Т е о р е м а 5.3.3 Лемма Фату. *Если последовательность* $\{\xi_n, n \geq 1\}$ *неотрицательных случайных величин сходится почти всюду к случайной величине* ξ *и*

$$\mathbf{M}\{\xi_n\} \leq K,$$

то $\mathbf{M}\{\xi\}$ *существует и*

$$\mathbf{M}\{\xi\} \leq K.$$

Т е о р е м а 5.3.4 Лебега о мажорируемой сходимости. *Если последовательность* $\{\xi_n\}$ *сходится к* ξ *почти всюду и для некоторой случайной величины* η, $\quad \mathbf{M}\{\eta\} < \infty, \quad |\xi_n| \leq \eta$, *тогда*

$$\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty, \quad \mathbf{M}\{\xi_n\} \to \mathbf{M}\{\xi\},$$

и

$$\mathbf{M}\{|\xi_n - \xi|\} \to 0,$$

при $n \to \infty$.

Необходимое и достаточное условие для предельного перехода под знаком математического ожидания формулируется в терминах понятия равномерной интегрируемости.

О п р е д е л е н и е 5.3.4 Последовательность случайных величин ξ_n *равномерно интегрируема* если

$$\lim_{C\uparrow\infty} \sup_{n\geq 0} \int\limits_{|\xi_n|>C} |\xi_n| \mathbf{P}(d\omega) = 0.$$

■

Простое достаточное условие равномерной интегрируемости выражается следующим *критерием Валле-Пуссена.*

Т е о р е м а 5.3.5 *Пусть* $\{\xi_1,\, n \geq 1\}$ *- последовательность интегрируемых случайных величин и* $G = G(t)$ *- неотрицательная возрастающая функция, определенная для* $t \geq 0$, *такая, что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty, \quad \sup_n \mathbf{M}\{G(|\xi_n|)\} < \infty.$$

Тогда семейство случайных величин $\{\xi_n,\, n \geq 1\}$ *является равномерно интегрируемым.*

Т е о р е м а 5.3.6 *Пусть* $0 \leq \xi_n \to \xi$ *и* $\mathbf{M}\{\xi_n\} < \infty$. *Тогда* $\mathbf{M}\{\xi_n\} \to \mathbf{M}\{\xi\} < \infty$ *тогда и только тогда, когда семейство случайных величин* $\{\xi_n,\, n \geq 1\}$ *равномерно интегрируемо.*

5.4 Условное математическое ожидание

5.4.1 Условное математическое ожидание относительно σ - алгебр

Понятие условного математического ожидания относительно некоторой σ - алгебры является обобщением классического понятия, вводимого с помощью формулы Байеса и которое можно определить как

$$\mathbf{M}\{\xi|B\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x|B)$$

с интегралом по условной функции распределения

$$F_\xi(x|B) = \mathbf{P}\{\xi \leq x|B\} = \frac{\mathbf{P}\{(\xi \leq x) \cap B\}}{\mathbf{P}\{B\}}.$$

Необходимоть обобщения этого определения связана с тем, что данная формула теряет смысл если вероятность события B равна нулю, что часто имеет место, если событие B порождается случайной величиной с непрерывным распределением. Поэтому в ниже вводится общее определение условного математического ожидания и приводятся основные свойства этой характеристики случайной величины.

Определение и существование условного математического ожидания

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, $\mathcal{G}$ - некоторая σ - подалгебра алгебры $\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ и $\xi(\omega)$ - случайная величина такая, что $\mathbf{M}|\xi| < \infty$.

О п р е д е л е н и е 5.4.1 *Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$* называется случайная величина, обозначаемая $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}$ является $\mathcal{G}$ - измеримой;
2. для любого множества $A \in \mathcal{G}$ выполняется равенство

$$\int\limits_A \xi d\mathbf{P} = \int\limits_A \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} d\mathbf{P}. \tag{5.4.1}$$

■

Т е о р е м а 5.4.1 *Условное математическое ожидание случайной величины ξ, такой что $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$ существует и определено единственным образом с точностью до множества $\mathcal{N}$, $\mathbf{P}\{\mathcal{N}\} = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Определим меру $\mathbf{Q}$ на измеримом пространстве $\{\Omega, \mathcal{G}\}$ соотношением

$$\mathbf{Q}(A) = \int\limits_A \xi d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{G}.$$

Эта мера является абсолютно непрерывной относительно меры $\mathbf{P}$, рассматриваемой на том же пространстве (см. Теорема 4.1.17). Действительно, если для некоторого множества A мера $\mathbf{P}(A) = 0$ то отсюда в силу интегрируемости случайной величины ξ следует, что и мера $\mathbf{Q}(A) = 0$. По теореме Родона-Никодима (см. Теорема 4.1.18) это означает, что существует случайная величина, называемая производной Родона-Никодима $\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega)$, определенная с точностью до множества меры нуль (по мере $\mathbf{P}$) и измеримая относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$ такая, что для любого события $A \in \mathcal{G}$

$$\mathbf{Q}(A) = \int\limits_A \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) d\mathbf{P}.$$

Данное соотношение означает, что для любого события $A \in \mathcal{G}$

$$\mathbf{Q}(A) = \int\limits_A \xi d\mathbf{P} = \int\limits_A \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) d\mathbf{P},$$

и следовательно,

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega).$$

■

Свойства условного математического ожидания

Следующие свойства условного математического ожидания непосредственно вытекают из определения

1. Если $\xi(\omega) = C = const \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = C \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
2. Если $\xi(\omega) \leq \eta(\omega) \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} \leq \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
3. $|\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}| \leq \mathbf{M}\{|\xi||\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
4. Если a, b - заданные константы, ξ, η - интегрируемые случайные величины, то

$$\mathbf{M}\{a\xi + b\eta|\mathcal{G}\} = a\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} + b\mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

5. Пусть $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ - тривиальная σ - алгебра. Тогда,
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
6. Пусть случайная величина ξ измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$, тогда $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \xi, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
7. $\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\xi\}$.
8. Если $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_1\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
9. Если $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
10. Если случайная величина ξ не зависит от σ - алгебры $\mathcal{G}$, то есть для любого $B \in \mathcal{G}$ случайные величины ξ и I_B - независимы, то
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi\}.$$
11. Пусть η измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$, и $\mathbf{M}\{|\xi\eta|\} < \infty$, тогда
$$\mathbf{M}\{\xi\eta|\mathcal{G}\} = \eta\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
12. **Неравенство Иенсена.** Пусть $g(x)$ - выпуклая вниэ функция такая, что $\mathbf{M}\{|g(x)|\} < \infty$, тогда
$$g[\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}] \leq \mathbf{M}\{[g(\xi)|\mathcal{G}]\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
13. Пусть η - $\mathcal{G}$ произвольная измеримая случайная величина. Если $\mathbf{M}\{\xi^2\} < \infty$, $\mathbf{M}\{\eta^2\} < \infty$, то
$$\mathbf{M}\{(\xi - \eta)^2\} \geq \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о [свойство (13)]. Вычислим
$$\mathbf{M}\{(\xi - \eta)^2\} = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} + \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2\} =$$
$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2\} + \mathbf{M}\{(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2\} + 2\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\}.$$
Покажем, что последнее слагаемое равно нулю. Действительно, по свойству (7)
$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)|\mathcal{G}\}\}.$$
Далее, поскольку случайная величина $(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)$ является $\mathcal{G}-$ измеримой и
$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = 0,$$
то по свойству (10)
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\}(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\} = 0.$$
И, наконец, так как $\mathbf{M}\{(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2)\} \geq 0$, получаем соотношение (13). ■

З а м е ч а н и е Свойство (13) является чрезвычайно важным в задачах оценивания случайных величин. Действительно, пусть дана пара случайных величин, $\{\xi, \eta\}$, первая из которых ненаблюдаема, а вторая наблюдаема. Предположим, что мы хотим оценить случайную величину ξ наилучшим образом по наблюдению случайной величины η. Ясно, что всякая такая оценка есть не что иное как какая-то измеримая функция случайной величины η, то есть оценка ищется в виде $\hat{\xi} = \varphi(\eta)$. В качестве меры близости оценки и самой случайной величины ξ можно выбрать
$$\mathbf{M}|\xi - \hat{\xi}|^2 = \mathbf{M}|\xi - \varphi(\eta)|^2.$$
Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{F}^\eta$, тогда $\varphi(\eta)$ - есть $\mathcal{G}$ - измеримая случайная величина, и в силу свойства (13)
$$\mathbf{M}\{\xi - \varphi(\eta)\}^2 \geq \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2$$
для любой функции φ. Это означает, что условное математическое ожидание обладает экстремальным свойством наилучшей оценки в среднеквадратическом смысле.

З а м е ч а н и е   Если объединить это свойство вместе со свойством (8), то можно увидеть, что оператор взятия условного математического ожидания является оператором проектиравания случайных величин $\xi \in L^2\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ на множество $\mathcal{G}$ - измеримых случайных величин, и при этом выполняется естественное условие ортогональности

$$(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}) \perp \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\},$$

поскольку

$$\mathbf{cov}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}), \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\}\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = 0.$$

5.4.2 Примеры вычисления условных математических ожиданий

Дискретная случайная величина

Пусть η - дискретная случайная величина, принимающая счетное множество значений $\{y_k,\, k = 1, ...\}$ с вероятностями $\mathbf{P}\{\eta = y_k\} > 0$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta = y_k\} = 1$.

Пусть ξ интегрируемая случайная величина. Для любого события $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{P}(A|\eta = y_k) = \frac{\mathbf{P}(A \cap \{\eta = y_k\})}{\mathbf{P}(\eta = y_k)}, \quad k \geq 1.$$

Для $y \in R \setminus \{y_1, y_2, ...\}$ условная вероятность может быть определена произвольным образом, например, можно положить ее равной нулю.

По определению для любого множества $A \in \mathcal{F}^\eta$ должно выполняться равенство

$$\int\limits_A \xi d\mathbf{P} = \int\limits_A \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} d\mathbf{P}. \tag{5.4.2}$$

Возьмем в качестве $A = \{\eta = y_k\}$, тогда равенство (5.4.2) будет выполняться если

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} = \mathbf{M}\{\xi|\eta = y\} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbf{P}(\eta = y)} \displaystyle\int\limits_{\{\omega:\eta=y\}} \xi d\mathbf{P}, & y = y_k,\, k \geq 1, \\ 0, \quad y = R \setminus \{y_1, y_2, ...\}. \end{cases}$$

Поскольку любое подмножество $A \in \mathcal{F}^\eta$ представимо как счетное объединение множеств вида $\{\eta = y_k\}$, то равенство (5.4.2) выполнено и для любого множества $A \in \mathcal{F}^\eta$, и следовательно условное математическое ожидание определено как измеримая функция от случайной величины η.

Случайная величина, имеющая плотность

Пусть дана пара случайных величин $\{\xi, \eta\}$, имеющих совместную плотность распределения $p_{\xi\,\eta}(x, y) \geq 0$ и $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$. Покажем, что условное математическое ожидание $\mathbf{M}\{\xi|\eta\}$ можно вычислить по формуле

$$\mathbf{M}\{\xi|\eta\} = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx}{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx}, & \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx > 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx = 0. \end{cases}$$

По определению должно выполняться равенство (5.4.1). В качестве множества $A \in \mathcal{F}^\eta$ возьмем $A = \{\eta \leq y\}$. Кроме того, условное математическое ожидание есть $\mathcal{F}^\eta$ - измеримая случайная величина, и поэтому по Теореме 5.2.4 существует борелевская функция $\varphi(y)$ такая, что

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} = \varphi(\eta).$$

Подставив это соотношение в равенство (5.4.1), получим

$$\int_A \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} d\mathbf{P} = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du\,dv,$$

$$\int_A \xi\, d\mathbf{P} = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du\,dv.$$

Равенство (5.4.1) выполняется при всех $y \in R$, поэтому в силу теоремы Фубини, получаем следующее соотношение, которому должна удовлетворять функция φ

$$\varphi(v)\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du. \tag{5.4.3}$$

Поскольку равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du = 0$$

влечет за собой в силу интегрируемости ξ выполнение равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du = 0$$

то функция $\varphi(v)$

$$\varphi(v) = \begin{cases} \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du}, & \text{если} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du > 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)\,du = 0. \end{cases}$$

лействительно удовлетворяет уравнению (5.4.3), и определяет условное математическое ожидание.

Гауссовские случайные величины и вектора

Пусть в предыдущем примере совместное распределение случайных векторов $\{\xi, \eta\}$ - гауссовское с параметрами

$$\mathbf{M}\{\xi\} = m_\xi, \quad \mathbf{M}\{\eta\} = m_\eta,$$

$$\mathbf{cov}\{\xi\} = d_{\xi\,\xi}, \quad \mathbf{cov}\{\eta\} = d_{\eta\,\eta} > 0, \quad \mathbf{cov}\{\xi,\eta\} = d_{\xi\,\eta}.$$

Тогда условное математическое ожидание $\mathbf{M}\{\xi|\eta\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\}$ можно вычислить по формуле

$$\mathbf{M}\{\xi|\eta\} = m_\xi + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta), \tag{5.4.4}$$

при этом

$$\mathbf{cov}\{(\xi - M\{\xi|\eta\})\} = d_{\xi\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi}. \tag{5.4.5}$$

Рассмотрим случайный вектор

$$\theta = \xi - m_\xi + C(\eta - m_\eta)$$

и выберем матрицу C таким образом, чтобы $\theta \perp \eta - m_\eta$. Условие ортогональности дает соотношение

$$d_{\xi\,\eta} + Cd_{\eta\,\eta} = 0,$$

откуда $C = -d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}$. Следовательно, случайный вектор

$$\theta = \xi - m_\xi - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)$$

не зависит от η и по свойствам условного математического ожидания

$$\mathbf{M}\{\theta|\eta\} = \mathbf{M}\{\theta\} = 0.$$

Вычисляя $\mathbf{M}\{\theta|\eta\}$ получаем

$$0 = \mathbf{M}\{\theta|\eta\} = \mathbf{M}\{\xi|\eta\} - m_\xi - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)$$

откуда и следует (5.4.4). Подставляя соотношение для условного математического ожидания в формулу для условной ковариации с учетом соотношения $d_{\xi\,\eta} = d^*_{\eta\,\xi}$, получаем

$$\mathbf{cov}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\eta\})\} =$$

$$\mathbf{M}\{(\xi - m_\xi + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta))(\xi - m_\xi + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta))^*\} =$$

$$\mathbf{M}\{(\xi - m_\xi)(\xi - m_\xi)^*\} + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}\mathbf{M}\{(\eta - m_\eta)(\eta - m_\eta)^*\}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} -$$

$$\mathbf{M}\{(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)^*(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi}\} - \mathbf{M}\{d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)(\xi - m_\xi)^*\} =$$

$$d_{\xi\,\xi} + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} = d_{\xi\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi}.$$

З а м е ч а н и е Соотношения (5.4.4), (5.4.5) являются выражением важной *теоремы о нормальной корреляции,* дающей простое соотношение для вычисления условных математических ожиданий гауссовских случайных векторов.

5.5 Гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом

Среди гильбертовых пространств, общая теория которых изложена в разделе 4.2 и гильбертовых пространств измеримых функций интегрируемых с квадратом 4.2.2 для вероятностных приложений наиболее важным является пространство $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ или пространство случайных величин $\xi(\omega)$, интегрируемых с квадратом по мере $\mathbf{P}(d\omega)$ то есть таких, что

$$\int\limits_\Omega \xi^2(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \mathbf{M}\{\xi^2\} < \infty.$$

Также как и в разделе 4.2.2 мы рассматриваем пространство классов эквивалентых случайных величин с конечным вторым моментом, (см. Определение 4.2.10) совпадающих ($\mathbf{P}$ – п.н.).

Если $\xi, \eta \in L^2$, то положим

$$(\xi, \eta) = \mathbf{M}\{\xi\eta\}.$$