Подставляя указанные m_ξ и D_ξ в систему уравнений (2.4.20), находим

$$\begin{cases} m = \gamma m - \gamma^2 m + m_\varepsilon, \\ d = \gamma^2 d - 2\gamma^3 k + \gamma^4 d + D_\varepsilon, \\ k = \gamma d - \gamma^2 k. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений относительно m, d, k:

$$m = \frac{m_\varepsilon}{1-\gamma+\gamma^2}, \qquad d = D_\varepsilon \frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^6}, \qquad k = D_\varepsilon \frac{\gamma}{1-\gamma^6}.$$

Так как $\xi_n = \xi_1(n)$, то $\mathbf{M}\{\xi_n\} = m$, а $\mathbf{D}\{\xi_n\} = d$. Заметим, что выражение для дисперсии СП $\{\xi_n\}$ совпадает с выражением, полученным ранее с помощью спектрального метода в примере 2.4.6. ■

2.4.4. Фильтр Калмана

В данном разделе мы рассмотрим ***задачу оценивания*** траектории некоторой векторной СП, удовлетворяющей многомерному разностному линейному стохастическому уравнению, по косвенным линейным наблюдениям, искаженным случайными ошибками.

Предварительно рассмотрим постановку задачи оценивания по среднеквадратическому критерию ***(задача с.к.-оценивания)*** для некоторого случайного вектора ξ по наблюдениям, составляющим случайный вектор η (см. также разд. 4.2.6, 4.2.7).

Определение 2.4.7. *Случайный вектор $\widehat{\xi} = \widehat{\varphi}(\eta)$ называется **с.к.-оптимальной оценкой** случайного вектора ξ по наблюдениям η, если*

$$\mathbf{M}\{|\xi - \widehat{\xi}|^2\} \le \mathbf{M}\{|\xi - \widetilde{\xi}|^2\}, \tag{2.4.27}$$

где $\widetilde{\xi} = \widetilde{\varphi}(\eta)$ — произвольное измеримое преобразование вектора наблюдений η (т. е. $\widetilde{\xi}$ — произвольная допустимая оценка для ξ по η).

Структура с.к.-оптимальной оценки в общем случае описывается следующей теоремой (см. также разд. 4.2.5).

Теорема 2.4.2. *Пусть $\mathbf{M}\{|\xi|^2\} < \infty$, тогда с.к.-оптимальная оценка $\widehat{\xi}$ существует и имеет вид*

$$\widehat{\xi} = \widehat{\varphi}(\eta) = \mathbf{M}\{\xi \mid \eta\}, \tag{2.4.28}$$

где $\mathbf{M}\{\xi \mid \eta\}$ — условное математическое ожидание случайного вектора ξ относительно случайного вектора наблюдений η.

Формула (2.4.28) позволяет оценить СВ ξ по η при практически произвольном совместном законе распределения оцениваемого и наблюдаемого случайных векторов. Однако в общем случае найти аналитическую формулу для $\mathbf{M}\{\xi \mid \eta\}$ весьма трудно. Если же ограничиться одним частным, но практически важным случаем, то удается найти простое аналитическое выражение для $\widehat{\xi}$.

Теорема 2.4.3. *Пусть случайный вектор* $\zeta = \{\xi^*, \eta^*\}^*$ *является гауссовским, а* $R_\eta = \mathbf{cov}\{\eta, \eta\}$ *— невырожденная матрица, тогда*

$$\widehat{\xi} = m_\xi + R_{\xi\eta} R_\eta^{-1} (\eta - m_\eta), \tag{2.4.29}$$

где m_ξ *и* m_η *— математические ожидания СВ* ξ *и* η, *а* $R_{\xi\eta} = \mathbf{cov}\{\xi, \eta\}$ *— их взаимная ковариационная матрица. При этом оценка* $\widehat{\xi}$ *обладает следующими свойствами:* $\mathbf{M}\{\xi - \widehat{\xi}\} = 0$ *— несмещенность оценки;*

$$\widehat{P} = \mathbf{cov}\{\xi - \widehat{\xi}, \xi - \widehat{\xi}\} = R_\xi - R_{\xi\eta} R_\eta^{-1} R_{\xi\eta}^*, \tag{2.4.30}$$

где $\widehat{P}$ *— ковариационная матрица ошибки оценки* $\widehat{\xi}$, *а* $R_\xi = \mathbf{cov}\{\xi, \xi\}$.

Критерий качества с.к.-оптимальной оценки $\widehat{\xi}$ *имеет вид*

$$\mathbf{M}\{|\xi - \widehat{\xi}|^2\} = \mathrm{tr}\left[\widehat{P}\right], \tag{2.4.31}$$

где $\mathrm{tr}[\cdot]$ *— след матрицы.*

Формула (2.4.29) дает явное выражение для $\mathbf{M}\{\xi \mid \eta\}$ в гауссовском случае, а сама теорема 2.4.3 известна как ***теорема о нормальной корреляции*** (см. разд. 4.2.6).

Пример 2.4.11. Пусть оцениваемый ξ и наблюдаемый η случайные векторы связаны соотношением ***многомерной линейной регрессии***:

$$\eta = A\xi + \varepsilon, \tag{2.4.32}$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(m_\xi; R_\xi)$, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(m_\varepsilon; R_\varepsilon)$, $\mathbf{cov}\{\xi, \varepsilon\} = 0$, A — известная неслучайная матрица. Предположим, что ковариационная матрица R_ε ошибок наблюдений ε — невырожденная. Найти выражение для $\widehat{\xi}$.

Решение. В силу линейности преобразования (2.4.32) η является гауссовским СВ, и, более того, вектор $\zeta = \{\xi^*, \eta^*\}^* = \{\xi^*, \xi^* A^* + \varepsilon^*\}^*$ также гауссовский. Поэтому для вычисления $\widehat{\xi}$ можно использовать утверждение теоремы 2.4.3. Пусть m_ξ и R_ξ известны. Найдем выражение для m_η, R_η и $R_{\xi\eta}$, исходя из модели (2.4.32):

$$m_\eta = \mathbf{M}\{A\xi + \varepsilon\} = Am_\xi + m_\varepsilon,$$

$$R_\eta = \mathbf{cov}\{\eta, \eta\} = \mathbf{cov}\{A\xi + \varepsilon, A\xi + \varepsilon\} = AR_\xi A^* + R_\varepsilon,$$

где учтено, что $\mathbf{cov}\{\xi, \varepsilon\} = 0$. Аналогично получаем

$$R_{\xi\eta} = \mathbf{cov}\{\xi, A\xi + \varepsilon\} = R_\xi A^*.$$

Подставляя найденные выражения в (2.4.29), находим

$$\widehat{\xi} = m_\xi + R_\xi A^*(AR_\xi A^* + R_\varepsilon)^{-1}(\eta - Am_\xi - m_\varepsilon). \tag{2.4.33}$$

Заметим, что обратная матрица в (2.4.33) существует в силу того, что $AR_\xi A^* + R_\varepsilon \geq R_\varepsilon > 0$ по условию. ■

Рассмотренная выше техника оценивания может теперь быть использована для построения ***алгоритма рекуррентной фильтрации Калмана***.

Пусть СП $\{\xi_n\}$ удовлетворяет разностному стохастическому уравнению

$$\xi_n = A_n\xi_{n-1} + B_n\varepsilon_n, \quad n \geq 1, \tag{2.4.34}$$

которое решается с начальным условием

$$\xi_0 = \gamma,$$

где $\gamma \sim \mathcal{N}(m_\gamma; R_\gamma)$, $\{\varepsilon_n\}$ — дискретный векторный гауссовский белый шум, $\mathbf{M}\{\varepsilon_n\} = m_\varepsilon(n)$, $\mathbf{cov}\{\varepsilon_n, \varepsilon_n\} = D_\varepsilon(n)$, $\mathbf{cov}\{\varepsilon_n, \varepsilon_k\} = 0$, если $n \neq k$. Также предполагается, что γ и ε_n независимы. В силу линейности модели (2.4.34) и сделанных предположений СВ ξ_n имеет гауссовское распределение при каждом $n \geq 1$, если $\{A_n, B_n\}$ — последовательности неслучайных матриц.

Предположим, что СВ ξ_n в каждый момент времени $n \geq 1$ доступен косвенным измерениям по схеме

$$\eta_n = C_n\xi_n + v_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.4.35}$$

где η_n — вектор результатов измерений в момент n; C_n — известная неслучайная матрица, а $\{v_n\}$ — гауссовская СП, описывающая ошибки наблюдений. Далее предполагается, что $\{v_n\}$ — векторный дискретный белый шум, $\mathbf{M}\{v_n\} = m_v(n)$, $\mathbf{cov}\{v_n, v_n\} = D_v(n)$, причем матрицы $D_v(n)$ — невырожденные. Будем также считать, что СП $\{v_n\}$ не зависит от $\{\varepsilon_n\}$ и от γ. Уравнения (2.4.34), (2.4.35) описывают динамическую ***модель наблюдений Калмана***.

Обозначим $\eta^n = \{\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*\}^*$ — вектор всех наблюдений до момента n включительно. Рассмотрим задачу построения с.к.-оптимальной оценки $\widehat{\xi}_n$ для СП ξ_n, $n \geq 1$, удовлетворяющей уравнению (2.4.34), по наблюдениям η^n, полученным по схеме (2.4.35).

Теорема 2.4.4 (Р. Калман). *Пусть выполнены сформулированные выше предположения о модели наблюдений* (2.4.34), (2.4.35), *тогда с.к.-оптимальная оценка* $\widehat{\xi}_n$ *для* ξ_n *по наблюдениям* η^n *удовлетворяет разностному стохастическому уравнению*

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n &= \overline{\xi}_n + \overline{P}_n C_n^*(C_n\overline{P}_n C_n^* + D_v(n))^{-1}(\eta_n - C_n\overline{\xi}_n - m_v(n)), \quad n \geq 1, \\ \widehat{\xi}_0 &= m_\gamma, \end{cases} \tag{2.4.36}$$

где $\overline{\xi}_n = A_n\widehat{\xi}_{n-1} + B_n m_\varepsilon(n)$, *а* $\overline{P}_n = A_n\widehat{P}_{n-1}A_n^* + B_n D_\varepsilon(n)B_n^*$.

Матрица $\widehat{P}_n$ *является ковариационной матрицей ошибки* $\Delta\widehat{\xi}_n = \xi_n - \widehat{\xi}_n$ *оценки и удовлетворяет разностному матричному уравнению*

$$\begin{cases} \widehat{P}_n &= \overline{P}_n - \overline{P}_n C_n^*(C_n\overline{P}_n C_n^* + D_v(n))^{-1}C_n\overline{P}_n, \quad n \geq 1, \\ \widehat{P}_0 &= R_\gamma. \end{cases} \tag{2.4.37}$$

Рекуррентные уравнения (2.4.36), (2.4.37) известны в литературе по теории стохастических систем как ***дискретный фильтр Калмана***.

Если ввести обозначение $k_n = \overline{P}_n C_n^*(C_n\overline{P}_n C_n^* + D_v(n))^{-1}$, то уравнение фильтра Калмана можно записать в более компактном виде:

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n = \overline{\xi}_n + k_n(\eta_n - C_n\overline{\xi}_n - m_v(n)), & \widehat{\xi}_0 = m_\gamma, \\ \widehat{P}_n = (I - k_n C_n)\overline{P}_n, & \widehat{P}_0 = R_\gamma. \end{cases}$$

Величина k_n называется ***матричным коэффициентом усиления*** фильтра. Заметим, что если наблюдения (2.4.35) отсутствуют, т. е. $C_n = 0$, то $k_n = 0$. В этом случае уравнения фильтра Калмана (2.4.36), (2.4.37) принимают вид

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n = A_n\widehat{\xi}_{n-1} + B_n m_\varepsilon(n), & \widehat{\xi}_0 = m_\gamma, \\ \widehat{P}_n = A_n\widehat{P}_{n-1}A^* + B_n D_\varepsilon(n)B_n^*, & \widehat{P}_0 = R_\gamma. \end{cases}$$

Таким образом, полученные уравнения совпадают с уравнениями метода моментов (2.4.17), (2.4.18), т. е. $\widehat{\xi}_n = \mathbf{M}\{\xi_n\}$, а $\widehat{P}_n = \mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_n\}$. Последнее означает, что с.к.-оптимальной оценкой СП $\{\xi_n\}$ является ее математическое ожидание, если СП $\{\xi_n\}$ недоступна наблюдению (т. е. у нас нет дополнительной измерительной информации).

Пример 2.4.12. Рассматривается скалярная модель наблюдения

$$\begin{cases} \xi_n &= a\xi_{n-1} + \varepsilon_n, \quad \xi_0 = \gamma, \\ \eta_n &= \xi_n + v_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{2.4.38}$$

где $\{\varepsilon_n\}$, $\{v_n\}$ — стационарные и центрированные гауссовские белые шумы. Требуется построить для (2.4.38) фильтр Калмана.

Решение. По условию $m_\varepsilon(n) = m_v(n) = 0$, $D_\varepsilon(n) = r_\varepsilon = \text{const}$, $D_v(n) = r_v = \text{const}$, $A_n = a$, $B_n = C_n = 1$. Поэтому

$$\widehat{\xi}_n = \overline{\xi}_n + k_n(\eta_n - \overline{\xi}_n),$$

где $\overline{\xi}_n = a\widehat{\xi}_{n-1}$, а $k_n = \dfrac{\overline{P}_n}{\overline{P}_n + r_v} = \dfrac{a^2\widehat{P}_{n-1} + r_\varepsilon}{a^2\widehat{P}_{n-1} + r_\varepsilon + r_v}$.

Таким образом, уравнение для оценки $\widehat{\xi}_n$ имеет вид

$$\widehat{\xi}_n = a\widehat{\xi}_{n-1} + k_n(\eta_n - a\widehat{\xi}_{n-1}), \quad \widehat{\xi}_0 = m_\gamma. \tag{2.4.39}$$

Теперь преобразуем (2.4.37) (учитывая скалярность модели):

$$\widehat{P}_n = \overline{P}_n\left(1 - \frac{\overline{P}_n}{\overline{P}_n + r_v}\right) = \frac{\overline{P}_n r_v}{\overline{P}_n + r_v} = k_n r_v. \tag{2.4.40}$$

Видно, что k_n удовлетворяет разностному уравнению

$$k_n = \frac{a^2 k_{n-1} + \rho}{a^2 k_{n-1} + \rho + 1},$$

где $\rho = r_\varepsilon / r_v$, с начальным условием $k_0 = \widehat{P}_0 / r_v = R_\gamma / r_v$.

Окончательно уравнения рекуррентной фильтрации принимают вид

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n = a\widehat{\xi}_{n-1} + k_n(\eta_n - a\widehat{\xi}_{n-1}), \quad \widehat{\xi}_0 = m_\gamma, \\ k_n = 1 - (a^2 k_{n-1} + \rho + 1)^{-1}, \quad k_0 = R_\gamma / r_v, \\ \widehat{P}_n = r_v k_n, \end{cases}$$

причем $\widehat{P}_n$ совпадает с дисперсией ошибки оценки $\widehat{\xi}_n$. ■

Алгоритм рекуррентной фильтрации Калмана позволяет решать разнообразные задачи оценивания в случае, когда исходная модель может быть приведена к виду (2.4.34), (2.4.35).

Пример 2.4.13. Модель наблюдений имеет вид

$$\eta_n = C_n \theta + v_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.4.41}$$

где η_n — вектор результатов наблюдения, $\{v_n\}$ — гауссовский векторный белый шум с параметрами $m_v(n)$ и $D_v(n) > 0$, описывающий ошибки наблюдений, θ — гауссовский вектор неизвестных параметров модели, $\{C_n\}$ — последовательность известных неслучайных матриц. Известно, что $\mathbf{M}\{\theta\} = m_\theta$,

$\mathbf{cov}\{\theta, \theta\} = R_\theta$ и θ не зависит от $\{v_n\}$. Построить рекуррентный алгоритм с.к.-оптимального оценивания θ по наблюдениям $\eta^n = \{\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*\}^*$.

Решение. Модель (2.4.41) является частным случаем модели (2.4.34), (2.4.35). Действительно, обозначим $\xi_n = \theta$ при $n = 0, 1, \ldots$, тогда уравнение динамики СП ξ_n имеет вид

$$\xi_n = \xi_{n-1}, \quad n \geq 1 \tag{2.4.42}$$

с начальными условиями $\xi_0 = \theta$, $\mathbf{M}\{\xi_0\} = m_\theta$, $R_{\xi_0} = \mathbf{cov}\{\xi_0, \xi_0\} = R_\theta$. Сравнивая (2.4.42) с (2.4.34), получаем: $A_n = I$, $B_n = 0$. Заменяя в (2.4.41) θ на ξ_n, получаем уравнение наблюдения (2.4.35). Таким образом, (2.4.41) можно представить в виде совокупности уравнений (2.4.42), (2.4.35). Теперь можно воспользоваться теоремой 2.4.4. Из (2.4.36) с учетом $A_n = I$ и $B_n = 0$ находим

$$\overline{\xi}_n = \widehat{\xi}_{n-1}, \quad \overline{P}_n = \widehat{P}_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n = \widehat{\xi}_{n-1} + \widehat{P}_{n-1} C_n^* (C_n \widehat{P}_{n-1} C_n^* + D_v(n))^{-1} (\eta_n - C_n \widehat{\xi}_{n-1} - m_v(n)), \\ \widehat{P}_n = \widehat{P}_{n-1} - \widehat{P}_{n-1} C_n^* (C_n \widehat{P}_{n-1} C_n^* + D_v(n))^{-1} C_n \widehat{P}_{n-1}. \end{cases} \tag{2.4.43}$$

Уравнения (2.4.43) решаются с начальными условиями:

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_0 = m_\theta, \\ \widehat{P}_0 = R_\theta. \end{cases} \tag{2.4.44}$$

При этом $\widehat{\theta}_n = \widehat{\xi}_n$ — с.к.-оптимальная оценка для θ по η^n, а $\widehat{P}_n$ — ковариационная матрица ее ошибки.

Уравнения (2.4.43), (2.4.44) описывают рекуррентный вариант ***обобщенного метода наименьших квадратов***. ■

Замечание. В примере 2.4.13 мы построили с.к.-оптимальную оценку для θ по наблюдениям η^n, т. е. $\widehat{\theta} = \mathbf{M}\{\theta \mid \eta^n\}$ в предположении гауссовости θ и $\{v_n\}$. Если это предположение не выполнено, то можно показать, что $\widehat{\theta}$ является ***наилучшей линейной оценкой*** для θ по наблюдениям η^n, т. е. $\widehat{\theta}_n$ является наиболее точной среди всех оценок вида $\widetilde{\theta}_n = G\eta^n + g$, где G, g — произвольные неслучайные матричные коэффициенты соответствующих размеров (см. также разд. 4.2.7).

В заключение рассмотрим ситуацию, когда модель наблюдения (2.4.34), (2.4.35) является стационарной, а разностное стохастическое уравнение

(2.4.34) — асимптотически устойчивым. В этом случае все параметры модели (2.4.34), (2.4.35) не зависят от времени n, а матрица A удовлетворяет условию (2.4.16). Будем называть модель (2.4.34), (2.4.35) ***стационарной калмановской моделью наблюдения***.

Теорема 2.4.5. *Для стационарной калмановской модели наблюдения справедливо предельное соотношение: $\widehat{P}_n \to \widehat{P} \geq 0$ при любом начальном условии $\widehat{P}_0 \geq 0$, причем $\widehat{P}$ не зависит от $\widehat{P}_0$.*

Из теоремы 2.4.5 и теоремы Калмана немедленно следует

$$\overline{P}_n = A\widehat{P}_{n-1}A^* + BD_\varepsilon B^* \longrightarrow A\widehat{P}A + BD_\varepsilon B^* = \overline{P},$$

$$k_n = \overline{P}_n C^*(C\overline{P}_n C^* + D_v)^{-1} \longrightarrow \overline{P}C^*(C\overline{P}C^* + D_v)^{-1} = k \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Полученные предельные соотношения могут быть использованы для построения ***стационарных уравнений фильтра Калмана***:

$$\begin{cases} \widehat{\xi}_n &= \overline{\xi}_n + k(\eta_n - C\overline{\xi}_n - m_v), \\ \overline{\xi}_n &= A\widehat{\xi}_{n-1} + Bm_\varepsilon, \quad \widehat{\xi}_0 = m_\gamma, \end{cases} \tag{2.4.45}$$

где $k = \overline{P}C^*(C\overline{P}C^* + D_v)^{-1}$, а матрица $\overline{P}$ определяется из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \overline{P} &= A\widehat{P}A^* + BD_\varepsilon B^*, \\ \widehat{P} &= \overline{P} - \overline{P}C^*(C\overline{P}C^* + D_v)^{-1}C\overline{P}. \end{cases} \tag{2.4.46}$$

Уравнения (2.4.45), (2.4.46) описывают алгоритм фильтрации для достаточно больших n, поэтому можно считать, что процесс $\{\xi_n\}$ является стационарным (т. е. закончился переходной процесс, вызванный наличием начального значения $\xi_0 = \gamma$).

Пример 2.4.14. Построить стационарный вариант фильтра Калмана для модели (2.4.38) в предположении, что $r_\varepsilon = 1 - a^2$, $r_v = 1$.

Решение. Заметим, что если $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность, то $R_\xi = \mathbf{cov}\{\xi_n, \xi_n\} = r_\varepsilon/(1-a^2) = 1$. Условие асимптотической устойчивости для (2.4.38) означает, что $|a| < 1$. В силу теоремы 2.4.5 уравнение фильтрации (2.4.39) имеет вид

$$\widehat{\xi}_n = a\widehat{\xi}_{n-1} + k(\eta_n - a\widehat{\xi}_{n-1}), \tag{2.4.47}$$

где $k = \lim\limits_{n\to\infty} k_n = \dfrac{a^2\widehat{P} + (1-a^2)}{a^2\widehat{P} + (1-a^2) + 1}$, с учетом того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{P}_{n-1} = \widehat{P}$, $r_\varepsilon = 1 - a^2$, $r_v = 1$.

Из соотношения (2.4.40) находим, что $\widehat{P} = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{P}_n = \lim\limits_{n\to\infty} k_n r_v = k$, поэтому для вычисления $\widehat{P}$ необходимо решить уравнение

$$\widehat{P} = \frac{a^2\widehat{P} + (1-a^2)}{a^2\widehat{P} + (1-a^2) + 1}, \tag{2.4.48}$$

причем нас интересует только неотрицательное решение $\widehat{P} \geq 0$, поскольку $\widehat{P}$ — предельное значение дисперсии ошибки оценки фильтра Калмана.

Уравнение (2.4.48) после замены $\beta = (1-a^2)/a^2$ принимает вид

$$\widehat{P}^2 + 2\beta\widehat{P} - \beta = 0,$$

и имеет единственное неотрицательное решение:

$$\widehat{P} = \sqrt{\beta^2 + \beta} - \beta = \frac{\sqrt{1-a^2} - (1-a^2)}{a^2}. \tag{2.4.49}$$

Обозначим через $\sigma_\varepsilon = \sqrt{1-a^2}$ среднее квадратическое отклонение СП $\{\varepsilon_n\}$, тогда из (2.4.49) следует $\widehat{P} = \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon + 1}$. В силу (2.4.48) $k = \widehat{P}$, поэтому уравнение фильтрации (2.4.47) принимает окончательный вид

$$\widehat{\xi}_n = a\widehat{\xi}_{n-1} + \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon + 1}(\eta_n - a\widehat{\xi}_{n-1}), \qquad \widehat{\xi}_0 = m_\gamma. \tag{2.4.50}$$

Точность оценки $\widehat{\xi}_n$ асимптотически (т. е. при $n \to \infty$) можно характеризовать величиной $\widehat{P}$, так как $\mathbf{M}\{(\xi_n - \widehat{\xi}_n)^2\} \to \widehat{P} = \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon + 1}$ при $n \to \infty$.

Заметим, что дисперсия ошибок наблюдений в рассмотренном примере $r_v = 1$, а дисперсия ошибок оценивания $\widehat{P} \leq 1/2$. Действительно, из условия $|a| < 1$ следует $\sigma_\varepsilon \leq 1$, что означает $\widehat{P} = \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon + 1} \leq 1/2$. Таким образом, процедура фильтрации позволяет существенно повысить точность оценивания СП $\{\xi_n\}$ по сравнению с измерениями. Отметим также, что если величина $|a|$ близка к 1 (т. е. сечения СП $\{\xi_n\}$ сильно коррелированы), то $\widehat{P}$ может быть существенно меньше 1/2. Например, если $a = 0{,}9$, то $\widehat{P} \approx 0{,}304$, если же $a = 0{,}99$, то $\widehat{P} \approx 0{,}124$. ■

2.4.5. Задачи для самостоятельного решения

1. СП $\xi = \{\xi_n\}$ удовлетворяет уравнению авторегрессии

$$\xi_n - 0{,}8\,\xi_{n-1} = \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — стационарный гауссовский белый шум с параметрами $m_\varepsilon = 0{,}2$ и $D_\varepsilon = 0{,}36$. Вычислить $\mathbf{P}\{0 \leq \xi_n \leq 2\}$.

Ответ: $\mathbf{P}\{0 \le \xi_n \le 2\} \approx 0{,}683$.

2. Спектральная плотность СП $\xi = \{\xi_n\}$ имеет вид

$$f_\xi(\lambda) = 1{,}25 + \cos\lambda.$$

Найти разностное стохастическое уравнение, которому удовлетворяет ξ.

Указание: факторизовать спектральную плотность (см. пример 2.4.7).

Ответ: $\xi_n = \varepsilon_n + 0{,}5\,\varepsilon_{n-1}$, где $\{\varepsilon_n\}$ — белый шум с дисперсией $D_\varepsilon = 2\pi$.

3. АР-последовательность $\xi = \{\xi_n\}$ удовлетворяет уравнению

$$\xi_n + 0{,}7\,\xi_{n-1} + 0{,}5\,\xi_{n-2} - 0{,}3\,\xi_{n-3} = \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — белый шум с дисперсией $D_\varepsilon = 1$. Вычислить D_ξ.

Ответ: $D_\xi \approx 3{,}876$.

4. Пусть p-мерная СП $\xi = \{\xi_n\}$ удовлетворяет разностному стохастическому уравнению

$$\xi_n = A_n\xi_{n-1} + B_n\varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{A_n, B_n\}$ — неслучайные матрицы, а $\{\varepsilon_n\}$ — m-мерный дискретный белый шум. Доказать, что ξ — марковская СП.

5. Для условий предыдущей задачи СП ξ имеет начало: $\xi_0 = \eta$. Показать, что ξ — марковская, если η не зависит от $\{\varepsilon_n\}$, $n \ge 1$.

6. Пусть $\{\xi_n\}$ — гауссовская АР-последовательность порядка $p = 2$. Доказать, что ξ_n не обладает марковским свойством.

Указание: показать, что $\mathbf{M}\{\xi_n \mid \xi_{n-1}\} \ne \mathbf{M}\{\xi_n \mid \xi_{n-1}, \xi_{n-2}\}$.

7. Доказать, что для АРСС-последовательности порядка (p, q), где $p \ge 2$, $p > q$ всегда найдется p-мерная марковская СП $\{\eta_n\}$ такая, что ее первая компонента совпадает с ξ_n.

Указание: использовать результат задачи 4.

8. Пусть $\xi = \{\xi_n\}$ — АРСС-последовательность порядка $(1, 1)$:

$$\xi_n - b\,\xi_{n-1} = \varepsilon_n - a\,\varepsilon_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $|b| < 1$, а $\{\varepsilon_n\}$ — центрированный гауссовский белый шум с $D_\varepsilon > 0$. Найти представление для ξ в виде бесконечного скользящего среднего. Пользуясь этим представлением, найти закон распределения ξ_n при каждом $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\xi_n = \varepsilon_n + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\varepsilon_{n-k}$, где $\alpha_k = (b-a)b^{k-1}$, $\xi_n \sim \mathcal{N}(0; D_\xi)$, $D_\xi = D_\varepsilon \dfrac{1 - 2ab + a^2}{1 - b^2}$.

9. Пусть СП $\xi = \{\xi_n\}$ удовлетворяет асимптотически устойчивому уравнению авторегрессии порядка $p \ge 1$:

$$\xi_n + \sum_{k=1}^{p} b_k\xi_{n-k} = \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — стационарный белый шум с параметрами m_ε и D_ε. Доказать, что с.к.-оптимальный прогноз $\overline{\xi}_n$ для ξ_n, $n \geq 1$ по наблюдениям $\xi^0 = \{\xi_0, \xi_{-1}, \ldots\}$ удовлетворяет разностному уравнению

$$\overline{\xi}_n + \sum_{k=1}^{p} b_k \widetilde{\xi}_{n-k} = m_\varepsilon, \quad n \geq 1,$$

где $\widetilde{\xi}_j = \xi_j$, если $j \leq 0$, и $\widetilde{\xi}_j = \overline{\xi}_j$, если $j > 0$.

Указание: вычислить $\mathbf{M}\{\xi_n \mid \xi^0\}$.

10. Показать, что в уравнениях фильтра Калмана вектор $\overline{\xi}_n$ является с.к.-оптимальным прогнозом для ξ_n по наблюдениям η^{n-1}, а $\overline{P}_n$ — ковариационная матрица ошибки этого прогноза.

Указание: воспользоваться теоремой о нормальной корреляции.

11. Пусть случайный скалярный параметр θ измеряется по схеме

$$\eta_n = c\,\theta + v_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\{v_n\}$ — стационарный центрированный белый шум с $D_v > 0$. Доказать, что если $c \neq 0$, то оценка $\widehat{\theta}_n$ параметра θ, полученная с помощью фильтра Калмана (см. пример 2.4.13), с.к.-состоятельна, т. е. $\mathbf{M}\{(\theta - \widehat{\theta}_n)^2\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Указание: доказать, что $\widehat{P}_n \to 0$ при $n \to \infty$ (см. уравнение (2.4.43)).

12. Пусть $\{\xi_n, \eta_n\}$ — частично наблюдаемая гауссовская последовательность, заданная моделью наблюдения Калмана

$$\xi_n = a\,\xi_{n-1} + b\,\varepsilon_n, \qquad \eta_n = A\,\xi_n + B\,v_n,$$

где $\{\varepsilon_n, v_n\}$ — скалярные стандартные гауссовские независимые белые шумы. Показать, что если $b \neq 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, то $\widehat{P}_n \to \widehat{P}$ при $n \to \infty$, причем предельная дисперсия $\widehat{P}$ ошибки фильтрации является положительным корнем уравнения

$$a^2 A^2 \widehat{P}^2 + [b^2 A^2 + (1 - a^2) B^2]\widehat{P} - b^2 B^2 = 0.$$

2.5. Мартингалы с дискретным временем

2.5.1. Основные определения

Будем всюду далее предполагать, что на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан неубывающий ***поток σ-алгебр*** $\{\mathcal{F}_n\}$, $n \geq 0$, т. е. семейство σ-алгебр такое, что $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}$. Например, если $\{\xi_n\}$, $n \geq 0$ — набор случайных величин, заданных на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, а $\mathcal{F}_n^\xi = \sigma\{\xi_0, \ldots, \xi_n\}$ — σ-алгебра, порожденная конечным набором $\{\xi_k, k = 0, \ldots, n\}$, то $\mathcal{F}_{n-1}^\xi \subseteq \mathcal{F}_n^\xi$ по построению и, следовательно, $\{\mathcal{F}_n^\xi\}$, $n \geq 0$ — поток σ-алгебр.