8. Пусть СП, имеющая спектральную функцию $F_\xi(\lambda)$, подвергается линейному стационарному преобразованию с частотной характеристикой $\Phi(\lambda)$. Найти явный вид спектральной функции $F_\eta(\lambda)$.

Ответ: $F_\eta(\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\lambda} |\Phi(\mu)|^2 dF_\xi(\mu)$.

9. СП η получена из стандартного белого шума ε преобразованием вида

$$\eta_n = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n+1}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказать стационарность СП $\{\eta_n\}$ и вычислить ее спектральную плотность.

Указание: воспользоваться теоремой 2.1.4.

Ответ: $f_\eta(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\cos^2\lambda$.

10. Пусть $m_\xi = 3$ и $f_\xi(\lambda) = 5 + 4\cos\lambda$. Найти с.к.-оптимальный прогноз $\widehat{\xi}_n$ по наблюдениям ξ^0 и дисперсию ошибки прогноза Δ_n для всех $n \geq 1$.

Ответ: $\widehat{\xi}_1 = 3 + 0{,}5\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-0{,}5)^k(\xi_{-k} - 3)$, $\Delta_1 = 8\pi$ и $\widehat{\xi}_n = m_\xi = 3$, $\Delta_n = D_\xi = 10\pi$, если $n \geq 2$.

2.3. Цепи Маркова

2.3.1. Вероятностные характеристики цепей Маркова

Цепью Маркова, которая далее для краткости обозначается ЦМ, называется последовательность вещественных случайных величин, обладающая ***марковским свойством***.

Пусть $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_k, \ldots\}$ — некоторое конечное или счетное множество. Рассмотрим последовательность случайных величин ξ_n, $n = 0, 1, \ldots$, которые принимают значения из заданного множества E с вероятностями $\pi_k(n) = \mathbf{P}\{\xi_n = e_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ Таким образом, ξ_n — случайная величина с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний E. Случайная последовательность $\xi = \{\xi_n, n = 0, 1, \ldots\}$ указанного типа называется ***дискретной цепью***.

Определение 2.3.1. *Случайная последовательность ξ называется* ***дискретной цепью Маркова****, если она является дискретной цепью и обладает марковским свойством, т. е. для каждого $n \geq 1$ и любых элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ множества E выполнено*

$$\mathbf{P}\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, \xi_0 = x_0\} = \mathbf{P}\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}\}. \qquad (2.3.1)$$

Замечание. Соотношение (2.3.1) на языке условных вероятностей (см. разд. 4.2.5) означает, что

$$\mathbf{P}\{\xi_n = x_n \mid \mathcal{F}^{n-1}\} = \mathbf{P}\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1}\},$$

где $\mathcal{F}^{n-1}$ — σ-алгебра, порожденная случайным вектором $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}^*$.

Из определения (2.3.1) следует, что дискретная цепь Маркова является частным случаем марковского процесса, общее определение которого было дано в разд. 1.2.4.

Множество E обычно называют ***множеством (пространством) состояний*** ЦМ. Если в момент $n \geq 0$ произошло событие $\{\xi_n = e_k\}$, то говорят, что ЦМ находится в состоянии e_k. Если же известно, что для $n \geq 1$ выполнено $\xi_{n-1} = e_k$ и $\xi_n = e_j$, то говорят, что цепь на n-м шаге перешла из состояния e_k в состояние e_j. Если E имеет конечное число состояний, то соответствующая ЦМ называется ***конечной***.

Определение 2.3.2. *Число $p_{k,j}(n) = \mathbf{P}\{\xi_n = e_j \mid \xi_{n-1} = e_k\}$, $e_k, e_j \in E$ называется* ***вероятностью перехода*** *из состояния e_k в состояние e_j* ***за один шаг*** *в момент $n \geq 1$.*

Определение 2.3.3. *Матрица $P(n)$, элементами которой являются вероятности перехода $p_{k,j}(n)$, называется* ***переходной матрицей*** *ЦМ ξ (за один шаг в момент $n \geq 1$).*

Определение 2.3.4. *Вероятность $\pi_k(n) = \mathbf{P}\{\xi_n = e_k\}$, $e_k \in E$ называется* ***вероятностью состояния*** *e_k в момент времени $n \geq 0$. Вектор $\pi(n) = \{\pi_0(n), \pi_1(n), \ldots\}^*$ называется* ***распределением вероятностей состояний*** *ЦМ ξ в момент $n \geq 0$.*

Очевидно, что $\pi(n)$ удовлетворяет при каждом $n < \infty$ ***условию нормировки***: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \pi_k(n) = 1$. Компоненты вектора $\pi(n)$ показывают, какие из возможных состояний ЦМ в момент времени n являются наиболее вероятными, а какие — нет. Таким образом, знание последовательности $\{\pi(n)\}$ позволяет составить представление о поведении ЦМ во времени.

Пример 2.3.1. Доказать, что при каждом $n \geq 1$ выполнено рекуррентное соотношение

$$\pi(n) = P^*(n)\pi(n-1). \tag{2.3.2}$$

Решение. Сформируем систему гипотез $H_k = \{\xi_{n-1} = e_k\}$. Очевидно, H_k, H_j несовместны при $k \neq j$, причем $H_0 + H_1 + \ldots = \Omega$. По определению

$\mathbf{P}\{H_k\} = \mathbf{P}\{\xi_{n-1} = e_k\} = \pi_k(n-1)$, $k = 0, 1, \ldots$. Пусть $A_m = \{\xi_n = e_m\}$, тогда $\mathbf{P}\{A_m\} = \pi_m(n)$ и $\mathbf{P}\{A_m \mid H_k\} = \mathbf{P}\{\xi = e_m \mid \xi_{n-1} = e_k\} = p_{k,m}(n)$. Для вычисления $\mathbf{P}\{A_m\}$ применим формулу полной вероятности (см. разд. 4.2.1):

$$\mathbf{P}\{A_m\} = \pi_m(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{H_k\}\mathbf{P}\{A_m \mid H_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(n-1)p_{k,m}(n). \quad (2.3.3)$$

Формула (2.3.3), представленная в матричном виде, совпадает с (2.3.2). ■

Формула (2.3.2) задает рекуррентный алгоритм вычисления вероятностей состояний $\pi(n)$, $n \geq 1$. Очевидно, что для вычисления $\pi(n)$ необходимо задать начальное распределение вероятностей $\pi(0)$ и все переходные матрицы $\{P(k),\, k = 1, \ldots, n\}$.

Определение 2.3.5. *Цепь Маркова называется* ***однородной****, если для всех $n \geq 1$ выполнено $P(n) = P$, т. е. переходная матрица $P(n)$ не зависит от времени.*

Пример 2.3.2. Показать, что для однородной ЦМ распределение $\pi(n)$, $n \geq 1$ полностью определяется переходной матрицей P и начальным распределением вероятностей состояний $\pi(0)$.

Решение. Пусть $n \geq 1$ и задано распределение вероятностей $\pi(0)$. Тогда из (2.3.2) следует, что $\pi(1) = P^*\pi(0)$. Далее, $\pi(2) = P^*\pi(1) = P^*(P^*\pi(0)) = (P^*)^2\pi(0)$. Продолжая этот процесс, получаем окончательно

$$\pi(n) = (P^*)^n\pi(0) \quad \forall n \geq 1. \quad (2.3.4)$$

Более того, если обозначить через

$$p_{k,j}^{(m)}(n) = \mathbf{P}\{\xi_{n+m} = e_j \mid \xi_n = e_k\} \quad (2.3.5)$$

вероятность перехода из e_k в e_j за $m \geq 1$ шагов, то из (2.3.4) следует, что для однородной ЦМ матрица $P^{(m)}(n) = \{p_{k,j}^{(m)}(n)\}$ имеет вид $P^{(m)}(n) = P^m$, поэтому

$$\pi(n+m) = (P^*)^m\pi(n). \quad (2.3.6)$$

Таким образом, пара $(P, \pi(0))$ полностью описывает вероятностную структуру однородной ЦМ. ■

Для описания однородной ЦМ удобно использовать ее графическое представление в виде размеченного ***стохастического графа***, вершинами которого являются состояния $\{e_k\}$, стрелками указаны возможные переходы, а рядом с каждой стрелкой указана вероятность соответствующего перехода за один шаг.

П р и м е р 2.3.3. ЦМ задана стохастическим графом (рис. 2.1).

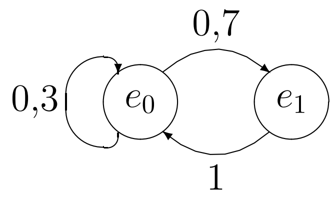

Рис. 2.1

Найти вероятности состояний на третьем шаге при условии, что в начальный момент ЦМ находилась в состоянии e_1.

Р е ш е н и е. Составим матрицу P переходных вероятностей: $p_{00} = 0{,}3$; $p_{01} = 0{,}7$; $p_{10} = 1$; $p_{11} = 0$ (переход $e_1 \to e_1$ запрещен по условию). Таким образом, матрица P^* имеет элементы $q_{00} = 0{,}3$; $q_{01} = 1$; $q_{10} = 0{,}7$; $q_{11} = 0$, а $\pi(0) = \{0;\, 1\}^*$ — начальное распределение вероятностей состояний. Используя (2.3.2), получаем: $\pi(1) = P^*\pi(0) = \{1;\, 0\}^*$, $\pi(2) = P^*\pi(1) = \{0{,}3;\, 0{,}7\}^*$, $\pi(3) = P^*\pi(2) = \{0{,}79;\, 0{,}21\}^*$. Очевидно, что тот же результат будет получен по формуле $\pi(3) = (P^*)^3\pi(0)$. ■

Элементы $\{p_{ij}\}$ матрицы перехода P удовлетворяют следующим двум условиям:

1) $p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 0, 1, \ldots;$

2) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1 \quad \forall i = 0, 1, \ldots$

Матрицы, удовлетворяющие свойствам 1, 2, называются ***стохастическими***.

Условие 2 означает, что на каждом шаге ЦМ обязательно либо переходит в какое-то новое состояние из числа допустимых, либо остается в прежнем состоянии. Практические ситуации, адекватно описываемые цепями Маркова, встречаются весьма часто, так как марковское свойство фактически означает следующее: ***если некоторый процесс обладает марковским свойством, то его “будущее” при фиксированном “настоящем” не зависит от “прошлого”*** (альтернативная формулировка марковского свойства). Следующий пример поясняет смысл этих терминов и самого марковского свойства.

П р и м е р 2.3.4. Доказать, что альтернативная формулировка марковского свойства следует из (2.3.1).

Р е ш е н и е. Из (2.3.1) $\forall k \geq 0$ и $\forall x_{k+1} \in E$

$$\mathbf{P}\{\xi_{k+1} = x_{k+1} \mid \xi_k, \ldots, \xi_0\} = \mathbf{P}\{\xi_{k+1} = x_{k+1} \mid \xi_k\}. \tag{2.3.7}$$

Нетрудно проверить, что для произвольных событий A, B и C выполнено соотношение $\mathbf{P}\{AB \mid C\} = \mathbf{P}\{A \mid BC\}\,\mathbf{P}\{B \mid C\}$. Используя это соотношение необходимое число раз для $n \geq k+1$, получаем с учетом (2.3.7)

$$\mathbf{P}\{\xi_n = x_n, \ldots, \xi_{k+1} = x_{k+1} \mid \xi_k, \ldots, \xi_0\} = \\ = \mathbf{P}\{\xi_n = x_n, \ldots, \xi_{k+1} = x_{k+1} \mid \xi_k\} \tag{2.3.8}$$

для произвольных $x_{k+1}, \ldots, x_n \in E$. Обозначим $\text{Н} = \{\xi_k = x_k\}$ — “настоящее” рассматриваемой ЦМ, $\text{Б} = \{\xi_n = x_n, \ldots, \xi_{k+1} = x_{k+1}\}$ — “будущее” и, соответственно, $\text{П} = \{\xi_{k-1} = x_{k-1}, \ldots, \xi_0 = x_0\}$ — “прошлое”, где $\{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$ — некоторые значения из E, которые ЦМ принимала до текущего момента времени k. Тогда соотношение (2.3.8) означает, что $\mathbf{P}\{\text{Б} \mid \text{НП}\} = \mathbf{P}\{\text{Б} \mid \text{Н}\}$. Отсюда

$$\mathbf{P}\{\text{БП} \mid \text{Н}\} = \mathbf{P}\{\text{Б} \mid \text{НП}\}\,\mathbf{P}\{\text{П} \mid \text{Н}\} = \mathbf{P}\{\text{Б} \mid \text{Н}\}\,\mathbf{P}\{\text{П} \mid \text{Н}\},$$

т. е. события Б и П, рассматриваемые при условии выполнения события Н, независимы. ■

Доказанное утверждение обобщает формулу (1.2.7).

Рассмотрим теперь классический пример цепи Маркова, связанный с игрой двух лиц.

П р и м е р 2.3.5. Пусть целые числа $m > 0$, $M > 0$ — начальные капиталы соответственно первого и второго игроков. Проводятся последовательно игры, в результате каждой из которых с вероятностью p капитал первого игрока увеличивается на 1 и с вероятностью $q = 1 - p$ уменьшается на 1. Результаты любой игры не зависят от результатов любых других игр. Пусть ξ_n — капитал первого игрока после n игр. Предполагается, что в случае $\xi_n = 0$ или $\xi_n = L = m + M$ игра прекращается (ситуация разорения одного из игроков). Показать, что $\{\xi_n\}$ — ЦМ, найти переходную матрицу P и построить стохастический граф цепи.

Р е ш е н и е. По определению $\{\xi_n\}$ — дискретная цепь со множеством возможных состояний $E = \{0, 1, \ldots, L\}$. Пусть $x_0 = m, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — реализовавшиеся значения ξ_k при $k \leq n-1$, т. е. $\xi_k = x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Будем считать, что $x_k \neq 0$ или L. Тогда $\xi_n = \xi_{n-1} + v_n$, где v_n — результат n-й игры, причем $\mathbf{P}\{v_n = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{v_n = -1\} = q$, и v_n не зависит от $\{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\}$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\xi_n = x_{n-1} + 1 \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, \xi_0 = m\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_n = x_{n-1} + 1 \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}\} = p.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}\{\xi_n = x_{n-1} - 1 \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, \xi_0 = m\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_n = x_{n-1} - 1 \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}\} = q.$$

Наконец, $\mathbf{P}\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, \xi_0 = m\} = 0$, если $x_n \neq x_{n-1} \pm 1$. Таким образом, $\{\xi_n\}$ обладает марковским свойством и является однородной ЦМ в силу предположения $p = \mathrm{const}$.

Переходная матрица $P = \{p_{ij}\}$, $i, j = 0, \ldots, L$ имеет элементы $p_{ii} = 0$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$, $p_{i,i\pm l} = 0$, если $l \geq 2$ для $i = 1, 2, \ldots, L-1$. Наконец, $p_{00} = p_{LL} = 1$ по условию задачи. Стохастический граф построенной ЦМ имеет следующий вид (рис. 2.2):

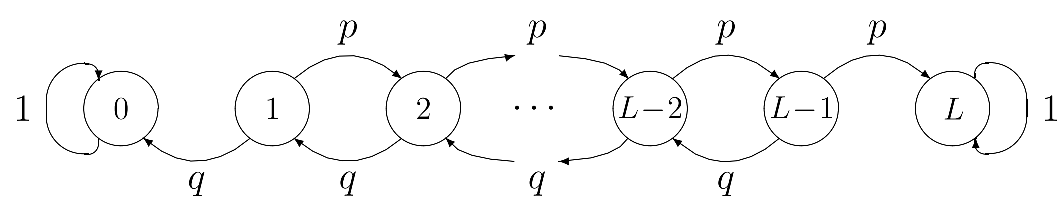

Рис. 2.2

Полученная модель игры двух лиц известна в теории марковских случайных процессов как случайное блуждание частицы по целым точкам отрезка с двумя поглощающими барьерами. ■

Рассмотренная в примере 2.3.5 модель приводит к ЦМ с конечным множеством состояний E. Если же второй игрок бесконечно богат (т. е. $M = \infty$), то $E = \{0, 1, \ldots\}$, $\{\xi_n\}$ — однородная ЦМ со счетным множеством состояний, а соответствующая математическая модель — блуждание по целым точкам оси с одним (левым) поглощающим барьером.

2.3.2. Эргодические цепи Маркова

В данном разделе будут рассматриваться только ***однородные*** цепи Маркова с конечным или счетным числом состояний. Для таких цепей при определенных условиях выполняется следующее свойство: $\pi(n) \to \pi^0$ при $n \to \infty$, причем предельные вероятности $\pi^0_k > 0$ и не зависит от начального распределения $\pi(0)$, а определяются лишь переходной матрицей P. В этом случае вектор π^0 называется стационарным распределением ЦМ, а сама ЦМ — эргодической. Свойство эргодичности означает, что вероятности состояний $\pi(n)$ по мере увеличения n практически перестают изменяться, а система, описываемая соответствующей цепью, переходит в ***стационарный режим*** функционирования.

Для выяснения условий эргодичности однородной ЦМ необходимо ввести ***классификацию ее возможных состояний.***

Пусть $p^{(n)}_{k,j} = \mathbf{P}\{\xi_n = e_j \mid \xi_0 = e_k\}$ — вероятность перехода за n шагов из состояния e_k в состояние e_j, а

$$f_j(n) = \mathbf{P}\{\xi_n = e_j, \xi_{n-1} \neq e_j, \ldots, \xi_1 \neq e_j \mid \xi_0 = e_j\}$$

обозначает вероятность первого возвращения за n шагов в состояние e_j.

1. *Состояние $e_k \in E$ называется **несущественным**, если найдется $e_j \in E$ такое, что $p^{(m)}_{k,j} > 0$ для некоторого $m \geq 1$, но $p^{(n)}_{j,k} = 0$ для всех $n \geq 1$. В противном случае состояние e_k называется **существенным**.*

2. *Состояния $e_k, e_j \in E$ называются **сообщающимися**, если найдутся $m, n \geq 1$ такие, что $p^{(m)}_{k,j} > 0$ и $p^{(n)}_{j,k} > 0$.*

3. *Состояние $e_j \in E$ называется **возвратным**, если $F_j = 1$, и **невозвратным**, если $F_j < 1$, где $F_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)$.*

4. *Состояние $e_k \in E$ называется **нулевым**, если $p^{(n)}_{k,k} \to 0$ при $n \to \infty$.*

5. *Пусть d_j — наибольший общий делитель чисел $\{n \geq 1 : f_j(n) > 0\}$. Состояние e_j называется **периодическим с периодом** d_j, если $d_j > 1$. В противном случае состояние — **апериодическое**.*

Заметим, что возвращение в периодическое состояние с положительной вероятностью возможно только за число шагов, кратное $d_j > 1$, причем d_j — наибольшее целое число, обладающее указанным свойством.

Пример 2.3.6. Пусть ξ_n — координата частицы, блуждающей по целым точкам на вещественной оси одним из следующих двух способов: находясь в произвольной допустимой точке на оси, частица

а) с вероятностью p сдвигается на 1 вправо, а с вероятностью q остается на месте;

б) с вероятностью p сдвигается на 1 вправо и с вероятностью q — на 1 влево,

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ и $\xi_0 = 0$.

Провести классификацию состояний ЦМ $\{\xi_n\}$.

Решение. а). Здесь $E = \{0, 1, \ldots\}$, причем для любого $j \geq 0$ выполнено $f_j(1) = q < 1$ и $f_j(n) = 0$ при $n \geq 2$. Отсюда $F_j = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j(n) = q < 1$, поэтому все состояния — невозвратные. Так как $p^{(n)}_{j+1,j} = 0$ для $n \geq 1$, $j \in E$, то все состояния — несущественные. Очевидно, $p^{(n)}_{j,j} = q^n$ — вероятность n раз подряд остаться на месте, поэтому $p^{(n)}_{j,j} \to 0$, $n \to \infty$ и, следовательно, все состояния — нулевые. Заметим, что $p^{(1)}_{j,j} = q > 0$, $p^{(2)}_{j,j} = q^2 > 0$, поэтому $d_j = 1$ и все состояния — апериодические. Наконец, $p^{(n)}_{j,k} = 0$ при любых $j > k$ и $n \geq 1$, поэтому никакие два состояния цепи не являются сообщающимися.

б). Для рассмотрения второго случая воспользуемся следующим утверждением: *состояние e_j является возвратным тогда и только тогда, когда $P_j = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p^{(n)}_{j,j} = \infty$, причем для невозвратного состояния $F_j = \dfrac{P_j}{1 + P_j}$.*

Каждое состояние e_j является периодическим с периодом 2, так как возвращение в состояние e_j возможно лишь за четное число шагов. Очевидно также, что все состояния существенны и сообщаются. Однако все состояния являются нулевыми. Действительно, для любого $e_j \in E$ имеем по формуле Бернулли: $p^{(2m)}_{j,j} = C^m_{2m}(pq)^m = \dfrac{(2m)!}{(m!)^2}(pq)^m$, $p^{(2m+1)}_{j,j} = 0$. Используя формулу Стирлинга $m! \sim m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}$, получаем: $p^{(2m)}_{j,j} \sim \dfrac{(4pq)^m}{\sqrt{\pi m}} \to 0$ при $m \to \infty$, т. е. все состояния цепи — нулевые. Кроме того, если $p = q = 1/2$, то $P_j = \sum\limits_{m=1}^{\infty} p^{(2m)}_{j,j} = \infty$, т. е. все состояния — возвратные. Если же $p \neq q$, то $P_j < \infty$, т. е. все состояния — невозвратные. ■

Замечание. Из результата примера 2.3.6 также получаем, что любое невозвратное состояние $e_j \in E$ является нулевым, так как из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{j,j}^{(n)}$ следует, что $p_{j,j}^{(n)} \to 0$, $n \to \infty$.

Определение 2.3.6. *ЦМ называется* ***неразложимой****, если все ее состояния — существенные и сообщающиеся. В противном случае ЦМ называется разложимой.*

Определение 2.3.7. *Неразложимая ЦМ называется* ***апериодической****, если все ее состояния — апериодические.*

Замечание. Для неразложимой ЦМ справедливо “свойство солидарности”:

а) если хотя бы одно состояние возвратно, то и все другие возвратны;

б) если хотя бы одно состояние нулевое, то и все нулевые;

в) если хотя бы одно состояние имеет период $d > 1$, то и все остальные периодичны с периодом d.

Таким образом, неразложимая ЦМ будет апериодической, если хотя бы одно из ее состояний — апериодическое.

Пример 2.3.7. Исследовать цепи Маркова, описанные в примерах 2.3.3, 2.3.5 и 2.3.6 на разложимость и периодичность.

Решение. 1. ЦМ, рассмотренная в примере 2.3.3, является неразложимой и апериодической конечной цепью Маркова, так как все ее состояния — существенные, сообщающиеся и апериодические.

2. ЦМ из примера 2.3.5, описывающая игру двух лиц, разложима. Действительно, состояния $e_0 = 0$ и $e_L = L$ являются существенными, а состояния e_k, $k = 1, \dots, L-1$ — несущественными. При этом состояния $e_0 = 0$ и $e_L = L$ не сообщаются, так как $p_{0,L}^{(n)} = 0$, $p_{L,0}^{(n)} = 0$, $n \geq 1$. Все состояния данной цепи можно разбить, таким образом, на непересекающиеся классы $E_0, E_1, E_2 : E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, где $E_0 = \{e_1, \dots, e_{L-1}\}$ — класс несущественных состояний, $E_1 = \{e_0\}$, $E_2 = \{e_L\}$ — классы существенных состояний, причем E_1 и E_2 не сообщаются. Все состояния из E_0 — периодические с периодом 2, а состояния из E_1 и E_2 — апериодические.

3. ЦМ из примера 2.3.6 в случае “а” разложима, так как ни одно из ее состояний не является существенным. В случае “б”, наоборот, все состояния существенные и сообщающиеся, поэтому ЦМ является неразложимой и имеет счетное число состояний. Однако она периодическая с периодом $d = 2$. ■

Теорема 2.3.1. *Пусть однородная ЦМ имеет переходную матрицу* $P = \{p_{i,j}\}$ *и обладает следующими свойствами:*

1) *цепь неразложима и апериодична;*

2) *найдется состояние* $e_k \in E$ *такое, что* ***время возвращения*** *в него, т. е. дискретная случайная величина* τ_k *с распределением*

$$\mathbf{P}\{\tau_k = n\} = f_k(n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

имеет ***конечное математическое ожидание***

$$\mu_k = \mathbf{M}\{\tau_k\} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_k(n) < \infty.$$

Выполнение условий 1, 2 *необходимо и достаточно для того, чтобы для любых* $i, j = 0, 1, \ldots$ *существовали не зависящие от* i *пределы:*

$$p_{i,j}^{(n)} \to p_j > 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{2.3.9}$$

Числа $\{p_j\}$ *являются единственным решением системы уравнений*

$$p_j = \sum_{k=0}^{\infty} p_{k,j} p_k, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{2.3.10}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1. \tag{2.3.11}$$

Определение 2.3.8. *Цепь Маркова, удовлетворяющая приведенным выше условиям* (2.3.9)–(2.3.11), *называется* ***эргодической***, *а распределение вероятностей* $p = \{p_0, p_1, \ldots\}^*$ — ***стационарным распределением*** *ЦМ.*

Для ЦМ с конечным множеством состояний E наиболее сложно проверяемое условие 2 теоремы 2.3.1 становится излишним. Действительно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3.2. *Для того чтобы конечная ЦМ была эргодической, необходимо и достаточно, чтобы она была неразложимой и апериодической.*

2.3.3. Предельные распределения вероятностей состояний

В данном разделе мы рассмотрим вопрос, связанный с существованием предельных вероятностей состояний ЦМ $\pi^0 : \pi(n) \to \pi^0$, $n \to \infty$ при неограниченном увеличении числа шагов n. Для эргодической ЦМ этот вопрос уже фактически решен, о чем свидетельствует следующий пример.

П р и м е р 2.3.8. Доказать, что для эргодической ЦМ предельное распределение $\pi^0 = \{\pi_0, \pi_1, \ldots\}^*$ существует и единственно, является стационарным и удовлетворяет системе уравнений

$$\pi^0 = P^* \pi^0, \tag{2.3.12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1. \tag{2.3.13}$$

Р е ш е н и е. Пусть $\pi_k(n) = \mathbf{P}\{\xi_n = e_k\}$ при условии, что задано начальное распределение $\pi(0)$, тогда $\pi_k(n) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_{i,k}^{(n)} \pi_i(0)$. Так как ЦМ — эргодическая, то при каждом $k \geq 0$ выполнено $p_{i,k}^{(n)} \to p_k > 0$ при $n \to \infty$, причем p_k не зависит от $\pi(0)$. Следовательно, при $n \to \infty$

$$\pi_k(n) \to \sum_{i=0}^{\infty} p_k \pi_i(0) = p_k \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(0) = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Таким образом, $\pi_k(n) \to \pi_k = p_k$, поэтому все свойства предельного распределения $\pi^0 = \{\pi_k,\ k = 0, 1, \ldots\}$ совпадают со свойствами стационарного распределения $\{p_k,\ k = 0, 1, \ldots\}$. Теперь, заменяя в (2.3.10), (2.3.11) p_k на π_k и переписывая (2.3.10) в матричной форме, получаем (2.3.12), (2.3.13). Распределение π^0 единственно в силу единственности решения системы (2.3.12), (2.3.13) и стационарно, так как π^0 не зависит от $\pi(0)$. ■

Рассмотрим конкретный пример вычисления стационарных вероятностей состояний эргодической ЦМ.

П р и м е р 2.3.9. Найти π^0 для ЦМ из примера 2.3.3.

Р е ш е н и е. Выше (см. пример 2.3.7) показано, что ЦМ из примера 2.3.3 является неразложимой и апериодической. Кроме того, она имеет конечное число состояний, поэтому ее эргодичность следует из теоремы 2.3.2. Используя (2.3.12), (2.3.13) и выражение для P^*, находим

$$\begin{cases} 0{,}3\,\pi_0 + \pi_1 &= \pi_0, \\ 0{,}7\,\pi_0 &= \pi_1, \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1. \end{cases}$$

Заметим, что в данном случае система уравнений $\pi^0 = P^* \pi^0$ дает нам лишь одно уравнение ($I - P^*$ — вырожденная матрица, поскольку матрица

P — стохастическая). Единственное решение для π^0 дает система уравнений, включающая условие нормировки:

$$\begin{cases} 0,7\pi_0 - \pi_1 = 0, \\ \pi_0 + \pi_1 = 1. \end{cases}$$

Отсюда $\pi_0 = 10/17$, $\pi_1 = 7/17$. ■

Заметим, что практическое нахождение π^0 из (2.3.12), (2.3.13) возможно в общем случае лишь для конечных цепей Маркова.

Соответствующий ***алгоритм вычисления*** π^0 имеет следующий вид:

1) составить систему уравнений $\pi^0 = P^*\pi^0$;

2) заменить в полученной системе одно из уравнений на условие нормировки (2.3.13), при этом полученная система уравнений будет иметь вид $G\pi^0 = g$, где $g \neq 0$, а матрица G — невырожденная;

3) решить систему $G\pi^0 = g$ и определить π^0.

Найденное π^0 будет удовлетворять одновременно системе уравнений (2.3.12) и условию нормировки (2.3.13). Заметим также, что π^0 не будет зависеть от того, какое именно из уравнений системы (2.3.12) было нами заменено на условие (2.3.13).

Для цепей Маркова ***с конечным множеством состояний*** понятие неразложимости может быть обобщено: конечная ЦМ называется ***неразложимой***, если $E = E_0 \cup E_1$, где E_0 —класс несущественных состояний, а E_1 — ***единственный*** класс существенных сообщающихся состояний.

В этом случае справедливы следующие утверждения:

1) если класс состояний E_1 — апериодический, то существует единственный вектор предельных вероятностей $\pi^0 = \{\pi_k\}$ с неотрицательными компонентами, удовлетворяющий (2.3.12), (2.3.13);

2) $\pi_k = 0$, если $e_k \in E_0$, и $\pi_j > 0$, если $e_j \in E_1$.

Пример 2.3.10. Цепь Маркова задана стохастическим графом (рис. 2.3).

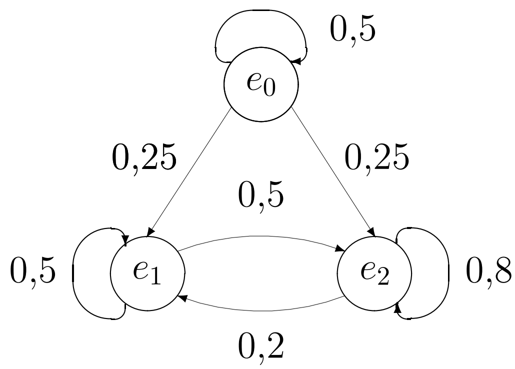

Рис. 2.3

Найти стационарное распределение вероятностей состояний.

Решение. Очевидно, e_0 — несущественное состояние, а $\{e_1, e_2\}$ образуют класс существенных апериодических сообщающихся состояний. Поэтому стационарное распределение $\pi^0 = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2\}^*$ существует, причем $\pi_0 = 0$. Вероятности π_1 и π_2 определяются из системы уравнений $\pi^0 = P^*\pi^0$ и условия $\pi_1 + \pi_2 = 1$ (см. приведенный выше алгоритм):

$$\begin{cases} 0{,}5\,\pi_1 + 0{,}2\,\pi_2 = \pi_1, \\ \pi_1 + \pi_2 = 1, \end{cases}$$

откуда $\pi_1 = 2/7$, $\pi_2 = 5/7$. Итак, $\pi(n) \to \pi^0 = \{0;\ 2/7;\ 5/7\}^*$ при $n \to \infty$ для любого начального распределения вероятностей состояний $\pi(0)$. ■

Если ЦМ имеет ***счетное*** множество состояний, то может возникнуть ситуация, когда предельные вероятности $\{\pi_k\}$ существуют, не зависят от начального распределения $\pi(0)$, но, тем не менее, не дают стационарного распределения вероятностей, так как для них ***не выполнено*** условие нормировки $\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_k + \ldots = 1$. В этом случае будем называть π^0 вектором ***финальных вероятностей*** состояний ЦМ.

Пример 2.3.11. Найти финальные вероятности состояний ЦМ, описывающей блуждание частицы по целым точкам прямой (см. пример 2.3.6).

Решение. В примере 2.3.6 было показано, что все состояния ЦМ — нулевые. Следовательно, $p_{i,j}^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$ для любых $i, j \geq 0$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} p_{0,j}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_j(n) = \pi_j = 0$, $j = 0, 1, \ldots$ Таким образом, π^0 — нулевой вектор и $\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_k + \ldots = 0$. Следовательно, π^0 не является стационарным распределением вероятностей состояний ЦМ. Очевидно, отсутствие стационарного распределения вызвано нарушением условия 2 теоремы 2.3.1, так как в данном случае $\mu_j = \infty$ для любого $e_j \in E$. ■

Если условие 1 теоремы 2.3.1 не выполнено, то финальные вероятности состояний либо вообще не существуют, либо зависят от начального распределения вероятностей состояний.

П р и м е р 2.3.12. Конечная ЦМ задана стохастическим графом (рис. 2.4).

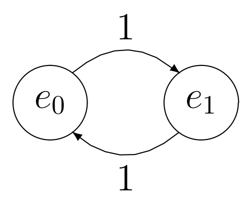

Рис. 2.4

Показать, что при любом $\pi(0) \neq \{1/2, 1/2\}^*$ финальные вероятности не существуют.

Р е ш е н и е. ЦМ имеет переходную матрицу P с элементами $p_{00} = p_{11} = 0$, $p_{01} = p_{10} = 1$, поэтому эволюция вектора $\pi(n) = \{\pi_0(n), \pi_1(n)\}^*$ описывается соотношениями (2.3.2):

$$\begin{cases} \pi_0(n) = \pi_1(n-1), & n = 1, 2, \ldots, \\ \pi_1(n) = \pi_0(n-1). \end{cases}$$

Пусть $\pi(0) = \{p, q\}^*$, тогда при $p \neq q$ имеем $\pi_0(n) = p$, если $n = 2k$ и $\pi_0(n) = q$, если $n = 2k+1$, $k = 0, 1, \ldots$ Очевидно, в этом случае последовательность $\{\pi_0(n)\}$ предела не имеет. Аналогично, нет предела и у последовательности $\{\pi_1(n)\}$. Если же $p = q = 1/2$, то существует вектор финальных вероятностей $\pi^0 = \{1/2, 1/2\}^*$, так как в этом случае $\pi_0(n) = \pi_1(n) = 1/2$ для всякого $n \geq 0$. Полученный результат объясняется тем, что рассмотренная цепь Маркова является неразложимой, но периодической с периодом $d = 2$, и, следовательно, условие 1 теоремы 2.3.1 не выполнено. ■

Рассмотрим теперь поведение вероятностей состояний разложимых ЦМ. Очевидно, что стационарных распределений здесь не будет, однако финальные вероятности при определенных условиях будут существовать.

П р и м е р 2.3.13. ЦМ, описывающая случайное блуждание частицы по целым неотрицательным точкам прямой $E = \{0, 1, \ldots\}$ с поглощающим состоянием $e_0 = 0$, задана стохастическим графом (рис. 2.5),

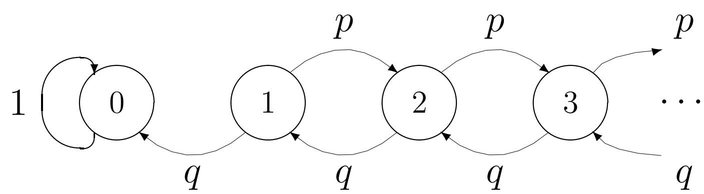

Рис. 2.5

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Известно, что в начальный момент времени частица находилась в состоянии $e_m = m \geq 0$. Найти финальные вероятности состояний ЦМ.

Решение. Очевидно, что $E = E_0 \cup E_1$, где $E_0 = \{e_0\}$ — класс существенных состояний, а $E_1 = \{e_1, e_2, \ldots\}$ — класс несущественных состояний. Поэтому цепь разложима и условие 1 теоремы 2.3.1 нарушено. Следовательно, данная ЦМ не имеет стационарного распределения. Из определения цепи ясно, что $p^{(n)}_{0,0} = 1$ и $p^{(n)}_{m,j} \to 0$, $n \to \infty$ при любых $m \geq 0$, $j \geq 1$. Таким образом, при любом $j \geq 1$ имеем $\pi_j = 0$. Обозначим через P_m вероятность того, что частица, выходящая из состояния $e_m = m$, рано или поздно попадет в состояние $e_0 = 0$. В силу того, что состояние e_0 — поглощающее, $p^{(n)}_{m,0} \to \pi_0 = P_m$, $n \to \infty$, т. е. P_m — искомая финальная вероятность состояния e_0. При каждом $m \geq 1$ справедливо

$$P_m = pP_{m+1} + qP_{m-1}, \tag{2.3.14}$$

что следует из марковского свойства цепи и формулы полной вероятности. Кроме того, $P_0 = 1$ по условию. Обозначим $\alpha = q/p$, тогда общее решение уравнения (2.3.14) имеет вид $P_m = a + b\,\alpha^m$, а условие $P_0 = 1$ означает, что $a + b = 1$.

Пусть $q > p$, т. е. $\alpha > 1$. Тогда $b = 0$ в силу ограничения $P_m \leq 1$. Но тогда $a = 1$, т. е. $P_m = 1$. Пусть теперь $q < p$, т. е. $\alpha < 1$. Для вычисления P_m введем в произвольной точке $N > m$ второй поглощающий барьер и обозначим $P_m(N)$ вероятность того, что блуждающая точка достигнет состояния e_0 раньше, чем состояния e_N. В следующем примере будет показано, что $\lim\limits_{N\to\infty} P_m(N) = \alpha^m$. Докажем, что этот предел равен P_m. Действительно, пусть A — событие, состоящее в том, что найдется N такое, что частица достигнет e_0, выходя из e_m, раньше, чем e_N. Тогда $P_m = \mathbf{P}\{A\}$. Если

$A_N = \{$частица достигнет e_0 раньше, чем $e_N\}$, то $A = \bigcup\limits_{N=m+1}^{\infty} A_N$, $A_N \subseteq A_{N+1}$.

Очевидно, что $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup\limits_{N=m+1}^{\infty} A_N\right\} = \lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{P}\{A_N\} = \lim\limits_{N\to\infty} P_m(N) = \alpha^m$, т. е. $P_m = \mathbf{P}\{A\} = \alpha^m$.

Наконец, если $p = q$, то оба решения совпадают, т. е. $P_m = 1$. Итак, окончательно для финальной вероятности π_0 имеем: $\pi_0 = 1$, если $p \le q$ и $\pi_0 = (q/p)^m$, если $p > q$. Заметим, что при условии $p \le q$ рассмотренная модель имеет предельное распределение вероятностей состояний $\pi^0 = \{1, 0, 0, \ldots\}$. Если же $p > q$, то набор финальных вероятностей $\pi^0 = \{\alpha^m, 0, 0, \ldots\}$ не является распределением вероятностей, так как условие нормировки не выполнено. ■

В заключение вычислим финальные вероятности состояний в цепи Маркова, описывающей игру двух лиц, которая рассмотрена в примере 2.3.5.

Пример 2.3.14. Найти финальные вероятности в игре двух лиц и, в частности, вероятность P_m разорения первого игрока, если начальные капиталы игроков конечны и равны m и M, а вероятности успеха в каждой игре равны p и $q = 1 - p$ для первого и второго игроков соответственно.

Решение. В примере 2.3.5 показано, что математической моделью рассматриваемой игры является дискретная конечная ЦМ с множеством состояний $E = \{0, 1, \ldots, L\}$, где $L = m + M$. Состояния $\{e_1, \ldots, e_{L-1}\}$ — несущественные, поэтому их финальные вероятности $\pi_k = 0$. Пусть $\pi_0 = P_m$ — финальная вероятность состояния e_0, тогда (в силу конечности ЦМ) $\pi_L = 1 - P_m$. Найдем P_m из соотношения (2.3.14)

$$P_m = pP_{m+1} + qP_{m-1}, \qquad 1 \le m \le L - 1 \tag{2.3.15}$$

с учетом краевых условий $P_0 = 1$, $P_L = 0$, которые следуют из условия окончания игры (разорение одного из игроков). Из общего соотношения (2.3.15) для $\alpha = q/p$ имеем

$$\begin{cases} P_2 - P_1 = \alpha(P_1 - P_0), \\ P_3 - P_2 = \alpha^2(P_1 - P_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m - P_{m-1} = \alpha^{m-1}(P_1 - P_0). \end{cases}$$

Складывая полученные выражения и учитывая, что $P_0 = 1$, находим $P_m = 1 + (P_1 - 1)S_m$, где $S_m = (1 - \alpha^m)/(1 - \alpha)$ при $\alpha \ne 1$ и $S_m = m$ при $\alpha = 1$.

Значение P_1 определяем из второго краевого условия $P_L = 0$: $P_1 = 1 - 1/S_L$. Подставляя найденное P_1 в выражение для P_m, окончательно получаем с учетом $L = m + M$:

$$\begin{cases} P_m = (\alpha^m - \alpha^{m+M})/(1 - \alpha^{m+M}) & \text{при} \quad \alpha \neq 1 \quad (p \neq q), \\ P_m = M/(m + M) & \text{при} \quad \alpha = 1 \quad (p = q = 1/2). \end{cases} \tag{2.3.16}$$

Из (2.3.16) следует, что при $\alpha < 1$, т. е. при $p > q$ выполнено соотношение $\lim\limits_{M\to\infty} P_m = \alpha^m$. Последний результат был использован в примере 2.3.13 для $N = m + M$, $P_m = P_m(N)$.

Заметим, что условие $M \to \infty$ фактически означает, что второй игрок располагает неограниченным исходным капиталом. В этом случае при $p \leq q$ имеем $P_m \to 1$ при $M \to \infty$, что означает неизбежное разорение первого игрока даже в безобидной игре (т. е. при $p = q = 1/2$). Если же $p > q$, то $P_m \to \alpha^m < 1$. Поэтому с вероятностью $Q_m = 1 - \alpha^m > 0$ первый игрок может добиться неограниченного увеличения своего исходного капитала. ■

2.3.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Дискретная цепь с множеством состояний $E = \{0, 1, \ldots\}$ определена соотношением: $\xi_{n+1} = \xi_n + v_n$, $n \geq 0$ с начальным условием $\xi_0 = 0$, где $\{v_n\}$ — последовательность независимых случайных величин с распределением Бернулли. Доказать, что $\{\xi_n\}$ обладает марковским свойством, найти ее переходную матрицу и провести классификацию состояний.

Указание: см. пример 2.3.6.

2. Пусть случайные величины $\{v_0, v_1, \ldots\}$ независимы в совокупности и каждая принимает значения $+1$ и -1 с вероятностями $1/2$. Рассмотрим две последовательности: $\xi_n = (v_n + v_{n+1})/2$ и $\eta_n = v_n v_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$ Какая из этих последовательностей является цепью Маркова?

Ответ: вторая.

3. Через фиксированные промежутки времени проводится контроль технического состояния прибора, который может находиться в одном из трех состояний: e_0 — работает, e_1 — не работает и ожидает ремонта, e_2 — ремонтируется. Пусть ξ_n — номер состояния прибора при n-й проверке. Предполагается, что $\{\xi_n\}$ является однородной ЦМ с переходной матрицей

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & p_{02} \\ 0{,}3 & p_{11} & 0{,}6 \\ p_{20} & 0{,}01 & 0{,}29 \end{bmatrix}.$$

Найти неизвестные элементы матрицы P и вычислить $\pi(2)$ при условии, что в начальный момент времени прибор исправен.

Ответ: $p_{02} = 0{,}1$; $p_{11} = 0{,}1$; $p_{20} = 0{,}7$; $\pi(2) = \{0{,}74;\ 0{,}091;\ 0{,}169\}^*$.

4. Цепь Маркова задана стохастическим графом (рис. 2.6),

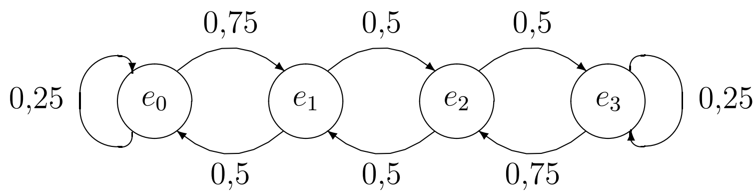

Рис. 2.6

где состояния e_0 и e_3 — отражающие барьеры. Найти стационарное распределение π, если оно существует.

Ответ: $\pi_0 = \pi_3 = 0{,}2$; $\pi_1 = \pi_2 = 0{,}3$.

5. Пусть конечная ЦМ с $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ имеет дважды стохастическую матрицу перехода $P = \{p_{ij}\}$, т. е. $\sum\limits_{j=0}^{N} p_{ij} = \sum\limits_{i=0}^{N} p_{ij} = 1$ $\forall i, j$. Показать, что стационарное распределение существует и является равномерным на E.

6. ЦМ имеет множество допустимых состояний $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ и описывается стохастическим графом (рис. 2.7), где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Доказать, что цепь является эргодической, и найти стационарное распределение вероятностей состояний $\{\pi_k\}$.

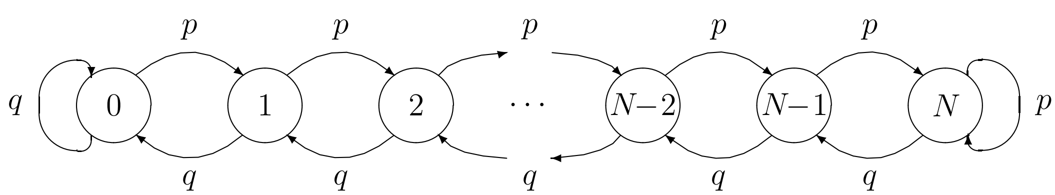

Рис. 2.7

Ответ: если $p \neq q$, то $\pi_k = \dfrac{a^k(1-a)}{1-a^{N+1}}$, $k = 0, 1, \ldots, N$, где $a = p/q$; если $p = q$, то $\pi_0 = \pi_1 = \ldots = \pi_N = 1/(N+1)$.

7. Эргодическая ЦМ с двумя состояниями имеет стационарное распределение $\pi_0 = p$, $\pi_1 = q = 1 - p$. Найти матрицу вероятностей перехода за один шаг.

Ответ: $P = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ y & 1-y \end{pmatrix}$, где для $a = p/q > 1$ $x \in \left(\dfrac{a-1}{a}, 1\right)$, а для $a < 1$ $x \in (0, 1)$ и $y = a(1-x)$.

8. Пусть конечная ЦМ неразложима и апериодична, а τ — случайное время первого возвращения в любое фиксированное состояние. Доказать, что найдутся $c > 0$ и $q < 1$ такие, что $\mathbf{P}\{\tau > n\} < cq^n$.