Глава 2.

Случайные последовательности

В данной главе будут изучаться случайные процессы с дискретным временем, которые обычно называют случайными последовательностями. В дальнейшем для обозначения случайной последовательности будем использовать сокращение СП.

2.1. Стационарные случайные последовательности

2.1.1. Основные характеристики ССП

Пусть $\mathcal{H}$ — пространство комплексных случайных величин $\xi = \alpha + i\beta$, где α, $\beta \in \mathbb{R}^1$ — вещественные случайные величины такие, что $\mathbf{M}\big\{\alpha^2 + \beta^2\big\} < \infty$. Для ξ, $\eta \in \mathcal{H}$ можно определить ***скалярное произведение***

$$(\xi, \eta) = \mathbf{M}\{\xi\overline{\eta}\}, \tag{2.1.1}$$

где $\overline{\eta} = \alpha - i\beta$ — комплексно-сопряженная величина к $\eta = \alpha + i\beta$, и ***норму***

$$\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)} = \sqrt{\mathbf{M}\{|\xi|^2\}}, \tag{2.1.2}$$

где $|\xi|^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением (2.1.1) и нормой (2.1.2) называется ***гильбертовым пространством случайных величин с конечным вторым моментом*** (см. разд. 4.2.7).

Определение 2.1.1. ***Ковариацией*** *случайных величин* $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ *называется*

$$\mathbf{cov}\{\xi, \eta\} = \mathbf{M}\Big\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi\})\overline{(\eta - \mathbf{M}\{\eta\})}\Big\} = (\xi, \eta) - \mathbf{M}\{\xi\}\,\overline{\mathbf{M}\{\eta\}}. \tag{2.1.3}$$

Из соотношений (2.1.1), (2.1.3) следует, что при $\mathbf{M}\{\xi\} = \mathbf{M}\{\eta\} = 0$

$$\mathbf{cov}\{\xi, \eta\} = (\xi, \eta). \tag{2.1.4}$$

Рассмотрим последовательность ξ, составленную из комплексных случайных величин $\xi_n \in \mathcal{H}$, где n пробегает множество всех целых чисел $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Определение 2.1.2. *Последовательность $\xi = \{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ называется* ***стационарной в широком смысле****, если для любых $n, k \in \mathbb{Z}$*

$$\mathbf{M}\{\xi_n\} = \mathbf{M}\{\xi_0\}\,, \qquad \mathbf{cov}\{\xi_{n+k}, \xi_k\} = \mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_0\}\,. \tag{2.1.5}$$

В дальнейшем стационарные в широком смысле последовательности будем называть кратко ***стационарными случайными последовательностями***. Кроме того, не умаляя общности, полагаем $\mathbf{M}\{\xi_0\} = 0$. Это предположение позволяет отождествить ковариацию со скалярным произведением и применять методы и результаты теории гильбертовых пространств (см. разд. 4.1.6).

Определение 2.1.3. *Функция*

$$R_\xi(n) = \mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_0\}\,, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.1.6}$$

называется ***ковариационной функцией стационарной последовательности*** *$\xi = \{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$.*

Если $R_\xi(0) = \mathbf{M}\big\{|\xi_0|^2\big\} \neq 0$, то функция

$$\rho_\xi(n) = \frac{R_\xi(n)}{R_\xi(0)}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.1.7}$$

называется ***корреляционной функцией ССП*** *ξ.*

Из (2.1.5), (2.1.6) следует, что для любых n, $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_m\} = R_\xi(n-m).$$

Ковариационная функция $R_\xi(n)$ обладает следующими свойствами, которые непосредственно вытекают из определения 2.1.3 и общих свойств ковариационной функции (см. разд. 1.2.2):

1. Ковариационная функция $R_\xi(n)$ является ***неотрицательно-определенной***, т. е. для любых комплексных чисел $a_1, \ldots, a_m$ и моментов времени $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i \overline{a}_j R_\xi(n_i - n_j) \geq 0. \tag{2.1.8}$$

2. Дисперсия D_ξ ССП ξ постоянна и имеет вид

$$D_\xi = R_\xi(0) = \mathbf{M}\big\{|\xi_0|^2\big\} \geq 0.$$

3. Ковариационная функция является ***эрмитовой***, т. е. $R_\xi(-n) = \overline{R_\xi(n)}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

4. $|R_\xi(n)| \le R_\xi(0)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Если ξ — вещественная ССП, то $R_\xi(n)$ — вещественная неотрицательно-определенная функция, в частности, $R_\xi(n)$ — четная, т. е. $R_\xi(-n) = R_\xi(n)$.

Кроме ковариационной функции, которая относится к классу моментных характеристик (см. разд. 1.1.4), при описании ССП используются также спектральные характеристики: ***спектральная функция*** и ***спектральная плотность***.

Теорема 2.1.1. *Пусть $R_\xi(n)$ — ковариационная функция некоторой ССП $\xi = \{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Тогда найдется однозначно определенная монотонно неубывающая вещественная функция $F_\xi(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, непрерывная справа на $[-\pi, \pi]$, $F_\xi(-\pi) = 0$ такая, что*

$$R_\xi(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} dF_\xi(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1.9}$$

Функция $F_\xi(\lambda)$, определенная в теореме 2.1.1, называется ***спектральной функцией*** ССП ξ.

Если $F_\xi(\lambda)$ при каждом $\lambda \in [-\pi, \pi]$ можно представить в виде

$$F_\xi(\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\lambda} f_\xi(\omega)\, d\omega, \tag{2.1.10}$$

то функция $f_\xi(\omega)$ называется ***спектральной плотностью*** ССП ξ. В силу монотонности $F_\xi(\lambda)$ выполнено $f_\xi(\omega) \ge 0$, $\omega \in [-\pi, \pi]$. В этом случае из (2.1.9) следует

$$R_\xi(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_\xi(\lambda)\, d\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1.11}$$

Заметим, что числа $R_\xi(n)$ равны коэффициентам разложения функции $f_\xi(\lambda)$ в ряд Фурье по системе функций $\{e^{i\lambda n},\ n \in \mathbb{Z}\}$, ортогональных на отрезке $[-\pi, \pi]$. Обратно, если $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |R_\xi(n)| < \infty$, то ряд Фурье с коэффициентами $R_\xi(n)$ абсолютно сходится к спектральной плотности ССП ξ для любого

$\lambda \in [-\pi, \pi]$:

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i\lambda n} R_\xi(n). \tag{2.1.12}$$

Для дисперсии $D_\xi = R_\xi(0)$ справедливо следующее выражение через спектральные характеристики:

$$D_\xi = \int_{-\pi}^{\pi} f_\xi(\lambda)\, d\lambda = F_\xi(\pi). \tag{2.1.13}$$

Замечание. Если ξ — вещественная ССП, то спектральная плотность $f_\xi(\lambda)$ также обладает свойством четности: $f_\xi(\lambda) = f_\xi(-\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

2.1.2. Примеры ССП

Приведем примеры некоторых наиболее часто встречающихся ССП.

Пример 2.1.1. Пусть $\xi_n = \xi_0\, g(n)$, где $\mathbf{M}\{\xi_0\} = 0$, $\mathbf{D}\{\xi_0\} = 1$ и $g(n)$ — некоторая комплексная детерминированная функция. При каких условиях на $g(n)$ последовательность $\{\xi_n\}$ стационарна? Определить ковариационную функцию такой последовательности.

Решение. Последовательность $\xi = \{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ имеет

$$\mathbf{M}\{\xi_n\} = 0, \qquad \mathbf{cov}\{\xi_{n+k}, \xi_k\} = g(n+k)\overline{g(k)}.$$

Следовательно, она будет стационарной в том и только том случае, если функция $g(n+k)\overline{g(k)}$ не зависит от k. Отсюда следует, что

$$g(n+k)\overline{g(k)} = g(n)\overline{g(0)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, $g(n+1)/g(n) = \overline{g(0)}/\overline{g(1)} = \alpha = \mathrm{const}$, поэтому

$$g(n) = g(0)\, \alpha^n.$$

Далее, поскольку $\mathbf{D}\{\xi_n\} = \mathbf{D}\{\xi_0\}\, |g(0)|^2 |\alpha|^n = \mathrm{const}$, то $|\alpha|^n = |\alpha| = 1$ и существует число $\lambda \in [-\pi, \pi)$ такое, что $\alpha = e^{i\lambda}$. Таким образом, последовательность случайных величин $\xi_n = \xi_0\, g(n)$ является стационарной, если $g(n) = g(0)\, \alpha^n$, т. е.

$$\xi_n = \xi_0\, g(0)\, e^{i\lambda n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда ее ковариационная функция

$$R_\xi(n) = \mathbf{D}\{\xi_0\}\; |g(0)|^2 e^{i\lambda n} = |g(0)|^2 e^{i\lambda n}. \ \blacksquare$$

Следующий пример обобщает предыдущий.

Пример 2.1.2. Пусть задан набор комплексных центрированных случайных величин $\{z_1, \dots, z_N\} \subset \mathcal{H}$, удовлетворяющих условию ортогональности, т. е.

$$(z_i, z_j) = \mathbf{cov}\{z_i, z_j\} = \begin{cases} \sigma_i^2 > 0 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$ — некоторые числа из полуинтервала $[-\pi, \pi)$. Случайная последовательность $\xi = \{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, называемая ***почти периодической***, определена соотношением

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\lambda_k n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1.14}$$

Показать, что последовательность ξ стационарна, и найти ее спектральные характеристики.

Решение. Последовательность ξ центрирована, т. е. $m_\xi = 0$, а ее ковариационная функция имеет вид

$$\mathbf{cov}\{\xi_{n+m}, \xi_m\} = \left(\sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\lambda_k (n+m)}, \sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\lambda_k m} \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} (z_k, z_l) e^{i\lambda_k (n+m)} \overline{e^{i\lambda_l m}} = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 e^{i\lambda_k n} = R_\xi(n),$$

т. е. зависит только от n. Следовательно, последовательность ξ стационарна.

Введем функцию

$$F_\xi(\lambda) = \sum_{k:\lambda_k \le \lambda} \sigma_k^2, \tag{2.1.15}$$

которая, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 2.1.1. Тогда ковариационная функция $R_\xi(n)$ представляется в виде интеграла Лебега–Стилтьеса

$$R_\xi(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} dF_\xi(\lambda).$$

В силу (2.1.9) это означает, что введенная в (2.1.15) функция $F_\xi(\lambda)$ является спектральной функцией для ССП ξ. По построению $F_\xi(\lambda)$ кусочно-постоянна на $[-\pi, \pi]$, причем $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — точки ее разрывов, а $F_\xi(\lambda_k) - F_\xi(\lambda_k - 0) =$

$= \sigma_k^2$ — величины скачков. Таким образом, $F_\xi(\lambda)$ не является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега на $[-\pi, \pi]$, и, следовательно, спектральная плотность $f_\xi(\lambda)$ не существует. ■

Пример 2.1.3. Пусть ε — последовательность некоррелированных случайных величин ε_n, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. $\mathbf{M}\{\varepsilon_n\} = 0$, $\mathbf{D}\{\varepsilon_n\} = D_\varepsilon > 0$ и

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \mathbf{cov}\{\varepsilon_i, \varepsilon_j\} = \begin{cases} D_\varepsilon & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Доказать ее стационарность, найти моментные и спектральные характеристики.

Решение. Последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ является стационарной, так как имеет ковариационную функцию

$$\mathbf{cov}\{\varepsilon_{n+k}, \varepsilon_k\} = R_\varepsilon(n) = \begin{cases} D_\varepsilon & \text{при} \quad n = 0, \\ 0 & \text{при} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись соотношением

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} d\lambda = \begin{cases} 2\pi & \text{при} \quad n = 0, \\ 0 & \text{при} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

получим спектральное представление для ковариационной функции $R_\varepsilon(n)$:

$$R_\varepsilon(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_\varepsilon(\lambda)\, d\lambda,$$

где $f_\varepsilon(\lambda) = \dfrac{D_\varepsilon}{2\pi}$ — спектральная плотность ССП ε. Тогда в соответствии с (2.1.10) находим спектральную функцию $F_\varepsilon(\lambda) = \dfrac{D_\varepsilon}{2\pi}(\lambda + \pi)$. ■

Замечание. Последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, рассмотренную в примере 2.1.3, обычно называют ***стационарным дискретным белым шумом***. При $D_\varepsilon = 1$ белый шум называют ***стандартным***. Мы показали, что спектральная плотность $f_\varepsilon(\lambda)$ последовательности ε постоянна на отрезке $[-\pi, \pi]$, что и послужило основанием для термина “белый шум”, используемого в радиофизике, где белым шумом называется случайный сигнал с равномерным спектром.

Последовательность белого шума позволяет сформировать различные виды стационарных последовательностей.

Определение 2.1.4. *Пусть* $\varepsilon = \{\varepsilon_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ — *стандартный белый шум, а* $\{a_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ — *последовательность комплексных чисел таких, что*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty. \tag{2.1.16}$$

Случайная последовательность $\xi = \{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *вида*

$$\xi_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} \tag{2.1.17}$$

называется ***линейной ССП*** *или последовательностью* ***двустороннего скользящего среднего****.*

Если $a_k = 0$ *при* $k < 0$*, т. е.*

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{2.1.18}$$

то ξ *называется последовательностью* ***одностороннего скользящего среднего****.*

Наконец, если $a_k = 0$ *при* $k < 0$ *и* $k > p$*, т. е.*

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{p} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{2.1.19}$$

то ξ *называется последовательностью* ***скользящего среднего порядка*** $\boldsymbol{p}$*.*

Пример 2.1.4. Показать, что последовательности скользящего среднего действительно удовлетворяют условиям стационарности.

Решение. Достаточно рассмотреть случай последовательности двустороннего скользящего среднего, так как остальные являются ее частными случаями. В силу условия (2.1.16) ряд (2.1.17) сходится в среднеквадратическом смысле (с.к.-сходимость ряда обсуждается в разд. 2.2). Очевидно,

$$\xi_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} \varepsilon_k.$$

Вычисляя ковариационную функцию с учетом свойства ортогональности сечений белого шума ε, находим

$$\mathbf{cov}\{\xi_{n+m}, \xi_m\} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+m-k}\varepsilon_k, \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}\varepsilon_k \right) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{n+m-k}\overline{a}_{n-l}\,(\varepsilon_k, \varepsilon_l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+m-k}\overline{a}_{m-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+k}\overline{a}_k.$$

Ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+k}\overline{a}_k$ сходится, поскольку $|a_{n+k}\overline{a}_k| \le \dfrac{|a_{n+k}|^2 + |a_k|^2}{2}$. Таким образом, показано, что $\xi = \{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ — стационарная последовательность с ковариационной функцией

$$R_\xi(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+k}\overline{a}_k.$$

Спектральная плотность $f_\xi(\lambda)$ ССП ξ имеет вид

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\lambda n} R_\xi(n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\lambda n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n+k}\overline{a}_k =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k,n\in\mathbb{Z}} e^{-i\lambda(n+k)} a_{n+k}\, \overline{e^{-i\lambda k} a_k} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k,m\in\mathbb{Z}} e^{-i\lambda m} a_m\, \overline{e^{-i\lambda k} a_k} = \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-i\lambda k} a_k\right|^2,$$

причем $f_\xi(\lambda)$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$ в силу условия (2.1.16). ■

2.1.3. Спектральное представление ССП

Спектральное представление ковариационной функции определяет распределение "энергии" последовательности по частотам $\lambda \in [-\pi, \pi]$. В случае почти периодической последовательности (см. пример 2.1.2) мы видели, что сумме гармоник со случайными амплитудами соответствует дискретное представление спектра в виде ступенчатой функции со скачками в точках, где сосредоточен спектр, т. е. в точках разрыва функции $F_\xi(\lambda)$. Таким образом, почти периодическую последовательность можно представить как сумму гармоник со случайными амплитудами, т. е. такая последовательность имеет дискретный "случайный спектр". Оказывается, что любая ССП допускает такое спектральное представление со "случайным спектром", хотя в общем случае спектр уже не будет дискретным. Это представление весьма удобно в приложениях и основано на понятии интеграла по ортогональной стохастической мере (см. разд. 4.2.9).

Т е о р е м а 2.1.2. *Пусть $\xi = \{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ — ССП с ковариационной функцией $R_\xi(n)$, соответствующей спектральной функции $F_\xi(\lambda)$. Тогда существует такая ортогональная стохастическая мера $Z_\xi(\Delta)$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}([-\pi,\pi))$ промежутка $[-\pi,\pi)$, что имеет место представление*

$$\xi_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} Z_\xi(d\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.1.20}$$

причем $Z_\xi(\Delta)$ имеет структурную функцию вида

$$F_Z(\Delta) = \mathbf{M}\big\{|Z_\xi(\Delta)|^2\big\} = \int\limits_{\Delta} dF_\xi(\lambda), \quad \Delta \in \mathcal{B}([-\pi,\pi)). \tag{2.1.21}$$

З а м е ч а н и е. Таким образом, $F_\xi(\lambda)$ является функцией распределения структурной функции $F_Z(\Delta)$ ортогональной стохастической меры $Z_\xi(\Delta)$, определенной на $\mathcal{B}([-\pi,\pi))$. В частности, если $\Delta = (\alpha,\beta] \subset [-\pi,\pi)$, то $F_Z(\Delta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha)$, а если к тому же $F_\xi(\lambda)$ имеет плотность $f_\xi(\lambda)$, то $F_Z(\Delta) = \int\limits_{\Delta} f_\xi(\lambda)\, d\lambda$.

Спектральное представление ССП играет важную роль в задачах линейного оценивания и прогнозирования случайных последовательностей. Это связано с тем, что результат любого линейного преобразования ССП можно представить с помощью стохастического интеграла по мере $Z_\xi(d\lambda)$.

О п р е д е л е н и е 2.1.5. *Если случайная величина ζ является пределом в среднеквадратическом смысле некоторой последовательности случайных величин $\{\zeta^m\}$, образованных линейными комбинациями сечений ССП $\xi = \{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$, то будем говорить, что $\zeta \in \mathcal{H}(\xi)$.*

Т е о р е м а 2.1.3. *Пусть случайная величина $\zeta \in \mathcal{H}(\xi)$, где ξ — ССП, имеющая представление* (2.1.20) *и спектральную функцию $F_\xi(\lambda)$. Тогда существует такая функция $\Phi(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi,\pi]$, что ζ допускает представление*

$$\zeta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda), \tag{2.1.22}$$

причем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(\lambda)|^2 dF_\xi(\lambda) < \infty. \tag{2.1.23}$$

З а м е ч а н и е. Поскольку условие $\zeta \in \mathcal{H}(\xi)$ означает, что ζ является линейной комбинацией сечений ССП ξ или с.к.-пределом таковых, мы далее будем говорить, что ζ является ***линейным преобразованием*** ξ. В свете этого утверждение теоремы 2.1.3 означает, что всякое линейное преобразование ССП ξ может быть представлено в виде интеграла по стохастической мере от некоторой функции $\Phi(\lambda)$, удовлетворяющей условию (2.1.23). Функция $\Phi(\lambda)$ характеризует само линейное преобразование и называется его ***частотной характеристикой***. Условие (2.1.23) означает, что

$$\mathbf{M}\{|\zeta|^2\} = \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(\lambda)|^2 dF_\xi(\lambda) < \infty.$$

Теперь мы можем ввести понятие линейного стационарного преобразования ССП.

О п р е д е л е н и е 2.1.6. *Пусть ССП* $\xi = \{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *имеет спектральное представление* (2.1.20). *Если последовательность* $\zeta = \{\zeta_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *допускает представление*

$$\zeta_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\Phi(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.1.24}$$

с некоторой функцией $\Phi(\lambda)$, *удовлетворяющей* (2.1.23), *то говорят, что последовательность* ζ *получена из ССП* ξ *с помощью* ***стационарного линейного преобразования***.

П р и м е р 2.1.5. Показать, что последовательность $\zeta = \{\zeta_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, определенная в (2.1.24), является стационарной.

Р е ш е н и е. Вычислим ковариацию сечений ζ_m и ζ_n, пользуясь свойствами интеграла по ортогональной стохастической мере (см. разд. 4.2.9):

$$\mathbf{cov}\{\zeta_m, \zeta_n\} = (\zeta_m, \zeta_n) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}\Phi(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda), \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\Phi(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda)\right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}\Phi(\lambda)\, \overline{e^{i\lambda n}\Phi(\lambda)}\, dF_\xi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(m-n)}|\Phi(\lambda)|^2\, dF_\xi(\lambda) = R_\zeta(m-n),$$

что вместе с равенством $\mathbf{M}\{\zeta_n\} = \mathbf{M}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\Phi(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda)\right\} = 0$ доказывает стационарность ζ. Итак, последовательность, полученная в результате стационарного линейного преобразования ССП, также является стационарной. При этом условие (2.1.23) означает, что $\mathbf{M}\big\{|\zeta_n|^2\big\} < \infty$, т. е. случайная последовательность ζ действительно существует. ■

Моментные и спектральные характеристики последовательностей ζ и ξ связаны некоторыми аналитическими соотношениями, о чем говорит следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.1.4. *Последовательность ζ, полученная из ССП ξ с помощью линейного преобразования* (2.1.24), *является стационарной с ортогональной стохастической мерой $Z_\zeta(d\lambda)$, спектральной функцией $F_\zeta(\lambda)$ и ковариационной функцией $R_\zeta(n)$, которые удовлетворяют соотношениям*

$$Z_\zeta(d\lambda) = \Phi(\lambda)\, Z_\xi(d\lambda),$$

$$F_\zeta(\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\lambda} |\Phi(\lambda)|^2\, dF_\xi(\lambda), \qquad R_\zeta(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}|\Phi(\lambda)|^2\, dF_\xi(\lambda).$$

Если ξ имеет спектральную плотность $f_\xi(\lambda)$, то ζ также имеет спектральную плотность $f_\zeta(\lambda)$, причем

$$f_\zeta(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2\, f_\xi(\lambda).$$

Соотношение (2.1.24) описывает линейное преобразование последовательности в спектральной области. Однако, как показывает следующий пример, этому представлению может соответствовать и представление во временной области.

П р и м е р 2.1.6. Пусть стационарному линейному преобразованию с частотной характеристикой $\Phi(\lambda)$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Phi(\lambda)|^2\, d\lambda < \infty, \tag{2.1.25}$$

подвергается стандартный дискретный белый шум $\varepsilon = \{\varepsilon_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Показать, что полученная ССП $\xi = \{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ допускает представление в форме двустороннего скользящего среднего. Найти спектральную плотность $f_\xi(\lambda)$.

Решение. Условие (2.1.25) равносильно условию (2.1.23), поскольку $F_\varepsilon(\lambda) = \dfrac{\lambda+\pi}{2\pi}$ (см. пример 2.1.3). В силу (2.1.25) функция $\Phi(\lambda)$ допускает разложение в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$:

$$\Phi(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda m} h(m),$$

где

$$h(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}\Phi(\lambda)\,d\lambda.$$

Если $Z_\varepsilon(d\lambda)$ — стохастическая мера в спектральном представлении белого шума ε, то соотношение (2.1.24) для ξ записывается как

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\Phi(\lambda)Z_\varepsilon(d\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-m)}Z_\varepsilon(d\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\,\varepsilon_{n-m},$$

что соответствует представлению в форме скользящего среднего (2.1.17). Тогда в силу теоремы 2.1.4 спектральная плотность последовательности ξ имеет вид

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|\Phi(\lambda)|^2,$$

так как спектральная плотность стандартного белого шума ε равна $1/2\pi$. ■

2.1.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что если α_k, β_k — действительные некоррелированные случайные величины, $\mathbf{M}\{\alpha_k\} = \mathbf{M}\{\beta_k\} = 0$, $\mathbf{D}\{\alpha_k\} = \mathbf{D}\{\beta_k\} = \sigma_k^2$, $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2 < \infty$, то последовательность

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos\lambda_k n + \beta_k\sin\lambda_k n), \quad n\in\mathbb{Z},$$

является стационарной. Найти ковариационную функцию $R_\xi(n)$.

Указание: показать, что ξ_n допускает представление $\xi_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k n}$, где $\lambda_{-k} = -\lambda_k$, $z_k = \dfrac{\alpha_k - i\beta_k}{2}$, $z_{-k} = \overline{z}_k$ при $k\geq 1$, $z_0 = 0$, причем $\{z_k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ — некоррелированные.

Ответ: $R_\xi(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2\cos\lambda_k n$.

2. Показать, что последовательность $\xi_n = e^{i\theta n}$, где случайная величина θ имеет равномерное распределение на $[-\pi, \pi]$, является стационарной. Найти ее ковариационную функцию и спектральную плотность.

Ответ: $m_\xi = 0, \quad R_\xi(n) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 0, \\ 0 & \text{при} \quad n \neq 0, \end{cases} \qquad f_\xi(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}.$

3. Пусть ζ — ССП, полученная из ξ с помощью линейного преобразования с частотной характеристикой $\Phi_1(\lambda)$, а η — ССП, полученная из ζ с помощью линейного преобразования с частотной характеристикой $\Phi_2(\lambda)$. Показать, что η может быть найдена из ξ с помощью линейного преобразования с частотной характеристикой $\Phi_2(\lambda)\Phi_1(\lambda)$.

4. Найти частотную характеристику преобразования ССП Y в последовательность

$$X(n) = \frac{1}{3}(Y(n) + Y(n-1) + Y(n-2)).$$

Ответ: $\Phi(\lambda) = \dfrac{1}{3}\left(1 + e^{-i\lambda} + e^{-2i\lambda}\right).$

5. Пусть $\xi_n = \cos(n\eta + \theta)$, где θ — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 2\pi]$, а η не зависит от θ и имеет функцию распределения $G(x)$. Показать, что ξ — вещественная центрированная ССП.

6. Пусть $0 < a < \pi$. Показать, что

$$R_\xi(n) = \begin{cases} \dfrac{a}{\pi} & \text{при} \quad n = 0, \\ \dfrac{\sin an}{\pi n} & \text{при} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

есть ковариационная функция некоторой ССП. Найти спектральную плотность этой последовательности.

Указание: показать, что $R_\xi(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{i\lambda n} d\lambda$, откуда следует, что последовательность с ковариационной функцией $R_\xi(n)$ есть линейное стационарное преобразование белого шума с частотной характеристикой

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |\lambda| \leq a, \\ 0 & \text{при} \quad |\lambda| > a. \end{cases}$$

Ответ: $f_\xi(\lambda) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{при} \quad |\lambda| \leq a, \\ 0 & \text{при} \quad |\lambda| > a. \end{cases}$

7. Найти ковариационную функцию $R_\xi(n)$ ССП, имеющей спектральную плотность $f_\xi(\lambda) = \dfrac{\pi - |\lambda|}{\pi^2}$.

Указание: воспользоваться формулой (2.1.11).

Ответ: $R_\xi(n) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 0, \\ \dfrac{2(-1)^n}{(\pi n)^2} & \text{при} \quad n \neq 0. \end{cases}$

8. Пусть ξ, ζ — некоррелированные ССП (т. е. $\mathbf{cov}\{\xi_n, \zeta_m\} = 0$ при всех $n, m \in \mathbb{Z}$) со спектральными функциями $F_\xi(\lambda)$, $F_\zeta(\lambda)$. Показать, что $X_n = \xi_n + \zeta_n$ есть ССП, и найти ее спектральную функцию $F_X(\lambda)$.

Ответ: $F_X(\lambda) = F_\xi(\lambda) + F_\zeta(\lambda)$.

9. Пусть ξ, ζ — ССП, удовлетворяющие уравнениям

$$\xi_n - \alpha\,\xi_{n-1} = \varepsilon_n^1, \qquad \zeta_n - \alpha\,\zeta_{n-1} = \xi_n + \varepsilon_n^2,$$

где $|\alpha| < 1$ — неслучайная постоянная, а ε^1, ε^2 — некоррелированные последовательности белого шума. Найти спектральную плотность ССП ζ.

Указание: обозначим $Z^1(d\lambda)$, $Z^2(d\lambda)$ ортогональные стохастические меры в спектральных представлениях последовательностей ε^1 и ε^2 соответственно. Тогда ортогональная стохастическая мера, соответствующая последовательности ζ, равна

$$Z_\zeta(d\lambda) = \frac{Z^1(d\lambda)}{(1 - \alpha e^{-i\lambda})^2} + \frac{Z^2(d\lambda)}{1 - \alpha e^{-i\lambda}},$$

откуда с учетом некоррелированности последовательностей ε^1, ε^2 находим ответ.

Ответ: $f_\zeta(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi|1 - \alpha e^{-i\lambda}|^4} + \dfrac{1}{2\pi|1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2}$.

10. Используя спектральное представление, показать, что случайная последовательность $\xi = \{\xi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$, удовлетворяющая соотношению

$$\xi_n + b_1\xi_{n-1} + \ldots + b_q\xi_{n-q} = a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \ldots + a_p\varepsilon_{n-p},$$

при определенных условиях на многочлен $Q(z) = 1 + b_1 z + \ldots + b_q z^q$ является линейным преобразованием стандартного белого шума $\varepsilon = \{\varepsilon_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$. Найти эти условия, определить спектральную плотность ССП ξ.

Указание: показать, что ξ имеет представление в виде одностороннего скользящего среднего $\xi_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\varepsilon_{n-k}$, где c_k — коэффициенты разложения функции $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ в ряд Тейлора в единичном круге, а $P(z) = 1 + a_1 z + \ldots + a_p z^p$.

Ответ: корни многочлена $Q(z)$ лежат вне единичного круга; $f_\xi(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})}\right|^2$.

2.2. Линейные преобразования случайных последовательностей

2.2.1. Линейные преобразования последовательностей

общего вида

Определение 2.2.1. *Случайная последовательность* $\{\eta_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *называется* ***линейным преобразованием*** *случайной последовательности* $\{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *с* ***весовой последовательностью*** $\{c_{nk},\ n, k \in \mathbb{Z}\}$, *если при каждом* $n \in \mathbb{Z}$

$$\eta_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{nk}\xi_k. \tag{2.2.1}$$

Здесь и далее сходимость ряда (2.2.1) понимается в ***среднеквадратическом смысле:***

$$\eta_n = \underset{N,M\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=-N}^{M} c_{nk}\xi_k. \tag{2.2.2}$$

Соотношение (2.2.2) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{M}\left\{\left|\eta_n - \sum_{k=-N}^{M} c_{nk}\xi_k\right|^2\right\} \longrightarrow 0 \ \text{ при } N, M \to \infty. \tag{2.2.3}$$

Очевидно, преобразование $\{\eta_n\}$ существует, если выполнены соотношения (2.2.2) или (2.2.3), поэтому на $\{c_{nk}\}$ и $\{\xi_k\}$ должны быть наложены некоторые условия, гарантирующие, что выражение (2.2.1) имеет смысл.

Определение 2.2.2. *Случайная последовательность* $\{\xi_k\}$ *называется* ***гильбертовой***, *если* $\mathbf{M}\{|\xi_k|^2\} < \infty$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}$.

Для гильбертовых последовательностей при $k, l \in \mathbb{Z}$ существуют

$$m_\xi(k) = \mathbf{M}\{\xi_k\},$$

$$R_\xi(k,l) = \mathbf{cov}\{\xi_k, \xi_l\} = \mathbf{M}\{(\xi_k - m_\xi(k))\overline{(\xi_l - m_\xi(l))}\},$$

$$D_\xi(k) = \sigma_\xi^2(k) = R_\xi(k,k) = \mathbf{M}\{|\xi_k - m_\xi(k)|^2\}.$$

Пример 2.2.1. Доказать, что $\{\eta_n\}$ существует тогда и только тогда, когда сходятся следующие числовые ряды:

$$I_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{nk} m_\xi(k) \quad \text{и} \quad I_2(n) = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_{nk}\overline{c_{nl}} R_\xi(k,l). \tag{2.2.4}$$

Решение. Очевидно, достаточно рассмотреть условия сходимости ряда $\zeta_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{nk}\xi_k$. Покажем, что при выполнении (2.2.4) последовательность случайных величин $S_n^K = \sum\limits_{k=0}^{K} c_{nk}\xi_k$ является фундаментальной в среднеквадратическом смысле, т. е. $\mathbf{M}\big\{|S_n^K - S_n^L|^2\big\} \to 0$ при $K, L \to \infty$. Действительно,

$$\mathbf{M}\big\{|S_n^K - S_n^L|^2\big\} = \mathbf{M}\left\{\left|\sum_{k=K+1}^{L} c_{nk}\xi_k\right|^2\right\} = \sum_{k,l=K+1}^{L} c_{nk}\overline{c_{nl}}\,\mathbf{M}\big\{\xi_k\overline{\xi}_l\big\} =$$
$$= \sum_{k,l=K+1}^{L} c_{nk}\overline{c_{nl}}\,(m_\xi(k)\overline{m_\xi(l)} + R_\xi(k,l)) = \sum_{k,l=K+1}^{L} c_{nk}\overline{c_{nl}}\,m_\xi(k)\overline{m_\xi(l)} +$$
$$+ \sum_{k,l=K+1}^{L} c_{nk}\overline{c_{nl}}\,R_\xi(k,l) = \left|\sum_{k=K+1}^{L} c_{nk}\,m_\xi(k)\right|^2 + \sum_{k,l=K+1}^{L} c_{nk}\overline{c_{nl}}\,R_\xi(k,l) = I_{K,L}.$$

Если выполнено (2.2.4), то $I_{K,L} \to 0$ при $K, L \to \infty$, что означает: $\mathbf{M}\big\{|S_n^K - S_n^L|^2\big\} \to 0$ при $K, L \to \infty$. В силу свойств с.к.-сходимости (см. разд. 4.2.4) последовательность $\big\{S_n^K\big\}$ сходится в среднеквадратическом смысле к пределу $\zeta_n = \underset{K\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum\limits_{k=0}^{K} c_{nk}\xi_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{nk}\xi_k$.

Наоборот, если ζ_n существует, то

$$\mathbf{M}\big\{|\zeta_n|^2\big\} = \mathbf{D}\{\zeta_n\} + |\mathbf{M}\{\zeta_n\}|^2 < \infty,$$

но

$$\mathbf{D}\{\zeta_n\} = \lim_{L\to\infty} \sum_{k,l=0}^{L} c_{nk}\overline{c_{nl}}R_\xi(k,l) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{nk}\overline{c_{nl}}R_\xi(k,l) < \infty,$$

$$|\mathbf{M}\{\zeta_n\}|^2 = \lim_{L\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{L} c_{nk}m_\xi(k)\right|^2 = \left|\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}m_\xi(k)\right|^2 < \infty,$$

что означает сходимость рядов (2.2.4). Таким образом, если ряды (2.2.4) сходятся, то $\mathbf{M}\{|\eta_n|^2\} < \infty$ и, более того, мы получили соотношения для математического ожидания и дисперсии СП η_n:

$$\mathbf{M}\{\eta_n\} = I_1(n), \quad \mathbf{D}\{\eta_n\} = I_2(n),$$

где $I_1(n)$, $I_2(n)$ определены в (2.2.4). ■

Используя некоторую дополнительную информацию о СП $\{\xi_n\}$, можно несколько упростить условия (2.2.4).

П р и м е р 2.2.2. Пусть известно, что $\mathbf{M}\left\{|\xi_n|^2\right\} \leq K^2$ для всякого $n \in \mathbb{Z}$. Доказать, что для существования линейного преобразования η_n (2.2.1) в этом случае достаточно, чтобы $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_{nk}| < \infty$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Р е ш е н и е. $\mathbf{M}\{|\xi_k|^2\} = \sigma_\xi^2(k) + |m_\xi(k)|^2 \leq K^2$, следовательно, $\sigma_\xi(k) \leq K$ и $|m_\xi(k)| \leq K$. Известно, что $|R_\xi(k,l)| \leq \sigma_\xi(k)\sigma_\xi(l)$, тогда

$$\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} |c_{nk}c_{nl}R_\xi(k,l)| \leq \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} |c_{nk}||c_{nl}|\sigma_\xi(k)\sigma_\xi(l) =$$
$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{nk}|\sigma_\xi(k)\right)^2 \leq K^2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{nk}|\right)^2 < \infty.$$

Таким образом, ряд $I_2(n)$ в (2.2.4) сходится абсолютно и, следовательно, сходится. Аналогично,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{nk}m_\xi(k)| \leq K \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{nk}| < \infty,$$

поэтому сходится ряд $I_1(n)$. Итак, существование η_n теперь следует из результатов примера 2.2.1. ■

Рассмотрим примеры важных для практических приложений линейных преобразований.

П р и м е р 2.2.3. Вещественная СП $\{\xi_k,\ k \geq 0\}$ определена соотношением $\xi_k = \theta + \varepsilon_k$, где θ — случайный параметр с $\mathbf{M}\{\theta\} = m_\theta$ и $\mathbf{D}\{\theta\} = D_\theta$, $\{\varepsilon_k\}$ — центрированный дискретный белый шум такой, что $\mathbf{D}\{\varepsilon_k\} = D_k \leq D$, причем параметр θ не коррелирует с $\{\varepsilon_k\}$. СП $\{\xi_k\}$ подвергается преобразованию осреднения:

$$\eta_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \xi_k, \quad n \geq 0. \tag{2.2.5}$$

Вычислить $\mathbf{M}\{\eta_n\}$, $\mathbf{D}\{\eta_n\}$ и найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{D}\{\eta_n\}$.

Р е ш е н и е. $\mathbf{M}\{\xi_k\} = m_\theta$ и $\mathbf{D}\{\xi_k\} = D_\theta + D_k \leq D_\theta + D$. Поэтому $\mathbf{M}\{\xi_k^2\} \leq$ $\leq D_\theta + D + m_\theta^2 = K < \infty$. Так как сумма в (2.2.5) содержит конечное число слагаемых, условия примера 2.2.2 выполнены. Таким образом, $\mathbf{M}\left\{\eta_n^2\right\} < \infty$ при каждом $n \geq 0$ и $\mathbf{M}\{\eta_n\} = I_1(n)$, $\mathbf{D}\{\eta_n\} = I_2(n)$, где

$$I_1(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} m_\theta = m_\theta; \qquad R_\xi(k,l) = \begin{cases} D_\theta + D_k & \text{при } k = l, \\ D_\theta & \text{при } k \neq l; \end{cases}$$

$$I_2(n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \sum_{k,l=0}^{n} R_\xi(k,l) = \frac{1}{(n+1)^2}\left[(n+1)^2 D_\theta + \sum_{k=0}^{n} D_k\right] =$$
$$= D_\theta + \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} D_k.$$

Заметим, что в силу $D_k \leq D$ имеем

$$D_\theta \leq I_2(n) \leq D_\theta + \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} D = D_\theta + \frac{D}{n+1} \to D_\theta \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, $\mathbf{D}\{\eta_n\} \to D_\theta$ при $n \to \infty$. ■

Для того чтобы прояснить прикладной смысл полученного результата, рассмотрим процедуру линейного оценивания случайного вектора η по вектору наблюдений ξ.

Определение 2.2.3. *Оценка $\widehat{\eta} = \varphi(\xi)$ называется **линейной среднеквадратической оценкой** для η по ξ, если φ — линейное преобразование. Точность оценки характеризуется **среднеквадратической погрешностью** $\Delta = \mathbf{M}\{|\eta - \widehat{\eta}|^2\}$.*

Пример 2.2.4. Доказать, что η_n, определенная в (2.2.5), является несмещенной линейной оценкой для θ, погрешность которой можно сделать сколь угодно малой.

Решение. Преобразуем формулу (2.2.5):

$$\eta_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\xi_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\theta + \varepsilon_k) = \theta + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k.$$

Таким образом, $\delta_n = \eta_n - \theta = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon_k$ представляет собой случайную ошибку оценки η_n.

Тогда $\mathbf{M}\{\delta_n\} = \mathbf{M}\left\{\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon_k\right\} = 0$, так как $\mathbf{M}\{\varepsilon_k\} = 0$. При этом

$$\Delta_n = \mathbf{M}\{\delta_n^2\} = \mathbf{D}\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\right\} \leq \frac{D}{n+1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что следует из результата примера 2.2.3. Итак, $\mathbf{M}\{\eta_n - \theta\} = 0$ для всякого $n \geq 0$ (несмещенность), а $\Delta_n = \mathbf{M}\{|\eta_n - \theta|^2\} \to 0$ при $n \to \infty$ (состоятельность). ■

Рассмотрим вещественную СП $\{\xi_n\}$, являющуюся процессом наблюдения, формируемым по следующей схеме:

$$\xi_k = \varphi(k) + \varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.6}$$

где $\varphi(k)$ — полезный нестационарный случайный сигнал, а $\{\varepsilon_k\}$ — центрированный белый шум с постоянной дисперсией $\mathbf{D}\{\varepsilon_k\} = D_\varepsilon > 0$.

Для оценивания сигнала $\varphi(k)$ СП $\{\xi_k\}$ подвергается преобразованию, которое называется ***фильтром экспоненциального сглаживания*** и имеет вид

$$\eta_n = \alpha\eta_{n-1} + (1-\alpha)\xi_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.7}$$

где $\alpha \in [0,1)$ — параметр фильтра.

В следующем примере исследуются характеристики точности фильтра экспоненциального сглаживания (2.2.7).

Пример 2.2.5. Предположим, что в модели (2.2.6) полезный сигнал имеет вид $\varphi(k) = \theta_1 + \theta_2 k$, где θ_1, θ_2 — случайные параметры с известными средними m_{θ_1}, m_{θ_2} и дисперсиями D_{θ_1}, D_{θ_2}, причем $\{\theta_1,\, \theta_2\}$ не зависят от $\{\varepsilon_k\}$. Найти с.к.-погрешность оценки η_n сигнала $\varphi(k)$, определяемой уравнением (2.2.7).

Решение. 1. Покажем, что (2.2.7) является линейным преобразованием вида (2.2.1):

$$\eta_n = \alpha(\alpha\eta_{n-2} + (1-\alpha)\xi_{n-1}) + (1-\alpha)\xi_n =$$
$$= (1-\alpha)(\xi_n + \alpha\xi_{n-1}) + \alpha^2\eta_{n-2} = \ldots = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\xi_{n-k},$$

причем полученный ряд с.к.-сходится в силу $|\alpha| < 1$.

2. Рассмотрим действие полученного линейного преобразования на СП $\{\xi_n\}$ вида (2.2.6)

$$\eta_n = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k(\theta_1 + \theta_2(n-k)) + (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k} = \eta_n^{(1)} + \eta_n^{(2)}.$$

$$\eta_n^{(1)} = (1-\alpha)(\theta_1 + \theta_2 n)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k - (1-\alpha)\theta_2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k k.$$

Учитывая, что $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k = (1-\alpha)^{-1}$ и $(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}k\alpha^k = \alpha(1-\alpha)^{-1}$, получаем

$\eta_n^{(1)} = \varphi(n) + \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\theta_2$. Отсюда в силу независимости θ_2 от $\{\varepsilon_n\}$ находим

$$\Delta_n = \mathbf{M}\{|\eta_n - \varphi(n)|^2\} = \mathbf{M}\left\{\left|\frac{\alpha}{\alpha-1}\theta_2\right|^2\right\} + \mathbf{D}\left\{(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}\right\},$$

$$\mathbf{M}\left\{\left|\frac{\alpha}{\alpha-1}\theta_2\right|^2\right\} = \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}(m_{\theta_2}^2 + D_{\theta_2}),$$

$$\mathbf{D}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}\right\} = D_\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^2)^k = \frac{D_\varepsilon}{1-\alpha^2}.$$

Окончательно получаем

$$\Delta_n = \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}(m_{\theta_2}^2 + D_{\theta_2}) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}D_\varepsilon = \Delta_n^{(1)} + \Delta_n^{(2)} = f(\alpha).$$

Заметим, что $\Delta_n^{(1)}$ — результат искажения фильтром полезного сигнала $\varphi(n)$, а $\Delta_n^{(2)}$ — остаток от шума наблюдения $\{\varepsilon_k\}$. Интересно, что при $\alpha \to 0$ $\Delta_n^{(1)} \to 0$, но тогда $\Delta_n^{(2)} \to D_\varepsilon$, и, наоборот, при $\alpha \to 1$ $\Delta_n^{(2)} \to 0$, но $\Delta_n^{(1)} \to \infty$. Очевидно, параметр α может быть выбран оптимальным образом из условия $\alpha^* = \arg\min\limits_{\alpha\in[0,1)} f(\alpha)$. ■

2.2.2. Линейные преобразования стационарных СП

Пусть известно, что $\{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ — стационарная вещественная СП с характеристиками: $\mathbf{M}\{\xi_k\} = m_\xi$, $\mathbf{cov}\{\xi_k, \xi_l\} = R_\xi(k-l)$, $\mathbf{D}\{\xi_k\} = R_\xi(0) > 0$. Пусть также задана некоторая числовая последовательность $\{c_m\}$.

Определение 2.2.4. *Случайная последовательность $\{\eta_n\}$ называется* ***стационарным линейным преобразованием*** *случайной последовательности $\{\xi_k\}$ с* ***весовой последовательностью*** *$\{c_m\}$, если*

$$\eta_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\xi_{n-m}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.2.8}$$

Замечание. В разд. 2.1.3 изучались линейные преобразования в спектральной (частотной) форме. Соотношение (2.2.8) дает явное представление преобразования во временной области. Частный случай такого преобразования рассмотрен в примере 2.1.6.

Для существования преобразования (2.2.8) достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m| < \infty, \tag{2.2.9}$$

что следует из результата примера 2.2.2.

П р и м е р 2.2.6. Пусть выполнено (2.2.9). Доказать, что СП $\{\eta_n\}$, определяемая в (2.2.8), является стационарной.

Р е ш е н и е. Покажем, что $\mathbf{M}\{\eta_n\} \equiv m_\eta$ и $\mathbf{cov}\{\eta_n, \eta_m\} \equiv R_\eta(n-m)$ при любых целых m, n:

$$\mathbf{M}\{\eta_n\} = \mathbf{M}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \xi_{n-m}\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\, \mathbf{M}\{\xi_{n-m}\} = m_\xi \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \equiv m_\eta.$$

Далее,

$$\mathbf{cov}\{\eta_n, \eta_m\} = \mathbf{cov}\left\{\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p \xi_{n-p}\,, \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s \xi_{m-s}\right\} =$$

$$= \sum_{p,s=-\infty}^{\infty} c_p c_s\, \mathbf{cov}\{\xi_{n-p}, \xi_{m-s}\} = \sum_{p,s=-\infty}^{\infty} c_p c_s\, R_\xi(n-m+s-p) \equiv R_\eta(n-m).$$

Таким образом, последовательность $\{\eta_n\}$ стационарна по определению. Заметим, что $\mathbf{D}\{\eta\} = R_\eta(0) = \sum\limits_{p,s=-\infty}^{\infty} c_p c_s R_\xi(s-p)$. Обоснованность внесения оператора математического ожидания и ковариации под знак суммирования следует из примеров 2.2.1, 2.2.2 и условия (2.2.9). ■

О п р е д е л е н и е 2.2.5. *Если весовая последовательность* $\{c_m\}$ *такова, что* $c_m = 0$ *при всех* $m < 0$, *то преобразование* (2.2.8), *имеющее вид* $\eta_n = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m \xi_{n-m}$, *называется* ***линейным стационарным фильтром*** *для случайной последовательности* $\{\xi_n\}$.

П р и м е р 2.2.7. Пусть при некотором $|\alpha| < 1$ последовательность $\{\eta_n\}$ удовлетворяет рекуррентному уравнению:

$$\eta_n = \alpha \eta_{n-1} + \xi_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.10}$$

где $\{\xi_n\}$ — вещественная ССП. Показать, что (2.2.10) является линейным стационарным фильтром, и найти моментные характеристики СП $\{\eta_n\}$.

Решение. Непосредственно из результатов примера 2.2.5 следует

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \xi_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.11}$$

где $c_k = \alpha^k$. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\alpha|^k = \dfrac{1}{1-|\alpha|} < \infty$, т. е. условие (2.2.9) выполнено.

Опираясь на результаты примера 2.2.6, находим, что выражения

$$m_\eta = m_\xi \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{m_\xi}{1-\alpha}, \tag{2.2.12}$$

$$R_\eta(n-m) = \sum_{p,s=0}^{\infty} \alpha^{p+s} R_\xi(n-m+s-p), \tag{2.2.13}$$

$$D_\eta = R_\eta(0) = \sum_{p,s=0}^{\infty} \alpha^{p+s} R_\xi(s-p). \tag{2.2.14}$$

определяют математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию СП $\{\eta_n\}$. ■

Особый интерес представляет случай, когда фильтруемая СП $\{\xi_n\}$ является белым шумом. При этом соотношения (2.2.13), (2.2.14) можно существенно упростить.

Пример 2.2.8. В условиях примера 2.2.7 рассмотреть случай, когда $\{\xi_n\}$ — стационарный белый шум.

Решение. По определению белого шума $R_\xi(s-p) = 0$, если $p \neq s$, поэтому из (2.2.14) следует

$$D_\eta = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha^{2p} D_\xi = \frac{D_\xi}{1-\alpha^2}.$$

Пусть теперь $m \leq n$ и $l = n - m$, тогда

$$R_\eta(n-m) = R_\eta(l) = \sum_{p-s=l}^{\infty} \alpha^{2s+l} D_\xi = \alpha^l D_\xi \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^{2s} = \alpha^l D_\eta.$$

Аналогично, если $m > n$, то $R_\eta(l) = R_\eta(-l) = \alpha^{-l} D_\eta$. Объединяя оба решения, находим

$$R_\eta(n-m) = \alpha^{|n-m|} D_\eta. \ ■$$

Определение 2.2.6. *Комплексная функция $\Phi(\lambda)$ действительной переменной $\lambda \in [-\pi, \pi]$, определяемая соотношением*

$$\Phi(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{-i\lambda m}, \tag{2.2.15}$$

называется ***частотной характеристикой*** *линейного стационарного преобразования* (2.2.8).

Замечание. Нетрудно проверить, что $\Phi(\lambda)$, определенная в (2.2.15), совпадает с частотной характеристикой, использованной в (2.1.25) для спектрального представления линейного стационарного преобразования (см. также пример 2.1.6).

Пример 2.2.9. Доказать, что $\Phi(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$ существует, если выполнено условие (2.2.9).

Решение. Покажем, что $|\Phi(\lambda)| < \infty$ при каждом $\lambda \in [-\pi, \pi]$:

$$|\Phi(\lambda)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{-i\lambda m} \right| \le \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m||e^{-i\lambda m}| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m| < \infty,$$

так как $|e^{-i\lambda m}|^2 = \cos^2 \lambda m + \sin^2 \lambda m = 1$. ■

Зачастую преобразование (2.2.8) задается неявно (см. пример 2.2.7), поэтому для вычисления $\Phi(\lambda)$ удобно воспользоваться следующей формулой, вытекающей непосредственно из (2.2.15):

$$\Phi(\lambda) = \frac{L(e^{i\lambda m})}{e^{i\lambda m}}, \tag{2.2.16}$$

где $L(e^{i\lambda m})$ — результат линейного стационарного преобразования неслучайной последовательности $x_m = e^{i\lambda m}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Частотная характеристика $\Phi(\lambda)$ позволяет вычислить спектральную плотность преобразования СП $\{\xi_m\}$ (см. теорему 2.1.4).

Пример 2.2.10. Пусть стационарная СП $\{\xi_m\}$ имеет спектральную плотность $f_\xi(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Доказать, что СП $\{\eta_n\}$ вида (2.2.8) при условии (2.2.9) также имеет спектральную плотность $f_\eta(\lambda)$:

$$f_\eta(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2 f_\xi(\lambda). \tag{2.2.17}$$

Решение. Рассмотрим случай, когда $\sum\limits_n |R_\eta(n)| < \infty$. Тогда в силу представления (2.1.12) $f_\eta(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} R_\eta(n) e^{-i\lambda n}$, причем функция $R_\eta(n)$

имеет вид (см. пример 2.2.6) $R_\eta(n) = \sum\limits_{p,s=-\infty}^{\infty} c_p c_s R_\xi(n+s-p)$, поэтому

$$f_\eta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p,s=-\infty}^{\infty} c_p c_s\, R_\xi(n+s-p) e^{-i\lambda n} =$$

$$= \sum_{p,s=-\infty}^{\infty} c_p c_s\, e^{i\lambda s} e^{-i\lambda p}\, \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_\xi(l) e^{-i\lambda l} = \Phi(\lambda)\overline{\Phi(\lambda)} f_\xi(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2 f_\xi(\lambda). \ \blacksquare$$

Проиллюстрируем применение формулы (2.2.17) для модели преобразования, рассмотренной в примере 2.2.7.

П р и м е р 2.2.11. Пусть линейное преобразование задано рекуррентной формулой (2.2.10), где $\{\xi_n\}$ — центрированная СП с ковариационной функцией $R_\xi(n) = D_\xi \beta^{|n|}$, $|\beta| < 1$. Найти спектральную плотность СП $\{\eta_n\}$.

Р е ш е н и е. По формуле (2.1.12) имеем

$$\begin{aligned} f_\xi(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_\xi(n) e^{-i\lambda n} = \frac{D_\xi}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda n} \beta^{|n|} = \\ &= \frac{D_\xi}{2\pi} \cdot \frac{1-\beta^2}{|1-\beta e^{-i\lambda}|^2} = \frac{D_\xi(1-\beta^2)}{2\pi(1+\beta^2-2\beta\cos\lambda)}. \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Найдем теперь частотную характеристику преобразования

$$\eta_n = \alpha\eta_{n-1} + \xi_n. \tag{2.2.19}$$

Для этого рассмотрим соотношение (2.2.16) для случая, когда $L(\cdot)$ задается уравнением (2.2.19). Тогда

$$\Phi(\lambda) e^{i\lambda n} = \alpha(\Phi(\lambda) e^{i\lambda(n-1)}) + e^{i\lambda n}, \tag{2.2.20}$$

откуда, сокращая на $e^{i\lambda n}$ обе части (2.2.20) и выражая явно $\Phi(\lambda)$, получаем

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{1-\alpha e^{-i\lambda}} \ \text{ и } \ |\Phi(\lambda)|^2 = \frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\lambda}.$$

Теперь, используя формулы (2.2.17) и (2.2.18), находим

$$f_\eta(\lambda) = \frac{D_\xi(1-\beta^2)}{2\pi(1+\alpha^2-2\alpha\cos\lambda)(1+\beta^2-2\beta\cos\lambda)}. \ \blacksquare$$

2.2.3. Линейное прогнозирование стационарных последовательностей

Пусть $\xi = \{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ — центрированная ССП с ковариационной функцией $R_\xi(n)$ и спектральной функцией $F_\xi(\lambda)$.

Определение 2.2.7. ***Пространством значений*** $\mathcal{H}(\xi)$ ***ССП*** ξ *называется совокупность всех случайных величин, являющихся конечными линейными комбинациями сечений СП* ξ *или с.к.-пределами таких комбинаций.*

Элементами пространства $\mathcal{H}(\xi)$ являются линейные преобразования СП ξ (см. разд. 2.1.3).

Для любых $\nu, \eta \in H(\xi)$ можно определить ***скалярное произведение*** и ***норму***:

$$(\nu, \eta) = \mathbf{M}\{\nu\overline{\eta}\},$$

$$\|\nu\| = \big(\mathbf{M}\{|\nu|^2\}\big)^{1/2} = (\nu, \nu)^{1/2}.$$

В этом случае пространство $\mathcal{H}(\xi)$ — гильбертово и является подпространством гильбертова пространства $\mathcal{H}$ случайных величин с конечным вторым моментом (см. разд. 4.2.7). Будем также говорить, что $\mathcal{H}(\xi)$ порождено ССП ξ.

Предположим, что до момента m включительно ССП ξ доступна наблюдению, т. е. $\xi^m = \{\xi_m, \xi_{m-1}, \ldots\}$ — наблюдаемый ***случайный элемент*** (наблюдаемая часть ССП ξ). По аналогии с $\mathcal{H}(\xi)$ введем гильбертово пространство $\mathcal{H}(\xi^m)$, порожденное только наблюдаемой частью ССП ξ. Очевидно, $\mathcal{H}(\xi^m) \subseteq \mathcal{H}(\xi)$.

Определение 2.2.8. ***Наилучшим линейным среднеквадратическим прогнозом (с.к.-оптимальным прогнозом)*** *для* ξ_{m+n}, $n \geq 1$ *по наблюдениям* ξ^m *называется случайная величина* $\eta \in \mathcal{H}(\xi^m)$ *такая, что*

$$\|\xi_{m+n} - \eta\|^2 \leq \|\xi_{m+n} - \gamma\|^2 \quad \forall \gamma \in \mathcal{H}(\xi^m).$$

Далее наилучший линейный прогноз η будем обозначать $\widehat{\xi}_{n+m}$. Точность прогноза характеризуется величиной ***среднеквадратической погрешности (с.к.-погрешности):***

$$\sigma_n^2 = \|\xi_{n+m} - \widehat{\xi}_{n+m}\|^2 = \mathbf{M}\Big\{|\xi_{n+m} - \widehat{\xi}_{n+m}|^2\Big\}.$$

Заметим, что в силу стационарности последовательности ξ ошибка прогноза не зависит от m, а зависит лишь от n, т. е. от числа шагов "вперед", на которое прогнозируется ССП ξ.

Определение 2.2.9. *ССП ξ называется **сингулярной**, если $\sigma_n^2 = 0$ при всех $n \geq 1$. Если же $\sigma_n^2 \to D_\xi = R_\xi(0)$ при $n \to \infty$, то ССП ξ называется **регулярной** (или **чисто случайной**).*

Замечание. Сингулярность ξ означает, что она ***абсолютно точно прогнозируется*** на любое количество $n \geq 1$ шагов по своему прошлому ξ^m. Поэтому сингулярные последовательности также называют ***детерминированными***. Наоборот, регулярность последовательности означает, что $\widehat{\xi}_{m+n} \xrightarrow{\text{с.к.}} \mathbf{M}\{\xi_{n+m}\} = 0$ при $n \to \infty$, т. е. прогноз становится ***тривиальным***.

Оказывается, что всякая стационарная случайная последовательность единственным образом может быть представлена в виде суммы сингулярной и регулярной последовательностей.

Теорема 2.2.1. *Пусть ξ — ССП, тогда она единственным образом представляется в виде*

$$\xi_n = \xi_n^s + \xi_n^r, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.21}$$

где ξ_n^s — сингулярная часть ССП, а ξ_n^r — регулярная часть ССП, причем $(\xi_n^r, \xi_m^s) = \mathbf{cov}\{\xi_n^r, \xi_m^s\} = 0$ при любых n, m, а также

$$\mathcal{H}((\xi^r)^n) \subseteq \mathcal{H}(\xi^n) \quad \text{и} \quad \mathcal{H}((\xi^s)^n) \subseteq \mathcal{H}(\xi^n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

*т. е. ССП $\{\xi_n^s\}$ и $\{\xi_n^r\}$ **подчинены** ССП $\{\xi_n\}$.*

Представление ξ в виде (2.2.21) называется ***разложением Вольда***.

Для описания структуры регулярной ССП нам понадобится понятие обновляющего процесса.

Определение 2.2.10. *Центрированный стандартный дискретный белый шум $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, $\mathbf{M}\{\varepsilon_n\} = 0$, $\mathbf{cov}\{\varepsilon_n, \varepsilon_m\} = \delta_n^m$ называется **обновляющим процессом** для ССП ξ, если при каждом $n \in \mathbb{Z}$*

$$\mathcal{H}(\xi^n) = \mathcal{H}(\varepsilon^n), \tag{2.2.22}$$

где $\varepsilon^n = \{\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots\}$, а $\delta_n^m = 0$ при $n \neq m$ и $\delta_n^n = 1$ (символ Кронекера).

Таким образом, обновляющий процесс ε есть совокупность ортогональных величин, порождающих те же пространства наблюдений $\mathcal{H}(\varepsilon^n)$, $n \in \mathbb{Z}$, что и сама ССП ξ.

Т е о р е м а 2.2.2. *ССП ξ является регулярной тогда и только тогда, когда найдутся обновляющий процесс $\{\varepsilon_n\}$ и коэффициенты $\{a_k\}$ такие, что*

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$.

Критерий регулярности, использующий спектральные характеристики ССП ξ, имеет следующий вид.

Т е о р е м а 2.2.3. *ССП ξ регулярна тогда и только тогда, когда ξ имеет спектральную плотность $f_\xi(\lambda)$, причем $f_\xi(\lambda) > 0$ почти всюду (по мере Лебега) на $[-\pi, \pi]$ и*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f_\xi(\lambda)\, d\lambda > -\infty.$$

З а м е ч а н и е. Если ξ имеет кусочно-постоянную спектральную функцию $F_\xi(\lambda)$, то она сингулярна. Например, если (см. пример 2.1.2)

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\lambda_k n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{z_k\}$ — некоррелированные случайные величины, а λ_k — различные точки полуинтервала $[-\pi, \pi)$, то $F_\xi(\lambda)$ имеет вид

$$F_\xi(\lambda) = \sum_{k:\lambda_k \le \lambda} \sigma_k^2, \quad \text{где} \quad \sigma_k^2 = \mathbf{M}\{|z_k|^2\}. \tag{2.2.23}$$

Эта функция имеет N разрывов первого рода в точках $\{\lambda_k\}$ и постоянна на каждом промежутке $[\lambda_k, \lambda_{k+1})$. В этом случае спектральная плотность $f_\xi(\lambda)$ не существует, что означает сингулярность ССП ξ.

П р и м е р 2.2.12. Вещественная ССП $\xi = \{\xi_n\}$ удовлетворяет уравнению авторегрессии первого порядка:

$$\xi_n = \alpha \xi_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $|\alpha| < 1$, $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ — стандартный дискретный белый шум. Доказать, что ξ — регулярная ССП.

Решение. При каждом n выполнено равенство $\varepsilon_n = \xi_n - \alpha\xi_{n-1}$, поэтому $\mathcal{H}(\varepsilon^n) \subseteq \mathcal{H}(\xi^n)$. С другой стороны, из примера 2.2.7 следует, что

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{2.2.24}$$

где $a_k = \alpha^k$, причем $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \dfrac{1}{1-|\alpha|^2} < \infty$. Кроме того, из (2.2.24) следует, что $\mathcal{H}(\xi^n) \subseteq \mathcal{H}(\varepsilon^n)$. Итак, $\mathcal{H}(\varepsilon^n) = \mathcal{H}(\xi^n)$, т. е. ε — обновляющий процесс для ξ. В силу теоремы 2.2.2 ССП ξ является регулярной. ■

Теперь мы можем описать общий вид с.к.-оптимального линейного прогноза для ξ_{n+m} по наблюдениям $\mathcal{H}(\xi^m)$.

Теорема 2.2.4. *Пусть $\pi_{\mathcal{H}(\xi^m)}$ — оператор ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{H}(\xi^m)$, тогда случайная величина*

$$\widehat{\xi}_{m+n} = \pi_{\mathcal{H}(\xi^m)}(\xi_{m+n}) \tag{2.2.25}$$

является с.к.-оптимальным линейным прогнозом для ξ_{m+n} по наблюдениям $\xi^m = \{\xi_m, \xi_{m-1}, \ldots\}$.

Замечание. Свойства оператора ортогонального проектирования рассмотрены в разд. 4.1.8 и 4.2.7.

Пример 2.2.13. Пусть $\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}$, где $\{\varepsilon_n\}$ — обновляющий процесс. Показать, что

$$\widehat{\xi}_{m+n} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{m+n-k}.$$

Найти с.к.-погрешность σ_n^2 прогноза $\widehat{\xi}_{m+n}$.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $m = 0$:

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varepsilon_{n-k} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} = \xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)}.$$

Очевидно, $\xi_n^{(2)} \in \mathcal{H}(\varepsilon^0)$, а $\xi_n^{(1)} \perp \mathcal{H}(\varepsilon^0)$, так как $\mathbf{cov}\{\xi_n^{(1)}, \eta\} = 0$ для любой СВ $\eta \in \mathcal{H}(\varepsilon^0)$ в силу того, что ε — белый шум.

Так как ε — обновляющий процесс, из (2.2.22) следует $\mathcal{H}(\varepsilon^0) = \mathcal{H}(\xi^0)$. Таким образом, $\xi_n - \xi_n^{(2)} \perp \mathcal{H}(\xi^0)$, т. е. $\xi_n^{(2)} = \pi_{\mathcal{H}(\xi^0)}(\xi_n)$ (см. разд. 4.2.7).

Тогда из (2.2.25) $\widehat{\xi}_n = \xi_n^{(2)}$, что и требовалось доказать.

Для нахождения σ_n^2 заметим, что

$$\sigma_n^2 = \|\xi_n - \widehat{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n^{(1)}\|^2 = \mathbf{M}\left\{\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k \varepsilon_{n-k}\right|^2\right\}.$$

Учитывая, что $\varepsilon_i \perp \varepsilon_j$ при $i \neq j$ и $\mathbf{M}\{|\varepsilon_i|^2\} = 1$, получаем

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2.$$

Заметим, что $\sigma_n^2 \to \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \mathbf{M}\{|\xi_n|^2\} = D_\xi$ при $n \to \infty$, т. е. прогноз действительно становится тривиальным. ■

Пример 2.2.14. В условия примера 2.2.12 найти $\widehat{\xi}_n$ по наблюдениям $\xi^0 = \{\xi_0, \xi_{-1}, \ldots\}$.

Решение. Так как $\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}$, где $a_k = \alpha^k$, а $\{\varepsilon_n\}$ — обновляющий процесс, то в силу примера 2.2.13 имеем

$$\widehat{\xi}_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{-k} = \alpha^n \xi_0.$$

При этом величина $\sigma_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} = \dfrac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}$ является с.к.-погрешностью прогноза $\widehat{\xi}_n$. Здесь также $\sigma_n^2 \to \dfrac{1}{1-\alpha^2} = D_\xi$ при $n \to \infty$. ■

Рассмотрим способ построения прогноза для сингулярной ССП на примере почти периодической ССП (см. пример 2.1.2).

Пример 2.2.15. Построить с.к.-оптимальный прогноз для ξ_1 по наблюдениям ξ^0 в случае сингулярной последовательности $\{\xi_n\}$ из примера 2.1.2.

Решение. По условию

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{N} z_k e^{i\lambda_k n} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} Z_\xi(d\lambda).$$

Пусть $\Phi(\lambda)$ — искомая частотная характеристика, дающая с.к.-оптимальный прогноз на один шаг:

$$\widehat{\xi}_1 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda}\Phi(\lambda) Z_\xi(d\lambda).$$

С.к.-погрешность этого прогноза имеет вид

$$\sigma_1^2 = \mathbf{M}\{|\xi_1 - \widehat{\xi}_1|^2\} = \int_{-\pi}^{\pi} \left|e^{i\lambda}(1-\Phi(\lambda))\right|^2 dF_\xi(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} |1-\Phi(\lambda_k)|^2 D_k,$$

где $D_k = \mathbf{M}\{|z_k|^2\}$, а $F_\xi(\lambda)$ — спектральная функция ССП ξ_n (2.1.12). В силу сингулярности прогнозируемой последовательности $\sigma_1^2 = 0$, поэтому найдется $\Phi(\lambda)$ такая, что

$$\Phi(\lambda_k) = 1, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Будем искать функцию $\Phi(\lambda)$ в виде

$$\Phi(\lambda) = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l e^{-i\lambda l},$$

тогда для определения коэффициентов $\{\alpha_l\}$ необходимо решить систему уравнений

$$\sum_{l=1}^{N} \alpha_l e^{-i\lambda_k l} = 1, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{2.2.26}$$

Нетрудно проверить, что решение $\{\widehat{\alpha}_l\}$ системы (2.2.26) существует и единственно, если $\lambda_k \neq \lambda_j$ при $k \neq j$, что и предполагается по условию.

Теперь мы можем найти окончательное выражение для $\widehat{\xi}_1$:

$$\widehat{\xi}_1 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} \sum_{l=1}^{N} \widehat{\alpha}_l e^{-i\lambda l} Z_\xi(d\lambda) = \sum_{l=1}^{N} \widehat{\alpha}_l \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(1-l)} Z_\xi(d\lambda) = \sum_{l=1}^{N} \widehat{\alpha}_l \xi_{1-l}.$$

Видно, что прогноз строится по наблюдениям $\{\xi_0, \xi_{-1}, \ldots, \xi_{-N+1}\}$ и является абсолютно точным, так как $\sigma_1^2 = 0$ по построению. ■

Пусть теперь $\{\xi_k\}$ — регулярная ССП со спектральной плотностью вида

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|\Phi(e^{-i\lambda})|^2,$$

где $\Phi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ имеет радиус сходимости $r > 1$ и не имеет нулей в области $|z| \le 1$.

Для построения прогноза $\widehat{\xi}_n$ по наблюдениям ξ^0 в этом случае можно воспользоваться следующим ***алгоритмом***:

1. Определить функцию

$$g_n(\lambda) = e^{i\lambda n}\Phi_n(e^{-i\lambda})(\Phi(e^{-i\lambda}))^{-1}, \tag{2.2.27}$$

где $\Phi_n(z) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} b_k z^k$.

2. Представить $g_n(\lambda)$ в виде ряда Фурье:

$$g_n(\lambda) = c_0 + c_1 e^{-i\lambda} + c_2 e^{-i2\lambda} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ik\lambda}. \tag{2.2.28}$$

3. Вычислить прогноз $\widehat{\xi}_n$ в виде линейного преобразования:

$$\widehat{\xi}_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi_{-k}, \tag{2.2.29}$$

где $\{c_k\}$ — коэффициенты ряда (2.2.28).

Оказывается, что оценка $\widehat{\xi}_n$ является несмещенной, т. е. $\mathbf{M}\Big\{\xi_n - \widehat{\xi}_n\Big\} = 0$, а дисперсия ее ошибки (т. е. с.к.-погрешность) может быть вычислена по формуле

$$\sigma_n^2 = \mathbf{M}\{|\xi_n - \widehat{\xi}_n|^2\} = \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^2. \tag{2.2.30}$$

Из (2.2.30) также следует, что σ_n^2 монотонно возрастает при $n \to \infty$.

Пример 2.2.16. В условиях примера 2.2.11 построить оптимальный прогноз $\widehat{\xi}_n$ для ξ_n по наблюдениям ξ^0 и определить точность этого прогноза.

Решение. С учетом выражения (2.2.18) для спектральной плотности $f_\xi(\lambda)$ получаем

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|\Phi(e^{-i\lambda})|^2,$$

где

$$\Phi(z) = a(1 - \beta z)^{-1} = a\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

$a = [D_\xi(1-\beta^2)]^{1/2}$, $b_k = a\beta^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Найдем теперь выражение для $\Phi_n(z)$:

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k z^k = \beta^n z^n a \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k z^k = \beta^n z^n \Phi(z).$$

Поэтому $\Phi_n(z)[\Phi(z)]^{-1} = \beta^n z^n$, откуда

$$g_n(\lambda) = e^{i\lambda n}\Phi_n(e^{-i\lambda n})[\Phi(e^{-i\lambda n})]^{-1} = e^{i\lambda n}\beta^n(e^{-i\lambda})^n = \beta^n.$$

Таким образом, в данном случае в разложении (2.2.28) для функции $g_n(\lambda)$ имеем $c_0 = \beta^n \neq 0$, и $c_k = 0$ для любого $k \geq 1$. Итак, из (2.2.29) теперь следует, что

$$\widehat{\xi}_n = \beta^n \xi_0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.2.31}$$

С учетом того, что $b_k = a\beta^k$, $k = 0, 1, \ldots$, по формуле (2.2.30) находим выражение для дисперсии ошибки прогноза $\widehat{\xi}_n$:

$$\sigma_n^2 = \mathbf{M}\{|\xi_n - \widehat{\xi}_n|^2\} = a^2 \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{2k} = \frac{a^2(1-\beta^{2n})}{1-\beta^2} = D_\xi(1-\beta^{2n}). \tag{2.2.32}$$

Заметим, что наиболее точным является прогноз на один шаг $(n = 1)$, его точность равна $\sigma_1^2 = D_\xi(1-\beta^2)$. При увеличении n в силу условия $|\beta| < 1$ имеем $\beta^{2n} \to 0$, поэтому $\sigma_n^2 \to D_\xi$ при $n \to \infty$. Так как $D_\xi = R_\xi(0)$ — дисперсия СП $\{\xi_n\}$, видно, что точность оптимального прогноза $\widehat{\xi}_n$ при $n \to \infty$ падает и приближается к точности “тривиального” прогноза $\widetilde{\xi}_n = \mathbf{M}\{\xi_n\} = 0$, для которого, очевидно, $\mathbf{M}\Big\{|\xi_n - \widetilde{\xi}_n|^2\Big\} = \mathbf{D}\{\xi_n\} = D_\xi$. ■

2.2.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать формулу (2.2.16).

2. Найти спектральную плотность СП $\{\eta_n\}$:

$$\eta_n = a_0\xi_n + a_1\xi_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{\xi_n\}$ — центрированный белый шум с дисперсией D_ξ.

Ответ: $f_\eta(\lambda) = \dfrac{D_\xi}{2\pi}(a_0^2 + a_1^2 + 2a_0a_1\cos\lambda)$.

3. Найти m_η, если $\eta_n = \alpha\eta_{n-1} + \beta\eta_{n-2} + \xi_n$, а $\mathbf{M}\{\xi_n\} = m_\xi$.

Ответ: $m_\eta = m_\xi/(1-\alpha-\beta)$, если корни алгебраического уравнения $1-\alpha z-\beta z^2 = 0$ по модулю больше 1.

4. $\eta_n = \dfrac{1}{2T}\sum\limits_{k=n-T}^{n+T-1}\xi_{n+k}$, где T — положительное целое число, а $\{\xi_n\}$ — белый шум с параметрами m_ξ и D_ξ. Найти m_η и D_η.

Ответ: $m_\eta = m_\xi$, $D_\eta = D_\xi/2T$.

5. Пусть $\eta_n = \eta_{n-1} - \dfrac{1}{4}\eta_{n-2} + \varepsilon_n$. Найти явное выражение вида (2.2.8) для $\{\eta_n\}$.

Указание: использовать $\eta_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k\varepsilon_{n-k}$ совместно с условием $\eta_n - \eta_{n-1} + \dfrac{1}{4}\eta_{n-2} = \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}$, показать, что коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из рекуррентных соотношений $\alpha_k = \alpha_{k-1} - \dfrac{1}{4}\alpha_{k-2}$, $k \geq 2$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$.

Ответ: $\eta_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{k+1}{2^k}\varepsilon_{n-k}$.

6. В условиях предыдущей задачи найти спектральную плотность СП $\{\eta_n\}$, если $\{\varepsilon_n\}$ — белый шум со спектральной плотностью $f_\varepsilon(\lambda) = 1$.

Ответ: $f_\eta(\lambda) = \dfrac{1}{1{,}5625 - 2{,}5\cos\lambda + \cos^2\lambda}$.

7. Пусть $\xi_k = \theta_1 + \theta_2 k + \varepsilon_k$, $k = 0, 1, \ldots$, где $\{\varepsilon_k\}$ — центрированный белый шум с дисперсией D_ε. Оценка η_n полезного сигнала $\varphi(n) = \theta_1 + \theta_2 n$ имеет вид

$$\eta_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\xi_k.$$

Найти с.к.-погрешность оценки η_n, если $\{\theta_1, \theta_2\}$ не зависят от $\{\varepsilon_k\}$, а параметры m_{θ_2} и D_{θ_2} известны.

Ответ: $\Delta_n = \mathbf{M}\{|\eta_n - \varphi(n)|^2\} = 0{,}25\,n^2(m_{\theta_2}^2 + D_{\theta_2}) + D_\varepsilon/(n+1)$.

8. Пусть СП, имеющая спектральную функцию $F_\xi(\lambda)$, подвергается линейному стационарному преобразованию с частотной характеристикой $\Phi(\lambda)$. Найти явный вид спектральной функции $F_\eta(\lambda)$.

Ответ: $F_\eta(\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\lambda} |\Phi(\mu)|^2 dF_\xi(\mu)$.

9. СП η получена из стандартного белого шума ε преобразованием вида

$$\eta_n = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n+1}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказать стационарность СП $\{\eta_n\}$ и вычислить ее спектральную плотность.

Указание: воспользоваться теоремой 2.1.4.

Ответ: $f_\eta(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\cos^2\lambda$.

10. Пусть $m_\xi = 3$ и $f_\xi(\lambda) = 5 + 4\cos\lambda$. Найти с.к.-оптимальный прогноз $\widehat{\xi}_n$ по наблюдениям ξ^0 и дисперсию ошибки прогноза Δ_n для всех $n \geq 1$.

Ответ: $\widehat{\xi}_1 = 3 + 0{,}5\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-0{,}5)^k(\xi_{-k} - 3)$, $\Delta_1 = 8\pi$ и $\widehat{\xi}_n = m_\xi = 3$, $\Delta_n = D_\xi = 10\pi$, если $n \geq 2$.

2.3. Цепи Маркова

2.3.1. Вероятностные характеристики цепей Маркова

Цепью Маркова, которая далее для краткости обозначается ЦМ, называется последовательность вещественных случайных величин, обладающая ***марковским свойством***.

Пусть $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_k, \ldots\}$ — некоторое конечное или счетное множество. Рассмотрим последовательность случайных величин ξ_n, $n = 0, 1, \ldots$, которые принимают значения из заданного множества E с вероятностями $\pi_k(n) = \mathbf{P}\{\xi_n = e_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ Таким образом, ξ_n — случайная величина с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний E. Случайная последовательность $\xi = \{\xi_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ указанного типа называется ***дискретной цепью***.

Определение 2.3.1. *Случайная последовательность ξ называется* ***дискретной цепью Маркова****, если она является дискретной цепью и обладает марковским свойством, т. е. для каждого $n \geq 1$ и любых элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ множества E выполнено*

$$\mathbf{P}\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, \xi_0 = x_0\} = \mathbf{P}\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}\}. \qquad (2.3.1)$$