. Необходимость такого объекта естественным образом возникает в статистической физике при описании процессов диффузии, теплового, дробового или квантового шумов, которые являются суммой очень большого числа независимых импульсов количества движения соударяющихся частиц, тока или напряжения. Однако, и математическое понятие понятие стохастического интеграла также является удобным при описании спектральных свойств случайных процессов.

5.6.1 Стохастические меры.

Определение 5.6.1 *Конечно-аддитивная стохастическая мера* есть случайная функция множества, которая всякому множеству $\Delta \in \mathcal{A}_0$ из алгебры подмножеств некоторого пространства X ставит в соответствие случайную величину $Z(\omega, \Delta)$ такую, что

1. для любого $\Delta \in \mathcal{A}_0, \quad \mathbf{M}|Z(\Delta)|^2 < \infty$;

2. для любых двух непересекающихся множеств Δ_1 и Δ_2 из $\mathcal{A}_0$

$$Z(\Delta_1 + \Delta_2) = Z(\Delta_1) + Z(\Delta_2), \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

■

Определение 5.6.2 Конечно-аддитивная стохастическая мера $Z(\Delta)$ называется *элементарной стохастической мерой,* если для любых непересекающихся множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ из $\mathcal{A}_0$ таких, что $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k \in \mathcal{A}_0$, выполняется соотношение

$$\mathbf{M}\left|Z(\Delta) - \sum_{k=1}^{n} Z(\Delta_k)\right|^2 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.6.1}$$

■

В данном определении предполагается, что значения элементарной стохастической меры принадлежат гильбертову пространству $H^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, (это обозначение принято, чтобы отличать гильбертово пространство $L^2\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ от гильбертова пространства $L^2(X, \mathcal{A}, m)$) а счетная аддитивность выполнена в среднеквадратическом смысле. Также как и для неслучайных мер условие счетной аддитивности (в среднеквадратическом смысле) эквивалентно непрерывности (в среднеквадратическом смысле) в нуле, то есть

$$\mathbf{M}|Z(\Delta_n)|^2 \to 0, \quad \Delta_n \downarrow 0, \quad \Delta_n \in \mathcal{A}_0.$$

Определение 5.6.3 Элементарная стохастическая мера $Z(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}_0$, называется *ортогональной* или *мерой с ортогональными значениями* если для любых двух непресекающихся множеств Δ_1 и Δ_2 из $\mathcal{A}_0$

$$\mathbf{M}\{Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}\} = 0. \tag{5.6.2}$$

■

Лемма 5.6.1 *Ортогональность меры $Z(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}_0$, эквивалентна тому, что для любых Δ_1 и Δ_2 из $\mathcal{A}_0$*

$$\mathbf{M}\{Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}\} = \mathbf{M}\{|Z(\Delta_1 \cap \Delta_2|^2\}. \tag{5.6.3}$$

Определение 5.6.4 Функция множеств $m(\Delta) = \mathbf{M}|Z(\Delta)|^2$, определенная для $\Delta \in \mathcal{A}_0$, называется *структурной функцией* элементарной стохастической меры $Z(\cdot)$. ■

Функция $m(\cdot)$, определенная на множествах из алгебры $\mathcal{A}_0$ является, в силу (5.6.1), конечной и непрерывной в "нуле", а следовательно, по теореме Каратеодори может быть продолжена на σ - алгебру $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$. Элементарная ортогональная стохастическая мера также допускает такое продолжение, причем $\mathbf{M}|Z(\Delta)|^2 = m(\Delta)$, для множеств из $\mathcal{A}$. Продолжение стохастической меры приводит к понятию стохастического интеграла.

5.6.2 Стохастический интеграл

Пусть $Z(\Delta)$ - элементарная ортогональная стохастическая мера, определенная на множествах $\Delta \in \mathcal{A}_0$, со структурной функцией $m(\Delta)$, продолженной на множества $\Delta \in \mathcal{A}$.

Определение 5.6.5 Стохастический интеграл $\mathcal{J}(f)$ определяется на множестве простых функций вида

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{M} f_k I_{\Delta_k},$$

где $f_1, ..., f_M$ - некоторые комплексные числа,

$$\bigcup_{k=1}^{M} \Delta_k = X, \qquad \Delta_k \cap \Delta_m = \emptyset, \quad \text{при} \quad k \neq m,$$

соотношением

$$\mathcal{J}(f) = \sum_{k=1}^{M} f_k Z(\Delta_k). \tag{5.6.4}$$

■

Стохастический интеграл задает отображение гильбертова пространства комплексных функций $L^2 = L^2(X, \mathcal{A}, m)$, интегрируемых с квадратом по мере $m(d\lambda)$, то есть функций $f(\lambda)$, удовлетворяющих условию

$$\int_X |f(\lambda)|^2 m(d\lambda) < \infty,$$

в гильбертово пространство квадратично интегрируемых комплексных случайных величин $H^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Скалярное произведение в $L^2(X, \mathcal{A}, m)$ определяется соотношением

$$< f, g >= \int\limits_X f(\lambda)\bar{g}(\lambda)m(d\lambda), \tag{5.6.5}$$

а норма $\|f\| =< f, f >^{1/2}$. Скалярное произведение и норма в пространстве H^2 определяются соотношениями

$$(\xi, \eta) = \mathbf{cov}\{\xi, \eta\}, \quad \|\xi\| = (\xi, \xi)^{1/2}.$$

Л е м м а 5.6.2 *Для любых простых функций $f, g \in L^2(X, \mathcal{A}, m)$, выполняются соотношения*

$$(\mathcal{J}(f), \mathcal{J}(g)) =< f, g >,$$

$$\|\mathcal{J}(f)\|^2 = \|f\|^2 = \int\limits_X |f(\lambda)|^2 m(d\lambda), \tag{5.6.6}$$

$$\mathcal{J}(af + bg) = a\mathcal{J}(f) + b\mathcal{J}(g), \quad (\mathbf{P} - \textit{п.н.}).$$

Множество простых функций плотно в метрике гильбертова пространства L^2, то есть для любой функции $f \in L^2$ существует последовательность простых функций $f_n \in L^2$ такая, что $\|f - f_n\| \to 0$, при $n \to \infty$. Эта последовательность фундаментальна в L^2, поэтому в силу соотношений (5.6.6)

$$\|\mathcal{J}(f_n) - \mathcal{J}(f_m)\| = \|\mathcal{J}(f_n - f_m\| = \|f_n - f_m\| \to 0, \qquad n, m \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\{\mathcal{J}(f_n)\}$ фундаментальна в среднеквадратическом смысле, и в силу полноты пространства H^2 существует случайная величина (обозначаемая $\mathcal{J}(f)$) такая, что $\mathcal{J}(f) \in H^2$ и $\|\mathcal{J}(f_n) - \mathcal{J}(f)\| \to 0, \quad n \to \infty.$

О п р е д е л е н и е 5.6.6 Случайная величина $\mathcal{J}(f)$ называется *стохастическим интегралом* от функции $f \in L^2$ по элементарной стохастической мере Z и обозначается

$$\mathcal{J}(f) = \int\limits_X f(\lambda)Z(d\lambda).$$

■

Так введенный интеграл не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$. Действительно, пусть имеются две различные последовательности $\{f_n\}$ и $\{f_n^{'}\}$, сходящиеся в среднеквадратическом смысле к одной и той же функции $f \in L^2$. При этом определяются две случайные величины

$$\mathcal{J}(f) = l.i.m.\,\mathcal{J}(f_n), \qquad \mathcal{J}^{'}(f) = l.i.m.\,\mathcal{J}(f_n^{'}).$$

Покажем, что они равны ($\mathbf{P}-$п.н.). Непосредственно из определения вытекает

$$\|\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}^{'}(f)\| \le \|\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}(f_n)\| + \|\mathcal{J}(f_n) - \mathcal{J}(f_n^{'})\| + \|\mathcal{J}^{'}(f) - \mathcal{J}(f_n^{'})\| \le$$

$$\|\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}(f_n)\| + \|f_n - f_n^{'}\| + \|\mathcal{J}^{'}(f) - \mathcal{J}(f_n^{'})\| \to 0,$$

откуда $\mathbf{M}\{|\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}^{'}(f)|^2\} = 0$, и следовательно, $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}^{'}(f), \quad (\mathbf{P}-$п.н.). Непосредственно из определения следует также, что стохастический интеграл удовлетворяет соотношениям (5.6.6) не только для простых функций, но и для произвольных функций $f, g \in L^2$.

Продолжение элементарной стохастической меры

Таким образом стохастический интеграл определен на произвольных множествах $\sigma-$ алгебры $\mathcal{A}$. Причем на множествах $\Delta \in \mathcal{A}_0$ выполняется равенство $Z(\Delta) = \mathcal{J}(I_\Delta)$. Стохастический интеграл определяет продолжение элементарной ортогональной меры и на $\sigma-$ алгебру $\mathcal{A}$.

О п р е д е л е н и е 5.6.7 Для произвольного множества $\Delta \in \mathcal{E}$ определим *продолжение элементарной ортогональной стохастической меры* Z соотношением

$$\tilde{Z}(\Delta) = \mathcal{J}(I_\Delta).$$

■

Из конструкции интеграла следует, что стохастический интеграл удовлетворяет соотношениям (5.6.6), поэтому если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset, \quad \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A}$, то

$$\tilde{Z}(\Delta_1 + \Delta_2) = \tilde{Z}(\Delta_1) + \tilde{Z}(\Delta_2), \qquad (\mathbf{P} - \text{п.н.}),$$

$$\mathbf{M}\{\tilde{Z}(\Delta_1)\overline{\tilde{Z}(\Delta_2)}\} = 0,$$

$$\mathbf{M}\{|\tilde{Z}(\Delta)|^2\} = m(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{E}.$$

О п р е д е л е н и е 5.6.8 Совокупность комплекснозначных случайных величин $\{Z_\lambda\}, \qquad \lambda \in R\}$, называется *случайным процессом с ортогональными приращениями,* если:

1. $\mathbf{M}\{|Z_\lambda|^2\} < \infty, \quad \lambda \in R;$
2. для любого $\lambda \in R$
$$\mathbf{M}\{|Z_\lambda - Z_{\lambda_n}|^2\} \to 0, \quad \text{при} \quad \lambda_n \downarrow 0, \quad \lambda_n \in R;$$
3. для любых $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$
$$\mathbf{M}\{(Z_{\lambda_4} - Z_{\lambda_3})\,\overline{(Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1})}\} = 0.$$

■

Процесс с ортогональными приращениями определяет элементарную стохастическую меру с ортогональными значениями. Обратно, всякая ортогональная стохастическая мера $Z(\Delta)$ со структурной функцией $m(\Delta)$ задает процесс с ортогональными приращениями

$$Z_\lambda = Z((-\infty, \lambda]).$$

Действительно,

1. $$\mathbf{M}\{|Z_\lambda|^2\} = m((-\infty, \lambda]) < \infty;$$
2. $$\mathbf{M}\{|Z_\lambda - Z_{\lambda_n}|^2\} = m((\lambda, \lambda_n]) \downarrow 0, \quad \text{при} \quad \lambda_n \downarrow \lambda;$$
3. $$\mathbf{M}\{(Z_{\lambda_4} - Z_{\lambda_3})\,\overline{(Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1})}\} = m(\emptyset) = 0.$$

Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между процессами с ортогональными приращениями и ортогональными стохастическими мерами.