9. Частица, находящаяся на плоскости в точке с целыми координатами (m, n), может с вероятностью $1/4$ переместиться в любую из четырех точек с координатами $(m \pm 1, n \pm 1)$. Доказать, что все состояния двумерной ЦМ, описывающей процесс блуждания, возвратны.

2.4. Разностные стохастические уравнения

2.4.1. Модели авторегрессии и скользящего среднего

Пусть $\{\varepsilon_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность независимых случайных величин с характеристиками $m_\varepsilon(n) = \mathbf{M}\{\varepsilon_n\}$ и $D_\varepsilon(n) = \mathbf{M}\{|\varepsilon_n - m_\varepsilon(n)|^2\}$. Далее ε называется ***дискретным белым шумом***.

Замечание. В примере 2.1.3 мы рассматривали стационарный дискретный белый шум. Определенный выше дискретный белый шум будет стационарным, если $m_\varepsilon(n) = m_\varepsilon = \text{const}$, $D_\varepsilon(n) = D_\varepsilon = \text{const}$. При этом некоррелированность сечений следует из их независимости. Кроме того, в данном разделе мы будем рассматривать только вещественные СП.

Определение 2.4.1. *Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ называется* ***авторегрессионной последовательностью (АР-последовательностью)*** *порядка $p \geq 1$, если она удовлетворяет уравнению*

$$\xi_n + \sum_{k=1}^{p} b_k \xi_{n-k} = \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.4.1}$$

где $\{b_k\}$ — числовые параметры модели авторегрессии (АР-модели) (2.4.1), *а $p \geq 1$ — порядок модели.*

Алгебраическое уравнение

$$x^p + \sum_{k=1}^{p} b_k x^{p-k} = 0 \tag{2.4.2}$$

называется ***характеристическим уравнением*** АР-модели (2.4.1).

Определение 2.4.2. *АР-модель* (2.4.1) *называется* ***асимптотически устойчивой****, если все решения $\{x_i\}$ характеристического уравнения удовлетворяют условию $|x_i| < 1$.*

Определение 2.4.3. *Случайная последовательность $\{\eta_n\}$ называется последовательностью* ***скользящего среднего (СС-последовательно-***

стью) *порядка $q \geq 1$, если*

$$\eta_n = a_0\varepsilon_n + \sum_{k=1}^{q} a_k\varepsilon_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.4.3}$$

где $\{a_k\}$, q — параметры СС-модели (2.4.3).

Если все решения $\{z_i\}$ характеристического уравнения СС-модели

$$a_0 z^q + \sum_{k=1}^{q} a_k z^{q-k} = 0$$

удовлетворяют условию $|z_i| < 1$, то модель (2.4.3) называется ***минимально-фазовой***.

Очевидно, модели (2.4.1), (2.4.3) можно объединить в одну комбинированную модель.

Определение 2.4.4. *Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ называется последовательностью* ***авторегрессии-скользящего среднего*** *(или* ***АРСС-последовательностью****) порядка (p, q), если она удовлетворяет разностному стохастическому уравнению*

$$\xi_n + \sum_{k=1}^{p} b_k\xi_{n-k} = a_0\varepsilon_n + \sum_{j=1}^{q} a_j\varepsilon_{n-j}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.4.4}$$

Числа $\{b_k\}_{k=1}^{p}$, $\{a_j\}_{j=0}^{q}$ являются параметрами АРСС-модели, p — порядок авторегрессии, а q — порядок скользящего среднего.

Замечание. Из приведенных определений следует, что если $\{\varepsilon_n\}$ — ***гауссовский*** белый шум, то АРСС-последовательность $\{\xi_n\}$ также является ***гауссовской***.

Пример 2.4.1. Пусть в асимптотически устойчивой АР-модели порядка $p = 1$ белый шум $\{\varepsilon_n\}$ является стационарным. Найти математическое ожидание и дисперсию АР-последовательности $\{\xi_n\}$ и доказать ее стационарность.

Решение. По условию $\{\xi_n\}$ удовлетворяет уравнению

$$\xi_n + b\xi_{n-1} = \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.4.5}$$

Характеристическое уравнение модели (2.4.5) имеет вид $x+b = 0$, и, следовательно, $|x_1| = |b| < 1$ — условие асимптотической устойчивости. Используя прием, описанный в примере 2.2.5, нетрудно показать, что

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \varepsilon_{n-k}, \tag{2.4.6}$$

где $\beta = -b$, причем ряд (2.4.6) сходится в среднеквадратическом смысле в силу $|\beta| < 1$. Итак, ξ_n является линейным преобразованием белого шума $\{\varepsilon_n\}$. Обозначим $m_\varepsilon = \mathbf{M}\{\varepsilon_n\}$ и $D_\varepsilon = \mathbf{D}\{\varepsilon_n\}$, тогда

$$m_\xi(n) = \mathbf{M}\{\xi_n\} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \mathbf{M}\{\varepsilon_{n-k}\} = m_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{m_\varepsilon}{1+b},$$

$$D_\xi(n) = \mathbf{D}\{\xi_n\} = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^k)^2 \mathbf{D}\{\varepsilon_{n-k}\} = D_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^k)^2 = \frac{D_\varepsilon}{1-b^2}.$$

Для доказательства стационарности $\{\xi_n\}$ остается вычислить ковариационную последовательность

$$\mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_m\} = \sum_{k,j=0}^{\infty} \beta^k \beta^j \mathbf{cov}\{\varepsilon_{n-k}, \varepsilon_{m-j}\} = \beta^{|n-m|} D_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (b^2)^k = \\ = \beta^{|n-m|} D_\xi = R_\xi(n-m).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathbf{cov}\{\varepsilon_{n-k}, \varepsilon_{m-j}\} = D_\varepsilon$, если $n - k = m - j$ и $\mathbf{cov}\{\varepsilon_{n-k}, \varepsilon_{m-j}\} = 0$ при $n - k \neq m - j$. Итак, СП $\{\xi_n\}$ имеет постоянные математическое ожидание и дисперсию, а ковариация сечений ξ_n и ξ_m зависит только от разности $n - m$, т. е. $\{\xi_n\}$ является стационарной в широком смысле СП с характеристиками $m_\xi = \dfrac{m_\varepsilon}{1+b}$, $D_\xi = \dfrac{D_\varepsilon}{1-b^2}$, $R_\xi(k) = (-b)^{|k|} D_\xi$. ■

Аналогичная ситуация имеет место и для асимптотически устойчивой АР-модели произвольного порядка $p \geq 1$.

Теорема 2.4.1. *Пусть $\{\xi_n\}$ удовлетворяет уравнению* (2.4.1), *описывающему асимптотически устойчивую АР-модель порядка $p \geq 1$, где $\{\varepsilon_n\}$ — стационарный белый шум, тогда*

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varepsilon_{n-k},$$

где коэффициенты $\{\alpha_k\}$ удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$ и вычисля-

ются по рекуррентным формулам

$$\begin{cases} \alpha_{k+1}\beta_{k,1} = 0, \\ \beta_{k+1,j} = \beta_{k,j+1} - \beta_{k,1}b_j, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \\ \beta_{k+1,p} = -\beta_{k,1}b_p, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

с начальными условиями $\alpha_0 = 1$, $\beta_{0,j} = b_j$, $j = 1, 2, \dots, p$. *При этом СП* $\{\xi_n\}$ *является стационарной и имеет характеристики*

$$m_\xi = m_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k, \qquad D_\xi = D_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2,$$

$$R_\xi(m) = D_\xi \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \alpha_{k+|m|}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

В примере (2.1.4) рассматривалась модель бесконечного скользящего среднего. Рассмотрим теперь модель скользящего среднего (2.4.3) конечного порядка.

Пример 2.4.2. СС-последовательность $\{\eta_n\}$ удовлетворяет (2.4.3), где $\{\varepsilon_n\}$ — стационарный белый шум. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию СП $\{\eta_n\}$.

Решение. По определению $\eta_n = \sum\limits_{k=0}^{q} a_k \varepsilon_{n-k}$, где $\mathbf{M}\{\varepsilon_k\} = m_\varepsilon = \text{const}$, $\mathbf{D}\{\varepsilon_k\} = D_\varepsilon = \text{const}$, $\mathbf{cov}\{\varepsilon_k, \varepsilon_j\} = 0$ при $k \neq j$. Отсюда

$$\mathbf{M}\{\eta_n\} = \mathbf{M}\left\{\sum_{k=0}^{q} a_k \varepsilon_{n-k}\right\} = m_\varepsilon \sum_{k=0}^{q} a_k = \text{const},$$

$$\mathbf{D}\{\eta_n\} = \sum_{k,l=0}^{q} a_k a_l \,\mathbf{cov}\{\varepsilon_{n-k}, \varepsilon_{n-l}\} = D_\varepsilon \sum_{k=0}^{q} a_k^2,$$

$$\mathbf{cov}\{\eta_n, \eta_m\} = \sum_{k,l=0}^{q} a_k a_l \,\mathbf{cov}\{\varepsilon_{n-k}, \varepsilon_{m-l}\} = D_\varepsilon \sum_{k=0}^{q-|n-m|} a_k a_{k+|n-m|} \text{ при } |n-m| \leq q$$

и $\mathbf{cov}\{\eta_n, \eta_m\} = 0$ при $|n-m| > q$. Отсюда $R_\xi(m) = D_\varepsilon \sum\limits_{k=0}^{q-|m|} a_k a_{k+|m|}$ при $|m| \leq q$ и $R_\xi(m) = 0$ при $|m| > q$. Последнее означает, что любые сечения

СС-последовательности, отстоящие друг от друга более чем на q шагов, являются некоррелированными. Этим СС-последовательность существенно отличается от АР-последовательности, так как у последней сколь угодно далеко отстоящие друг от друга сечения в общем случае являются коррелированными. ■

Пример 2.4.3. Доказать, что АР-последовательность первого порядка обладает марковским свойством.

Решение. Пусть известно, что для некоторого $m \geq 0$ и целых чисел $n_0 < n_1 < \ldots < n_m = n-1$ выполнено $\xi_{n_0} = x_0, \xi_{n_1} = x_1, \ldots, \xi_{n_m} = x_m$. Вычислим $\mathbf{P}\{\xi_n \in B \mid \xi_{n_m} = x_m, \ldots, \xi_{n_0} = x_0\}$, где B — произвольное борелевское множество на прямой.

По условию $\xi_n + b\xi_{n-1} = \varepsilon_n$, причем $\xi_{n-m} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-b)^k \varepsilon_{n-m-k}$, поэтому ε_n и ξ_{n-m} независимы при всех $m \geq 1$ в силу того, что $\{\varepsilon_n\}$ — белый шум с независимыми сечениями. Тогда $\mathbf{P}\{\xi_n \in B \mid \xi_{n_m} = x_m, \ldots, \xi_{n_0} = x_0\} = \mathbf{P}\{-b\xi_{n-1} + \varepsilon_n \in B \mid \xi_{n_m} = x_m, \ldots, \xi_{n_0} = x_0\} = \mathbf{P}\{\varepsilon_n - bx_m \in B\} = P_n(B)$. С другой стороны, $\mathbf{P}\{\xi_n \in B \mid \xi_{n_m} = x_m\} = \mathbf{P}\{\varepsilon_n - bx_m \in B\} = P_n(B)$. Таким образом, $\mathbf{P}\{\xi_n \in B \mid \xi_{n_m} = x_m, \ldots, \xi_{n_0} = x_0\} = \mathbf{P}\{\xi_n \in B \mid \xi_{n_m} = x_m\}$.

Совершенно аналогично рассматривается случай произвольного $n_m < n$. В силу произвольности выбора m, $\{n_k\}$ и B доказанное означает, что ξ_n — марковская последовательность. Подчеркнем, что доказанное утверждение справедливо для случая, когда $\{\varepsilon_n\}$ — белый шум с независимыми сечениями. Если же сечения являются лишь некоррелированными, то марковское свойство может нарушаться. Однако, если $\{\varepsilon_n\}$ — гауссовский белый шум, то марковское свойство следует из результатов примера 1.2.12. ■

Обычно в практических задачах всякий процесс имеет “начало”, т. е. $\{\xi_n\}$ задан лишь при $n \geq 0$. Если при $n \geq 1$ ξ_n удовлетворяет уравнению авторегрессии порядка p, а значения $\xi_0 = \zeta_1, \ldots, \xi_{-p+1} = \zeta_p$ — заданные случайные величины (начальные условия), то свойства СП $\{\xi_n\}$ несколько отличаются от свойств АР-последовательности.

Пример 2.4.4. Найти математическое ожидание и дисперсию последовательности $\{\xi_n\}$, удовлетворяющей уравнению

$$\xi_n = \alpha\xi_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \geq 1, \qquad \xi_0 = \eta, \tag{2.4.7}$$

где $|\alpha| < 1$, η — случайная величина с $\mathbf{M}\{\eta^2\} < \infty$, не зависящая от стационарного белого шума $\{\varepsilon_n\}$.

Решение. Найдем представление ξ_n через $\{\varepsilon_n\}$ и η:

$$\xi_n = \varepsilon_n + \alpha\varepsilon_{n-1} + \alpha^2\xi_{n-2} = \ldots = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \varepsilon_{n-k} + \alpha^n \eta,$$

$$m_\xi(n) = \mathbf{M}\{\xi_n\} = m_\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k + \alpha^n m_\eta = m_\varepsilon \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} + \alpha^n m_\eta.$$

$$D_\xi(n) = \mathbf{D}\{\xi_n\} = \mathbf{D}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \varepsilon_{n-k}\right\} + \mathbf{D}\{\alpha^n \eta\} = D_\varepsilon \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2} + \alpha^{2n} D_\eta.$$

Подчеркнем, что СП $\{\xi_n\}$ нестационарна, так как $m_\xi(n)$ и $D_\xi(n)$ зависят явно от n. В силу условия $\mathbf{M}\{\eta^2\} < \infty$ имеем $|m_\eta| < \infty$ и $D_\eta < \infty$, поэтому с учетом $|\alpha| < 1$ получаем:

$$m_\xi(n) \to \frac{m_\varepsilon}{1-\alpha}, \quad D_\xi(n) \to \frac{D_\varepsilon}{1-\alpha^2} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, предельные значения математического ожидания и дисперсии для СП $\{\xi_n\}$ такие же, как и для стационарной АР-последовательности порядка $p = 1$, удовлетворяющей (2.4.7) при всех $n \in \mathbb{Z}$. ■

Замечание. Можно показать, что вывод о совпадении предельных характеристик последовательности $\{\xi_n\}$, удовлетворяющей уравнению авторегрессии порядка $p > 1$ с заданными начальными значениями, и характеристик соответствующей АР-последовательности остается в силе, если АР-модель асимптотически устойчива.

2.4.2. Спектральные характеристики АРСС-последовательностей

Из теоремы 2.4.1 следует, что АРСС-последовательность $\{\xi_n\}$ является результатом стационарного линейного преобразования стационарного белого шума $\{\varepsilon_n\}$. Поэтому спектральная плотность $f_\xi(\lambda)$ последовательности $\{\xi_n\}$ может быть вычислена с использованием результатов разд. 2.2.2.

Пример 2.4.5. Пусть $\{\xi_n\}$ — АРСС-последовательность, определяемая разностным стохастическим уравнением

$$\xi_n + \sum_{k=1}^{p} b_k \xi_{n-k} = \sum_{j=0}^{q} a_j \varepsilon_{n-j}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.4.8}$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — центрированный стационарный белый шум с дисперсией $D_\varepsilon > 0$. Найти спектральную плотность $f_\xi(\lambda)$.

Р е ш е н и е. Найдем частотную характеристику $\Phi(\lambda)$ линейного преобразования (2.4.8). Для этого предположим, что $\varepsilon_n = e^{i\lambda n}$. Тогда из (2.2.16) следует, что $\xi_n = \Phi(\lambda)e^{i\lambda n}$. Подставим соответствующие ε_n и ξ_n в уравнение (2.4.8), тогда

$$\Phi(\lambda)\left[e^{i\lambda n} + \sum_{k=0}^{p} b_k e^{i\lambda(n-k)}\right] = \sum_{j=0}^{q} a_j e^{i\lambda(n-j)}. \tag{2.4.9}$$

После деления обеих частей равенства (2.4.9) на $e^{i\lambda n}$ получаем

$$\Phi(\lambda) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{q} a_j e^{-i\lambda j}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{p} b_k e^{-i\lambda k}} = \frac{F(e^{-i\lambda})}{H(e^{-i\lambda})},$$

где $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_q x^q$, а $H(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p$.

Заметим, что условие асимптотической устойчивости модели (2.4.8) означает, что все корни характеристического многочлена $\widetilde{H}(x) = x^p H(x^{-1})$ по модулю меньше единицы. Поэтому выполнено условие (2.1.25) интегрируемости квадрата модуля частотной характеристики $\Phi(\lambda)$, поскольку

$$|\Phi(\lambda)|^2 = \Phi(\lambda)\overline{\Phi(\lambda)} = \frac{F(e^{-i\lambda})}{H(e^{-i\lambda})} \cdot \frac{F(e^{i\lambda})}{H(e^{i\lambda})} = \left|\frac{F(e^{-i\lambda})}{H(e^{-i\lambda})}\right|^2.$$

Наконец, спектральная плотность белого шума $\{\varepsilon_n\}$ равна $f_\varepsilon(\lambda) = \dfrac{D_\varepsilon}{2\pi}$. Теперь, используя соотношение (2.2.17), получаем

$$f_\xi(\lambda) = \frac{D_\varepsilon \left|\sum\limits_{j=0}^{q} a_j e^{-i\lambda j}\right|^2}{2\pi \left|1 + \sum\limits_{k=1}^{p} b_k e^{-i\lambda k}\right|^2}. \tag{2.4.10}$$

Из (2.4.10) следует, что спектральная плотность АРСС-последовательности порядка (p, q) является дробно-рациональной функцией переменной $e^{-i\lambda}$. ■

Формула (2.4.10) позволяет явно вычислить дисперсию АРСС-последовательности для произвольных порядков p и q.

Пример 2.4.6. СП $\{\xi_n\}$ удовлетворяет уравнению

$$\xi_n - 0{,}5\,\xi_{n-1} + 0{,}25\,\xi_{n-2} = \varepsilon_n, \qquad (2.4.11)$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — центрированный стационарный белый шум с $D_\varepsilon = 1$. Вычислить дисперсию D_ξ СП $\{\xi_n\}$.

Решение. Убедимся, что модель (2.4.11) асимптотически устойчива. Характеристическое уравнение модели имеет вид

$$x^2 - 0{,}5\,x + 0{,}25 = 0. \qquad (2.4.12)$$

Найдем корни уравнения (2.4.12): $x_{1,2} = 0{,}25(1 \pm i\sqrt{3})$, поэтому $|x_{1,2}| = 0{,}5 < 1$, т. е. условие асимптотической устойчивости выполнено. Теперь из (2.4.10) следует, что

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi |H(e^{-i\lambda})|^2}, \quad \text{где } H(x) = 1 - 0{,}5\,x + 0{,}25\,x^2.$$

Дисперсия D_ξ может быть найдена по формуле (2.1.13):

$$D_\xi = \int_{-\pi}^{\pi} f_\xi(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{|H(e^{-i\lambda})|^2} = I_2. \qquad (2.4.13)$$

Для аналитического вычисления интеграла (2.4.13) воспользуемся алгоритмом, изложенным в разд. 4.3.2.

Пусть $\gamma = 0{,}5$, тогда $b_0 = 1$, $b_1 = -\gamma$, $b_2 = \gamma^2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $p = 2$. Для вычисления интеграла I_2 воспользуемся рекуррентными формулами (4.3.9) с начальными условиями (4.3.10). В условиях данного примера получаем: $\alpha_2^2 = \alpha_1^1 = 0$, $\alpha_0^0 = 1$; $\beta_0^2 = 1$, $\beta_0^1 = 1 - \gamma^4$, $\beta_0^0 = \dfrac{1 - \gamma^6}{1 + \gamma^2}$. Отсюда по формуле (4.3.8) $I_2 = \dfrac{1}{\beta_0^2} \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{(\alpha_k^k)^2}{\beta_0^k} = \dfrac{1}{\beta_0^0} = \dfrac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^6}$. Подставляя $\gamma = 0{,}5$, находим $D_\xi = I_2 \approx 1{,}27$.

Заметим, что мы получили несколько более общий результат: если $\{\xi_n\}$ удовлетворяет уравнению АР-модели вида

$$\xi_n - \gamma\xi_{n-1} + \gamma^2\xi_{n-2} = \varepsilon_n, \quad |\gamma| < 1,$$

то $\mathbf{D}\{\xi_n\} = D_\varepsilon \dfrac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^6}$, где $D_\varepsilon = \mathbf{D}\{\varepsilon_n\}$. ■

Применительно к практическим приложениям для описания СП $\{\xi_n\}$ удобно использовать параметрическую АРСС-модель вида (2.4.1), обеспечивающую требуемый вид спектральной плотности $\{\xi_n\}$. Из примера 2.4.1 следует, что в случае, когда $f_\xi(\lambda)$ имеет вид (2.4.10), а $\{\varepsilon_n\}$ — гауссовский стационарный белый шум с дисперсией D_ε, $\{\xi_n\}$ является гауссовской СП, удовлетворяющей уравнению АРСС. Соответствующая АРСС-модель называется ***формирующим фильтром*** для СП $\{\xi_n\}$, построенным по заданной дробно-рациональной спектральной плотности.

Пример 2.4.7. Построить формирующий фильтр для гауссовской центрированной случайной последовательности $\{\xi_n\}$ со спектральной плотностью $f_\xi(\lambda) = \dfrac{1{,}49 + 1{,}4\cos\lambda}{2\pi(1{,}16 - 0{,}8\cos\lambda)}$.

Решение. Произведем ***факторизацию*** спектральной плотности $f_\xi(\lambda)$:

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(1 + 0{,}7\,e^{-i\lambda})(1 + 0{,}7\,e^{i\lambda})}{(1 - 0{,}4\,e^{-i\lambda})(1 - 0{,}4\,e^{i\lambda})} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{F(e^{-i\lambda})F(e^{i\lambda})}{H(e^{-i\lambda})H(e^{i\lambda})},$$

где $F(x) = 1 + 0{,}7\,x$, $H(x) = 1 - 0{,}4\,x$. Таким образом, $f_\xi(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2 f_\varepsilon(\lambda)$, где $\Phi(\lambda) = \dfrac{F(e^{-i\lambda})}{H(e^{-i\lambda})}$, а $f_\varepsilon(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}$.

Так как корень многочлена $H(x)$ по модулю больше единицы, то $\Phi(\lambda)$ является частотной характеристикой асимптотически устойчивой АРСС-модели

$$\xi_n - 0{,}4\,\xi_{n-1} = \varepsilon_n + 0{,}7\,\varepsilon_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.4.14}$$

Уравнение (2.4.14) — искомый формирующий фильтр для СП $\{\xi_n\}$, где $\{\varepsilon_n\}$ — гауссовский стационарный белый шум с дисперсией $D_\varepsilon = 1$. ■

Уравнение (2.4.14) позволяет провести компьютерное моделирование последовательности $\{\xi_n\}$, имеющей спектральную плотность требуемого вида.

Рассмотренный алгоритм можно использовать для приближенного моделирования СП, спектральная плотность которой не является дробно-рациональной. Для этого обычно предварительно аппроксимируют заданную спектральную плотность подходящей дробно-рациональной плотностью (для этого можно применить, например, метод наименьших квадратов), после чего строят соответствующий формирующий фильтр в виде АРСС-модели.

2.4.3. Многомерные разностные линейные стохастические уравнения

Пусть $\{\xi_n\}$ — многомерная СП, т. е. $\xi_n \in \mathbb{R}^p$ при каждом $n \geq 0$, а $\{\varepsilon_n\}$ — ***многомерный дискретный белый шум***. Последнее означает, что $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность независимых СВ $\varepsilon_n \in \mathbb{R}^q$. Будем далее считать, что $\mathbf{M}\{\varepsilon_n\} = m_\varepsilon(n)$, $\mathbf{cov}\{\varepsilon_n, \varepsilon_n\} = \mathbf{M}\{(\varepsilon_n - m_\varepsilon(n))(\varepsilon_n - m_\varepsilon(n))^*\} = D_\varepsilon(n)$. Матричная функция $D_\varepsilon(n)$ называется ***дисперсионной*** функцией (при $q = 1$ $D_\varepsilon(n)$ — дисперсия СП $\{\varepsilon_n\}$). По-прежнему q-мерный белый шум $\{\varepsilon_n\}$ будем называть ***стационарным***, если $m_\varepsilon(n) \equiv m_\varepsilon$, $D_\varepsilon(n) \equiv D_\varepsilon$. Если же $m_\varepsilon = 0$ и $D_\varepsilon = I$, то $\{\varepsilon_n\}$ — ***стандартный*** q-мерный белый шум.

Определение 2.4.5. *Случайная последовательность $\{\xi_n,\, n \geq 0\}$ удовлетворяет* ***многомерному линейному разностному стохастическому уравнению*** *с начальным условием η, если*

$$\begin{cases} \xi_n = A_n \xi_{n-1} + B_n \varepsilon_n, & n \geq 1, \\ \xi_0 = \eta, \end{cases} \tag{2.4.15}$$

где $\eta \in \mathbb{R}^p$ — случайный вектор начальных условий, не зависящий от $\{\varepsilon_n\}$, $A_n \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $B_n \in \mathbb{R}^{p\times q}$ — известные неслучайные матрицы.

Определение 2.4.6. *Уравнение (2.4.15) называется* ***стационарным асимптотически устойчивым***, *если $A_n = A$, $B_n = B$ при всех $n \geq 1$, матрица A такова, что все корни алгебраического уравнения (относительно $x \in \mathbb{R}^1$)*

$$\det[A - xI] = 0 \tag{2.4.16}$$

по модулю меньше единицы, а $\{\varepsilon_n\}$ — стационарный дискретный белый шум.

Рекуррентные соотношения (2.4.15) позволяют провести моделирование СП $\{\xi_n\}$, а также вычислить моментные характеристики $m_\xi(n) = \mathbf{M}\{\xi_n\}$ и $D_\xi(n) = \mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_n\}$ при заданных характеристиках $\{\varepsilon_n\}$ и начального условия η.

Пример 2.4.8. Доказать, что если СП $\{\xi_n\}$ удовлетворяет уравнению

(2.4.15), то $m_\xi(n)$ и $D_\xi(n)$ удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$\begin{cases} m_\xi(n) = A_n m_\xi(n-1) + B_n m_\varepsilon(n), & n \geq 1, \\ m_\xi(0) = m_\eta, \end{cases} \tag{2.4.17}$$

$$\begin{cases} D_\xi(n) = A_n D_\xi(n-1) A_n^* + B_n D_\varepsilon(n) B_n^*, & n \geq 1, \\ D_\xi(0) = R_\eta, \end{cases} \tag{2.4.18}$$

где $m_\eta = \mathbf{M}\{\eta\}$, $R_\eta = \mathbf{cov}\{\eta, \eta\}$.

Решение. Применим к обеим частям уравнения (2.4.15) оператор математического ожидания:

$$m_\xi(n) = \mathbf{M}\{\xi_n\} = \mathbf{M}\{A_n\xi_{n-1} + B_n\varepsilon_n\} = A_n\mathbf{M}\{\xi_{n-1}\} + B_n\mathbf{M}\{\varepsilon_n\} =$$
$$= A_n m_\xi(n-1) + B_n m_\varepsilon(n).$$

Аналогично, $m_\xi(0) = \mathbf{M}\{\xi_0\} = \mathbf{M}\{\eta\} = m_\eta$. Итак, мы показали справедливость (2.4.17).

Заметим, что $D_\xi(0) = \mathbf{cov}\{\xi_0, \xi_0\} = R_\eta$. Пусть теперь $n \geq 1$, тогда

$$D_\xi(n) = \mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_n\} = \mathbf{cov}\{A_n\xi_{n-1} + B_n\varepsilon_n, A_n\xi_{n-1} + B_n\varepsilon_n\} =$$
$$= A_n\,\mathbf{cov}\{\xi_{n-1}, \xi_{n-1}\}\,A_n^* + A_n\,\mathbf{cov}\{\xi_{n-1}, \varepsilon_n\}\,B_n^* + B_n\,\mathbf{cov}\{\varepsilon_n, \xi_{n-1}\}\,A_n^* +$$
$$+ B_n\,\mathbf{cov}\{\varepsilon_n, \varepsilon_n\}\,B_n^* = A_n D_\xi(n-1) A_n^* + B_n D_\varepsilon(n) B_n^*,$$

где учтено, что при всяком $n \geq 1$ случайные векторы ε_n и ξ_{n-1} независимы в силу того, что ξ_{n-1} линейно выражается через $\{\eta, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$, которые не зависят от ε_n по условию. Последнее означает, что $\mathbf{cov}\{\xi_{n-1}, \varepsilon_n\} = 0$. Полученные соотношения для $D_\xi(0)$ и $D_\xi(n)$, $n \geq 1$ совпадают с (2.4.18). ■

Уравнения (2.4.17), (2.4.18), позволяющие вычислить моментные характеристики первого и второго порядков СП $\{\xi_n\}$, называются ***уравнениями метода моментов***.

Рассмотрим поведение $m_\xi(n)$ и $D_\xi(n)$ при $n \to \infty$ в случае, когда система (2.4.15) является стационарной асимптотически устойчивой. Можно доказать, что существуют постоянные вектор m_ξ и матрица D_ξ такие, что $m_\xi(n) \to m_\xi$ и $D_\xi(n) \to D_\xi$ при $n \to \infty$, причем пределы m_ξ и D_ξ не зависят от m_η и R_η.

Пример 2.4.9. Найти уравнения для предельных значений m_ξ и D_ξ.

Решение. Если (2.4.15) стационарна и асимптотически устойчива, то соответствующие уравнения метода моментов имеют вид

$$\begin{cases} m_\xi(n) &= Am_\xi(n-1) + Bm_\varepsilon, \\ D_\xi(n) &= AD_\xi(n-1)A^* + BD_\varepsilon B^*. \end{cases} \tag{2.4.19}$$

Очевидно, что если $m_\xi(n) \to m_\xi$ и $D_\xi(n) \to D_\xi$ при $n \to \infty$, то, переходя к пределу в уравнениях (2.4.19), получаем

$$\begin{cases} m_\xi &= Am_\xi + Bm_\varepsilon, \\ D_\xi &= AD_\xi A^* + BD_\varepsilon B^*. \end{cases} \tag{2.4.20}$$

Уравнения (2.4.20) являются линейными алгебраическими уравнениями, определяющими искомые величины m_ξ и D_ξ. Можно показать, что в силу устойчивости матрицы A (см. определение 2.4.6) система (2.4.20) имеет единственное решение. Например, $m_\xi = (I-A)^{-1}Bm_\varepsilon$, причем матрица $(I-A)$ обратима в силу того, что все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы. ■

Оказывается, что рассмотренная выше АРСС-модель (2.4.4) является частным случаем векторной стационарной модели (2.4.15). Действительно, пусть АРСС-последовательность $\{\xi_n\}$ определена уравнением

$$\xi_n + b_1\xi_{n-1} + \ldots + b_p\xi_{n-p} = a_0\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \ldots + a_q\varepsilon_{n-q}, \tag{2.4.21}$$

где $b_p \neq 0$, $q = p-1$, а $p \geq 1$ — порядок авторегрессионной части модели (2.4.21). Тогда $\xi_n = \xi_1(n)$, где $\xi_1(n)$ — первая компонента p-мерной случайной последовательности $\xi(n) = \{\xi_1(n), \ldots, \xi_p(n)\}^*$, удовлетворяющей векторному разностному стохастическому уравнению

$$\xi(n) = A\xi(n-1) + B\varepsilon_n, \tag{2.4.22}$$

$$\text{где} \quad A = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & \ldots & -b_{p-1} & -b_p \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_0 \\ d_q \\ d_{q-1} \\ \vdots \\ d_1 \end{bmatrix}, \tag{2.4.23}$$

а параметры $\{d_k,\ k = 1, \ldots, q\}$ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$d_q = \widetilde{a}_q, \quad d_k = \widetilde{a}_k - \sum_{i=k}^{q-1} \widetilde{b}_{i+1} d_{k+q-i}, \quad k = q-1, \ldots, 1, \tag{2.4.24}$$

где обозначено: $\widetilde{a}_k = -a_k/b_p$, $\widetilde{b}_i = b_i/b_p$, $k = 1, \ldots, q$; $i = 2, \ldots, p$.

Можно также показать, что если АРСС-модель (2.4.21) является асимптотически устойчивой, то соответствующее векторное уравнение (2.4.22) также является асимптотически устойчивым в смысле определения 2.4.6.

Заметим, что уравнение (2.4.22) является уравнением авторегрессии первого порядка для p-мерной СП $\{\xi(n)\}$. Таким образом, приведенные соотношения фактически показывают, что скалярная АРСС-модель p-го порядка эквивалентна p-мерной АР-модели первого порядка. Последнее означает, что для исследования АРСС-последовательности наряду со спектральными методами можно использовать методы, предназначенные для работы с векторными стохастическими линейными разностными уравнениями (например, рассмотренный выше метод моментов).

Пример 2.4.10. Вычислить математическое ожидание и дисперсию АР-последовательности второго порядка вида

$$\xi_n - \gamma\xi_{n-1} + \gamma^2\xi_{n-2} = \varepsilon_n, \tag{2.4.25}$$

если $\mathbf{M}\{\varepsilon_n\} = m_\varepsilon$ и $\mathbf{D}\{\varepsilon_n\} = D_\varepsilon$, а параметр $0 \le \gamma < 1$.

Решение. Приведем (2.4.25) к виду (2.4.22) и применим метод моментов. Из (2.4.25) следует, что $b_1 = -\gamma$, $b_2 = \gamma^2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Тогда из (2.4.23) и (2.4.24) получаем

$$\begin{cases} \xi_1(n) &= \gamma\xi_1(n-1) - \gamma^2\xi_2(n-1) + \varepsilon_n, \\ \xi_2(n) &= \xi_1(n-1), \end{cases} \tag{2.4.26}$$

поэтому $A = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Проверим условие асимптотической устойчивости для модели (2.4.26). Из (2.4.26) следует, что $\det[A - xI] = x^2 - \gamma x + \gamma^2 = 0$. Корни этого уравнения $x_{1,2} = \dfrac{\gamma}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, поэтому $|x_1| = |x_2| = \gamma < 1$ по условию. Это означает, что $\{\xi(n)\}$ — стационарная СП и существуют m_ξ и D_ξ, удовлетворяющие уравнениям (2.4.20) метода моментов. Для упрощения дальнейших вычислений заметим, что $\xi_2(n) = \xi_1(n-1)$, следовательно, $m_\xi = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}$, а $D_\xi = \begin{bmatrix} d & k \\ k & d \end{bmatrix}$, где $m = \mathbf{M}\{\xi_n\}$, $d = \mathbf{D}\{\xi_n\}$, $k = \mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_{n-1}\}$.

Подставляя указанные m_ξ и D_ξ в систему уравнений (2.4.20), находим

$$\begin{cases} m = \gamma m - \gamma^2 m + m_\varepsilon, \\ d = \gamma^2 d - 2\gamma^3 k + \gamma^4 d + D_\varepsilon, \\ k = \gamma d - \gamma^2 k. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений относительно m, d, k:

$$m = \frac{m_\varepsilon}{1-\gamma+\gamma^2}, \qquad d = D_\varepsilon \frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^6}, \qquad k = D_\varepsilon \frac{\gamma}{1-\gamma^6}.$$

Так как $\xi_n = \xi_1(n)$, то $\mathbf{M}\{\xi_n\} = m$, а $\mathbf{D}\{\xi_n\} = d$. Заметим, что выражение для дисперсии СП $\{\xi_n\}$ совпадает с выражением, полученным ранее с помощью спектрального метода в примере 2.4.6. ■

2.4.4. Фильтр Калмана

В данном разделе мы рассмотрим ***задачу оценивания*** траектории некоторой векторной СП, удовлетворяющей многомерному разностному линейному стохастическому уравнению, по косвенным линейным наблюдениям, искаженным случайными ошибками.

Предварительно рассмотрим постановку задачи оценивания по среднеквадратическому критерию ***(задача с.к.-оценивания)*** для некоторого случайного вектора ξ по наблюдениям, составляющим случайный вектор η (см. также разд. 4.2.6, 4.2.7).

Определение 2.4.7. *Случайный вектор $\widehat{\xi} = \widehat{\varphi}(\eta)$ называется **с.к.-оптимальной оценкой** случайного вектора ξ по наблюдениям η, если*

$$\mathbf{M}\{|\xi - \widehat{\xi}|^2\} \le \mathbf{M}\{|\xi - \widetilde{\xi}|^2\}, \tag{2.4.27}$$

где $\widetilde{\xi} = \widetilde{\varphi}(\eta)$ — произвольное измеримое преобразование вектора наблюдений η (т. е. $\widetilde{\xi}$ — произвольная допустимая оценка для ξ по η).

Структура с.к.-оптимальной оценки в общем случае описывается следующей теоремой (см. также разд. 4.2.5).

Теорема 2.4.2. *Пусть $\mathbf{M}\{|\xi|^2\} < \infty$, тогда с.к.-оптимальная оценка $\widehat{\xi}$ существует и имеет вид*

$$\widehat{\xi} = \widehat{\varphi}(\eta) = \mathbf{M}\{\xi \mid \eta\}, \tag{2.4.28}$$

где $\mathbf{M}\{\xi \mid \eta\}$ — условное математическое ожидание случайного вектора ξ относительно случайного вектора наблюдений η.

Формула (2.4.28) позволяет оценить СВ ξ по η при практически произвольном совместном законе распределения оцениваемого и наблюдаемого случайных векторов. Однако в общем случае найти аналитическую формулу для $\mathbf{M}\{\xi \mid \eta\}$ весьма трудно. Если же ограничиться одним частным, но практически важным случаем, то удается найти простое аналитическое выражение для $\widehat{\xi}$.

Т е о р е м а 2.4.3. *Пусть случайный вектор $\zeta = \{\xi^*, \eta^*\}^*$ является гауссовским, а $R_\eta = \mathbf{cov}\{\eta, \eta\}$ — невырожденная матрица, тогда*

$$\widehat{\xi} = m_\xi + R_{\xi\eta} R_\eta^{-1}(\eta - m_\eta), \tag{2.4.29}$$

где m_ξ и m_η — математические ожидания СВ ξ и η, а $R_{\xi\eta} = \mathbf{cov}\{\xi, \eta\}$ — их взаимная ковариационная матрица. При этом оценка $\widehat{\xi}$ обладает следующими свойствами: $\mathbf{M}\{\xi - \widehat{\xi}\} = 0$ — несмещенность оценки;

$$\widehat{P} = \mathbf{cov}\{\xi - \widehat{\xi}, \xi - \widehat{\xi}\} = R_\xi - R_{\xi\eta} R_\eta^{-1} R_{\xi\eta}^*, \tag{2.4.30}$$

где $\widehat{P}$ — ковариационная матрица ошибки оценки $\widehat{\xi}$, а $R_\xi = \mathbf{cov}\{\xi, \xi\}$.

Критерий качества с.к.-оптимальной оценки $\widehat{\xi}$ имеет вид

$$\mathbf{M}\{|\xi - \widehat{\xi}|^2\} = \mathrm{tr}\left[\widehat{P}\right], \tag{2.4.31}$$

где $\mathrm{tr}[\cdot]$ — след матрицы.

Формула (2.4.29) дает явное выражение для $\mathbf{M}\{\xi \mid \eta\}$ в гауссовском случае, а сама теорема 2.4.3 известна как ***теорема о нормальной корреляции*** (см. разд. 4.2.6).

П р и м е р 2.4.11. Пусть оцениваемый ξ и наблюдаемый η случайные векторы связаны соотношением ***многомерной линейной регрессии***:

$$\eta = A\xi + \varepsilon, \tag{2.4.32}$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(m_\xi; R_\xi)$, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(m_\varepsilon; R_\varepsilon)$, $\mathbf{cov}\{\xi, \varepsilon\} = 0$, A — известная неслучайная матрица. Предположим, что ковариационная матрица R_ε ошибок наблюдений ε — невырожденная. Найти выражение для $\widehat{\xi}$.

Р е ш е н и е. В силу линейности преобразования (2.4.32) η является гауссовским СВ, и, более того, вектор $\zeta = \{\xi^*, \eta^*\}^* = \{\xi^*, \xi^* A^* + \varepsilon^*\}^*$ также гауссовский. Поэтому для вычисления $\widehat{\xi}$ можно использовать утверждение теоремы 2.4.3. Пусть m_ξ и R_ξ известны. Найдем выражение для m_η, R_η и $R_{\xi\eta}$, исходя из модели (2.4.32):

$$m_\eta = \mathbf{M}\{A\xi + \varepsilon\} = Am_\xi + m_\varepsilon,$$

$$R_\eta = \mathbf{cov}\{\eta, \eta\} = \mathbf{cov}\{A\xi + \varepsilon, A\xi + \varepsilon\} = AR_\xi A^* + R_\varepsilon,$$

где учтено, что $\mathbf{cov}\{\xi, \varepsilon\} = 0$. Аналогично получаем

$$R_{\xi\eta} = \mathbf{cov}\{\xi, A\xi + \varepsilon\} = R_\xi A^*.$$

Подставляя найденные выражения в (2.4.29), находим

$$\widehat{\xi} = m_\xi + R_\xi A^* (AR_\xi A^* + R_\varepsilon)^{-1}(\eta - Am_\xi - m_\varepsilon). \tag{2.4.33}$$

Заметим, что обратная матрица в (2.4.33) существует в силу того, что $AR_\xi A^* + R_\varepsilon \geq R_\varepsilon > 0$ по условию. ■

Рассмотренная выше техника оценивания может теперь быть использована для построения ***алгоритма рекуррентной фильтрации Калмана***.

Пусть СП $\{\xi_n\}$ удовлетворяет разностному стохастическому уравнению

$$\xi_n = A_n \xi_{n-1} + B_n \varepsilon_n, \quad n \geq 1, \tag{2.4.34}$$

которое решается с начальным условием

$$\xi_0 = \gamma,$$

где $\gamma \sim \mathcal{N}(m_\gamma; R_\gamma)$, $\{\varepsilon_n\}$ — дискретный векторный гауссовский белый шум, $\mathbf{M}\{\varepsilon_n\} = m_\varepsilon(n)$, $\mathbf{cov}\{\varepsilon_n, \varepsilon_n\} = D_\varepsilon(n)$, $\mathbf{cov}\{\varepsilon_n, \varepsilon_k\} = 0$, если $n \neq k$. Также предполагается, что γ и ε_n независимы. В силу линейности модели (2.4.34) и сделанных предположений СВ ξ_n имеет гауссовское распределение при каждом $n \geq 1$, если $\{A_n, B_n\}$ — последовательности неслучайных матриц.

Предположим, что СВ ξ_n в каждый момент времени $n \geq 1$ доступен косвенным измерениям по схеме

$$\eta_n = C_n \xi_n + v_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.4.35}$$

где η_n — вектор результатов измерений в момент n; C_n — известная неслучайная матрица, а $\{v_n\}$ — гауссовская СП, описывающая ошибки наблюдений. Далее предполагается, что $\{v_n\}$ — векторный дискретный белый шум, $\mathbf{M}\{v_n\} = m_v(n)$, $\mathbf{cov}\{v_n, v_n\} = D_v(n)$, причем матрицы $D_v(n)$ — невырожденные. Будем также считать, что СП $\{v_n\}$ не зависит от $\{\varepsilon_n\}$ и от γ. Уравнения (2.4.34), (2.4.35) описывают динамическую ***модель наблюдений Калмана***.

Обозначим $\eta^n = \{\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*\}^*$ — вектор всех наблюдений до момента n включительно. Рассмотрим задачу построения с.к.-оптимальной оценки $\widehat{\xi}_n$ для СП ξ_n, $n \geq 1$, удовлетворяющей уравнению (2.4.34), по наблюдениям η^n, полученным по схеме (2.4.35).

Т е о р е м а 2.4.4 (Р. Калман). *Пусть выполнены сформулированные выше предположения о модели наблюдений (2.4.34), (2.4.35), тогда с.к.-оптимальная оценка $\widehat{\xi}_n$ для ξ_n по наблюдениям η^n удовлетворяет разностному стохастическому уравнению*

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n &= \overline{\xi}_n + \overline{P}_n C_n^*(C_n \overline{P}_n C_n^* + D_v(n))^{-1}(\eta_n - C_n\overline{\xi}_n - m_v(n)), \quad n \geq 1, \\ \widehat{\xi}_0 &= m_\gamma, \end{cases} \tag{2.4.36}$$

где $\overline{\xi}_n = A_n\widehat{\xi}_{n-1} + B_n m_\varepsilon(n)$, *а* $\overline{P}_n = A_n\widehat{P}_{n-1}A_n^* + B_nD_\varepsilon(n)B_n^*$.

Матрица $\widehat{P}_n$ *является ковариационной матрицей ошибки* $\Delta\widehat{\xi}_n = \xi_n - \widehat{\xi}_n$ *оценки и удовлетворяет разностному матричному уравнению*

$$\begin{cases} \widehat{P}_n &= \overline{P}_n - \overline{P}_n C_n^*(C_n\overline{P}_nC_n^* + D_v(n))^{-1}C_n\overline{P}_n, \quad n \geq 1, \\ \widehat{P}_0 &= R_\gamma. \end{cases} \tag{2.4.37}$$

Рекуррентные уравнения (2.4.36), (2.4.37) известны в литературе по теории стохастических систем как ***дискретный фильтр Калмана***.

Если ввести обозначение $k_n = \overline{P}_nC_n^*(C_n\overline{P}_nC_n^* + D_v(n))^{-1}$, то уравнение фильтра Калмана можно записать в более компактном виде:

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n = \overline{\xi}_n + k_n(\eta_n - C_n\overline{\xi}_n - m_v(n)), & \widehat{\xi}_0 = m_\gamma, \\ \widehat{P}_n = (I - k_nC_n)\overline{P}_n, & \widehat{P}_0 = R_\gamma. \end{cases}$$

Величина k_n называется ***матричным коэффициентом усиления*** фильтра. Заметим, что если наблюдения (2.4.35) отсутствуют, т. е. $C_n = 0$, то $k_n = 0$. В этом случае уравнения фильтра Калмана (2.4.36), (2.4.37) принимают вид

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n = A_n\widehat{\xi}_{n-1} + B_nm_\varepsilon(n), & \widehat{\xi}_0 = m_\gamma, \\ \widehat{P}_n = A_n\widehat{P}_{n-1}A^* + B_nD_\varepsilon(n)B_n^*, & \widehat{P}_0 = R_\gamma. \end{cases}$$

Таким образом, полученные уравнения совпадают с уравнениями метода моментов (2.4.17), (2.4.18), т. е. $\widehat{\xi}_n = \mathbf{M}\{\xi_n\}$, а $\widehat{P}_n = \mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_n\}$. Последнее означает, что с.к.-оптимальной оценкой СП $\{\xi_n\}$ является ее математическое ожидание, если СП $\{\xi_n\}$ недоступна наблюдению (т. е. у нас нет дополнительной измерительной информации).

П р и м е р 2.4.12. Рассматривается скалярная модель наблюдения

$$\begin{cases} \xi_n &= a\xi_{n-1} + \varepsilon_n, \quad \xi_0 = \gamma, \\ \eta_n &= \xi_n + v_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{2.4.38}$$

где $\{\varepsilon_n\}$, $\{v_n\}$ — стационарные и центрированные гауссовские белые шумы. Требуется построить для (2.4.38) фильтр Калмана.

Р е ш е н и е. По условию $m_\varepsilon(n) = m_v(n) = 0$, $D_\varepsilon(n) = r_\varepsilon = \text{const}$, $D_v(n) = r_v = \text{const}$, $A_n = a$, $B_n = C_n = 1$. Поэтому

$$\widehat{\xi}_n = \overline{\xi}_n + k_n(\eta_n - \overline{\xi}_n),$$

где $\overline{\xi}_n = a\widehat{\xi}_{n-1}$, а $k_n = \dfrac{\overline{P}_n}{\overline{P}_n + r_v} = \dfrac{a^2\widehat{P}_{n-1} + r_\varepsilon}{a^2\widehat{P}_{n-1} + r_\varepsilon + r_v}$.

Таким образом, уравнение для оценки $\widehat{\xi}_n$ имеет вид

$$\widehat{\xi}_n = a\widehat{\xi}_{n-1} + k_n(\eta_n - a\widehat{\xi}_{n-1}), \quad \widehat{\xi}_0 = m_\gamma. \tag{2.4.39}$$

Теперь преобразуем (2.4.37) (учитывая скалярность модели):

$$\widehat{P}_n = \overline{P}_n\left(1 - \frac{\overline{P}_n}{\overline{P}_n + r_v}\right) = \frac{\overline{P}_n r_v}{\overline{P}_n + r_v} = k_n r_v. \tag{2.4.40}$$

Видно, что k_n удовлетворяет разностному уравнению

$$k_n = \frac{a^2 k_{n-1} + \rho}{a^2 k_{n-1} + \rho + 1},$$

где $\rho = r_\varepsilon / r_v$, с начальным условием $k_0 = \widehat{P}_0/r_v = R_\gamma/r_v$.

Окончательно уравнения рекуррентной фильтрации принимают вид

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n = a\widehat{\xi}_{n-1} + k_n(\eta_n - a\widehat{\xi}_{n-1}), \quad \widehat{\xi}_0 = m_\gamma, \\ k_n = 1 - (a^2 k_{n-1} + \rho + 1)^{-1}, \quad k_0 = R_\gamma/r_v, \\ \widehat{P}_n = r_v k_n, \end{cases}$$

причем $\widehat{P}_n$ совпадает с дисперсией ошибки оценки $\widehat{\xi}_n$. ■

Алгоритм рекуррентной фильтрации Калмана позволяет решать разнообразные задачи оценивания в случае, когда исходная модель может быть приведена к виду (2.4.34), (2.4.35).

П р и м е р 2.4.13. Модель наблюдений имеет вид

$$\eta_n = C_n\theta + v_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.4.41}$$

где η_n — вектор результатов наблюдения, $\{v_n\}$ — гауссовский векторный белый шум с параметрами $m_v(n)$ и $D_v(n) > 0$, описывающий ошибки наблюдений, θ — гауссовский вектор неизвестных параметров модели, $\{C_n\}$ — последовательность известных неслучайных матриц. Известно, что $\mathbf{M}\{\theta\} = m_\theta$,

$\mathbf{cov}\{\theta,\theta\} = R_\theta$ и θ не зависит от $\{v_n\}$. Построить рекуррентный алгоритм с.к.-оптимального оценивания θ по наблюдениям $\eta^n = \{\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*\}^*$.

Решение. Модель (2.4.41) является частным случаем модели (2.4.34), (2.4.35). Действительно, обозначим $\xi_n = \theta$ при $n = 0, 1, \ldots$, тогда уравнение динамики СП ξ_n имеет вид

$$\xi_n = \xi_{n-1}, \quad n \geq 1 \tag{2.4.42}$$

с начальными условиями $\xi_0 = \theta$, $\mathbf{M}\{\xi_0\} = m_\theta$, $R_{\xi_0} = \mathbf{cov}\{\xi_0, \xi_0\} = R_\theta$. Сравнивая (2.4.42) с (2.4.34), получаем: $A_n = I$, $B_n = 0$. Заменяя в (2.4.41) θ на ξ_n, получаем уравнение наблюдения (2.4.35). Таким образом, (2.4.41) можно представить в виде совокупности уравнений (2.4.42), (2.4.35). Теперь можно воспользоваться теоремой 2.4.4. Из (2.4.36) с учетом $A_n = I$ и $B_n = 0$ находим

$$\overline{\xi}_n = \widehat{\xi}_{n-1}, \quad \overline{P}_n = \widehat{P}_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n &= \widehat{\xi}_{n-1} + \widehat{P}_{n-1} C_n^* (C_n \widehat{P}_{n-1} C_n^* + D_v(n))^{-1} (\eta_n - C_n \widehat{\xi}_{n-1} - m_v(n)), \\ \widehat{P}_n &= \widehat{P}_{n-1} - \widehat{P}_{n-1} C_n^* (C_n \widehat{P}_{n-1} C_n^* + D_v(n))^{-1} C_n \widehat{P}_{n-1}. \end{cases} \tag{2.4.43}$$

Уравнения (2.4.43) решаются с начальными условиями:

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_0 &= m_\theta, \\ \widehat{P}_0 &= R_\theta. \end{cases} \tag{2.4.44}$$

При этом $\widehat{\theta}_n = \widehat{\xi}_n$ — с.к.-оптимальная оценка для θ по η^n, а $\widehat{P}_n$ — ковариационная матрица ее ошибки.

Уравнения (2.4.43), (2.4.44) описывают рекуррентный вариант ***обобщенного метода наименьших квадратов***. ■

Замечание. В примере 2.4.13 мы построили с.к.-оптимальную оценку для θ по наблюдениям η^n, т. е. $\widehat{\theta} = \mathbf{M}\{\theta \mid \eta^n\}$ в предположении гауссовости θ и $\{v_n\}$. Если это предположение не выполнено, то можно показать, что $\widehat{\theta}$ является ***наилучшей линейной оценкой*** для θ по наблюдениям η^n, т. е. $\widehat{\theta}_n$ является наиболее точной среди всех оценок вида $\widetilde{\theta}_n = G\eta^n + g$, где G, g — произвольные неслучайные матричные коэффициенты соответствующих размеров (см. также разд. 4.2.7).

В заключение рассмотрим ситуацию, когда модель наблюдения (2.4.34), (2.4.35) является стационарной, а разностное стохастическое уравнение

(2.4.34) — асимптотически устойчивым. В этом случае все параметры модели (2.4.34), (2.4.35) не зависят от времени n, а матрица A удовлетворяет условию (2.4.16). Будем называть модель (2.4.34), (2.4.35) ***стационарной калмановской моделью наблюдения***.

Теорема 2.4.5. *Для стационарной калмановской модели наблюдения справедливо предельное соотношение:* $\widehat{P}_n \to \widehat{P} \geq 0$ *при любом начальном условии* $\widehat{P}_0 \geq 0$, *причем* $\widehat{P}$ *не зависит от* $\widehat{P}_0$.

Из теоремы 2.4.5 и теоремы Калмана немедленно следует

$$\overline{P}_n = A\widehat{P}_{n-1}A^* + BD_\varepsilon B^* \longrightarrow A\widehat{P}A + BD_\varepsilon B^* = \overline{P},$$

$$k_n = \overline{P}_n C^*(C\overline{P}_n C^* + D_v)^{-1} \longrightarrow \overline{P}C^*(C\overline{P}C^* + D_v)^{-1} = k \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Полученные предельные соотношения могут быть использованы для построения ***стационарных уравнений фильтра Калмана***:

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n &= \overline{\xi}_n + k(\eta_n - C\overline{\xi}_n - m_v), \\ \overline{\xi}_n &= A\widehat{\xi}_{n-1} + Bm_\varepsilon, \quad \widehat{\xi}_0 = m_\gamma, \end{cases} \tag{2.4.45}$$

где $k = \overline{P}C^*(C\overline{P}C^* + D_v)^{-1}$, а матрица $\overline{P}$ определяется из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \overline{P} &= A\widehat{P}A^* + BD_\varepsilon B^*, \\ \widehat{P} &= \overline{P} - \overline{P}C^*(C\overline{P}C^* + D_v)^{-1}C\overline{P}. \end{cases} \tag{2.4.46}$$

Уравнения (2.4.45), (2.4.46) описывают алгоритм фильтрации для достаточно больших n, поэтому можно считать, что процесс $\{\xi_n\}$ является стационарным (т. е. закончился переходной процесс, вызванный наличием начального значения $\xi_0 = \gamma$).

Пример 2.4.14. Построить стационарный вариант фильтра Калмана для модели (2.4.38) в предположении, что $r_\varepsilon = 1 - a^2$, $r_v = 1$.

Решение. Заметим, что если $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность, то $R_\xi = \mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_n\} = r_\varepsilon/(1-a^2) = 1$. Условие асимптотической устойчивости для (2.4.38) означает, что $|a| < 1$. В силу теоремы 2.4.5 уравнение фильтрации (2.4.39) имеет вид

$$\widehat{\xi}_n = a\widehat{\xi}_{n-1} + k(\eta_n - a\widehat{\xi}_{n-1}), \tag{2.4.47}$$

где $k = \lim\limits_{n\to\infty} k_n = \dfrac{a^2\widehat{P} + (1-a^2)}{a^2\widehat{P} + (1-a^2) + 1}$, с учетом того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{P}_{n-1} = \widehat{P}$, $r_\varepsilon = 1 - a^2$, $r_v = 1$.

Из соотношения (2.4.40) находим, что $\widehat{P} = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{P}_n = \lim\limits_{n\to\infty} k_n r_v = k$, поэтому для вычисления $\widehat{P}$ необходимо решить уравнение

$$\widehat{P} = \frac{a^2\widehat{P} + (1-a^2)}{a^2\widehat{P} + (1-a^2) + 1}, \tag{2.4.48}$$

причем нас интересует только неотрицательное решение $\widehat{P} \geq 0$, поскольку $\widehat{P}$ — предельное значение дисперсии ошибки оценки фильтра Калмана.

Уравнение (2.4.48) после замены $\beta = (1-a^2)/a^2$ принимает вид

$$\widehat{P}^2 + 2\beta\widehat{P} - \beta = 0,$$

и имеет единственное неотрицательное решение:

$$\widehat{P} = \sqrt{\beta^2+\beta} - \beta = \frac{\sqrt{1-a^2} - (1-a^2)}{a^2}. \tag{2.4.49}$$

Обозначим через $\sigma_\varepsilon = \sqrt{1-a^2}$ среднее квадратическое отклонение СП $\{\varepsilon_n\}$, тогда из (2.4.49) следует $\widehat{P} = \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon+1}$. В силу (2.4.48) $k = \widehat{P}$, поэтому уравнение фильтрации (2.4.47) принимает окончательный вид

$$\widehat{\xi}_n = a\widehat{\xi}_{n-1} + \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon+1}(\eta_n - a\widehat{\xi}_{n-1}), \qquad \widehat{\xi}_0 = m_\gamma. \tag{2.4.50}$$

Точность оценки $\widehat{\xi}_n$ асимптотически (т. е. при $n\to\infty$) можно характеризовать величиной $\widehat{P}$, так как $\mathbf{M}\{(\xi_n - \widehat{\xi}_n)^2\} \to \widehat{P} = \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon+1}$ при $n\to\infty$.

Заметим, что дисперсия ошибок наблюдений в рассмотренном примере $r_v = 1$, а дисперсия ошибок оценивания $\widehat{P} \leq 1/2$. Действительно, из условия $|a| < 1$ следует $\sigma_\varepsilon \leq 1$, что означает $\widehat{P} = \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon+1} \leq 1/2$. Таким образом, процедура фильтрации позволяет существенно повысить точность оценивания СП $\{\xi_n\}$ по сравнению с измерениями. Отметим также, что если величина $|a|$ близка к 1 (т. е. сечения СП $\{\xi_n\}$ сильно коррелированы), то $\widehat{P}$ может быть существенно меньше 1/2. Например, если $a = 0{,}9$, то $\widehat{P} \approx 0{,}304$, если же $a = 0{,}99$, то $\widehat{P} \approx 0{,}124$. ■

2.4.5. Задачи для самостоятельного решения

1. СП $\xi = \{\xi_n\}$ удовлетворяет уравнению авторегрессии

$$\xi_n - 0{,}8\,\xi_{n-1} = \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — стационарный гауссовский белый шум с параметрами $m_\varepsilon = 0{,}2$ и $D_\varepsilon = 0{,}36$. Вычислить $\mathbf{P}\{0 \leq \xi_n \leq 2\}$.

Ответ: $\mathbf{P}\{0 \le \xi_n \le 2\} \approx 0{,}683$.

2. Спектральная плотность СП $\xi = \{\xi_n\}$ имеет вид

$$f_\xi(\lambda) = 1{,}25 + \cos\lambda.$$

Найти разностное стохастическое уравнение, которому удовлетворяет ξ.

Указание: факторизовать спектральную плотность (см. пример 2.4.7).

Ответ: $\xi_n = \varepsilon_n + 0{,}5\,\varepsilon_{n-1}$, где $\{\varepsilon_n\}$ — белый шум с дисперсией $D_\varepsilon = 2\pi$.

3. АР-последовательность $\xi = \{\xi_n\}$ удовлетворяет уравнению

$$\xi_n + 0{,}7\,\xi_{n-1} + 0{,}5\,\xi_{n-2} - 0{,}3\,\xi_{n-3} = \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — белый шум с дисперсией $D_\varepsilon = 1$. Вычислить D_ξ.

Ответ: $D_\xi \approx 3{,}876$.

4. Пусть p-мерная СП $\xi = \{\xi_n\}$ удовлетворяет разностному стохастическому уравнению

$$\xi_n = A_n\xi_{n-1} + B_n\varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{A_n, B_n\}$ — неслучайные матрицы, а $\{\varepsilon_n\}$ — m-мерный дискретный белый шум. Доказать, что ξ — марковская СП.

5. Для условий предыдущей задачи СП ξ имеет начало: $\xi_0 = \eta$. Показать, что ξ — марковская, если η не зависит от $\{\varepsilon_n\}$, $n \ge 1$.

6. Пусть $\{\xi_n\}$ — гауссовская АР-последовательность порядка $p = 2$. Доказать, что ξ_n не обладает марковским свойством.

Указание: показать, что $\mathbf{M}\{\xi_n \mid \xi_{n-1}\} \ne \mathbf{M}\{\xi_n \mid \xi_{n-1}, \xi_{n-2}\}$.

7. Доказать, что для АРСС-последовательности порядка (p, q), где $p \ge 2$, $p > q$ всегда найдется p-мерная марковская СП $\{\eta_n\}$ такая, что ее первая компонента совпадает с ξ_n.

Указание: использовать результат задачи 4.

8. Пусть $\xi = \{\xi_n\}$ — АРСС-последовательность порядка $(1, 1)$:

$$\xi_n - b\,\xi_{n-1} = \varepsilon_n - a\,\varepsilon_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $|b| < 1$, а $\{\varepsilon_n\}$ — центрированный гауссовский белый шум с $D_\varepsilon > 0$. Найти представление для ξ в виде бесконечного скользящего среднего. Пользуясь этим представлением, найти закон распределения ξ_n при каждом $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\xi_n = \varepsilon_n + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\varepsilon_{n-k}$, где $\alpha_k = (b-a)b^{k-1}$, $\xi_n \sim \mathcal{N}(0; D_\xi)$, $D_\xi = D_\varepsilon \dfrac{1 - 2ab + a^2}{1 - b^2}$.

9. Пусть СП $\xi = \{\xi_n\}$ удовлетворяет асимптотически устойчивому уравнению авторегрессии порядка $p \ge 1$:

$$\xi_n + \sum_{k=1}^{p} b_k\xi_{n-k} = \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — стационарный белый шум с параметрами m_ε и D_ε. Доказать, что с.к.-оптимальный прогноз $\overline{\xi}_n$ для ξ_n, $n \geq 1$ по наблюдениям $\xi^0 = \{\xi_0, \xi_{-1}, \ldots\}$ удовлетворяет разностному уравнению

$$\overline{\xi}_n + \sum_{k=1}^{p} b_k \widetilde{\xi}_{n-k} = m_\varepsilon, \quad n \geq 1,$$

где $\widetilde{\xi}_j = \xi_j$, если $j \leq 0$, и $\widetilde{\xi}_j = \overline{\xi}_j$, если $j > 0$.

Указание: вычислить $\mathbf{M}\{\xi_n \mid \xi^0\}$.

10. Показать, что в уравнениях фильтра Калмана вектор $\overline{\xi}_n$ является с.к.-оптимальным прогнозом для ξ_n по наблюдениям η^{n-1}, а $\overline{P}_n$ — ковариационная матрица ошибки этого прогноза.

Указание: воспользоваться теоремой о нормальной корреляции.

11. Пусть случайный скалярный параметр θ измеряется по схеме

$$\eta_n = c\,\theta + v_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\{v_n\}$ — стационарный центрированный белый шум с $D_v > 0$. Доказать, что если $c \neq 0$, то оценка $\widehat{\theta}_n$ параметра θ, полученная с помощью фильтра Калмана (см. пример 2.4.13), с.к.-состоятельна, т. е. $\mathbf{M}\{(\theta - \widehat{\theta}_n)^2\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Указание: доказать, что $\widehat{P}_n \to 0$ при $n \to \infty$ (см. уравнение (2.4.43)).

12. Пусть $\{\xi_n, \eta_n\}$ — частично наблюдаемая гауссовская последовательность, заданная моделью наблюдения Калмана

$$\xi_n = a\,\xi_{n-1} + b\,\varepsilon_n, \qquad \eta_n = A\,\xi_n + B\,v_n,$$

где $\{\varepsilon_n, v_n\}$ — скалярные стандартные гауссовские независимые белые шумы. Показать, что если $b \neq 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, то $\widehat{P}_n \to \widehat{P}$ при $n \to \infty$, причем предельная дисперсия $\widehat{P}$ ошибки фильтрации является положительным корнем уравнения

$$a^2 A^2 \widehat{P}^2 + [b^2 A^2 + (1 - a^2) B^2] \widehat{P} - b^2 B^2 = 0.$$

2.5. Мартингалы с дискретным временем

2.5.1. Основные определения

Будем всюду далее предполагать, что на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан неубывающий ***поток $\boldsymbol{\sigma}$-алгебр*** $\{\mathcal{F}_n\}$, $n \geq 0$, т. е. семейство σ-алгебр такое, что $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}$. Например, если $\{\xi_n\}$, $n \geq 0$ — набор случайных величин, заданных на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, а $\mathcal{F}_n^\xi = \sigma\{\xi_0, \ldots, \xi_n\}$ — σ-алгебра, порожденная конечным набором $\{\xi_k, k = 0, \ldots, n\}$, то $\mathcal{F}_{n-1}^\xi \subseteq \mathcal{F}_n^\xi$ по построению и, следовательно, $\{\mathcal{F}_n^\xi\}$, $n \geq 0$ — поток σ-алгебр.