2.5. Мартингалы с дискретным временем

2.5.1. Основные определения

Будем всюду далее предполагать, что на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан неубывающий ***поток $\boldsymbol{\sigma}$-алгебр*** $\{\mathcal{F}_n\}$, $n \geq 0$, т. е. семейство σ-алгебр такое, что $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}$. Например, если $\{\xi_n\}$, $n \geq 0$ — набор случайных величин, заданных на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, а $\mathcal{F}_n^\xi = \sigma\{\xi_0, \ldots, \xi_n\}$ — σ-алгебра, порожденная конечным набором $\{\xi_k, k = 0, \ldots, n\}$, то $\mathcal{F}_{n-1}^\xi \subseteq \mathcal{F}_n^\xi$ по построению и, следовательно, $\{\mathcal{F}_n^\xi\}$, $n \geq 0$ — поток σ-алгебр.

Определение 2.5.1. *Пусть $\{X_n\}$, $n \geq 0$ — последовательность вещественных случайных величин, определенных на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$. Если при каждом $n \geq 0$ случайная величина X_n является $\mathcal{F}_n$-измеримой, то $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$, $n \geq 0$ называется* ***стохастической последовательностью****.*

Определение 2.5.2. *Если при каждом $n \geq 1$ случайная величина X_n является $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримой, то последовательность $\{X_n, \mathcal{F}_{n-1}\}$ называется* ***предсказуемой****. Если выполнено также условие монотонности $X_{n-1} \leq X_n$ ($\mathbf{P}$-п.н.), то $\{X_n, \mathcal{F}_{n-1}\}$ называется* ***неубывающей предсказуемой последовательностью****.*

Замечание. Смысл термина “предсказуемость” становится понятным, если в качестве $\mathcal{F}_n$ выбраны σ-алгебры $\mathcal{F}_n^X = \sigma\{X_0, \ldots, X_n\}$. Предсказуемость означает тогда, что случайная величина X_n есть некоторая борелевская функция величин $\{X_0, \ldots, X_{n-1}\}$ и, следовательно, может быть однозначно определена (предсказана) по значениям этих случайных величин.

Определение 2.5.3. *Стохастическая последовательность $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$, удовлетворяющая условию $\mathbf{M}\{|X_n|\} < \infty$, называется:*

а) ***мартингалом****, если* $\mathbf{M}\{X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = X_n$ ($\mathbf{P}$-п.н.)*;*

б) ***субмартингалом****, если* $\mathbf{M}\{X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} \geq X_n$ ($\mathbf{P}$-п.н.)*;*

в) ***супермартингалом****, если $\{-X_n, \mathcal{F}_n\}$ — субмартингал.*

Замечание. Из определения 2.5.3 следует, что всякий мартингал является одновременно как субмартингалом, так и супермартингалом.

Если $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}$ является мартингалом или субмартингалом, то по свойствам условного математического ожидания для мартингала

$$\mathbf{M}\{X_n\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{X_n|\mathcal{F}_0\}\} = \mathbf{M}\{X_0\},$$

и для субмартингала

$$\mathbf{M}\{X_n\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{X_n|\mathcal{F}_0\}\} \geq \mathbf{M}\{X_0\}.$$

Приведем ряд простых примеров стохастических последовательностей, образующих мартингалы и субмартингалы (необходимые далее свойства условного математического ожидания описаны в разд. 4.2.5).

Пример 2.5.1. Пусть $\{\xi_n\}$, $n \geq 0$ — последовательность независимых случайных величин, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_0, \ldots, \xi_n\}$, $X_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \xi_k$. Показать, что $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ является мартингалом (субмартингалом), если $\mathbf{M}\{\xi_k\} = 0$ ($\mathbf{M}\{\xi_k\} \geq 0$).

Решение. $\mathbf{M}\{|X_n|\} = \mathbf{M}\left\{\left|\sum_{k=0}^{n}\xi_k\right|\right\} \le \mathbf{M}\left\{\sum_{k=0}^{n}|\xi_k|\right\} = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{M}\{|\xi_k|\}$. Поскольку из условия $|\mathbf{M}\{\xi_k\}| < \infty$ и из свойств математического ожидания (см. разд. 4.2.3) следует $\mathbf{M}\{|\xi_k|\} < \infty$, получаем $\mathbf{M}\{|X_n|\} < \infty$. Покажем, что $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — мартингал при условии $\mathbf{M}\{\xi_k\} = 0$. Заметим, что по условию СВ X_n измерима относительно $\mathcal{F}_n$, а ξ_{n+1} от $\mathcal{F}_n$ не зависит, поэтому с учетом свойств условного математического ожидания (см. разд. 4.2.5) получаем:

$$\mathbf{M}\{X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = \mathbf{M}\{X_n + \xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} =$$
$$= \mathbf{M}\{X_n \mid \mathcal{F}_n\} + \mathbf{M}\{\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = X_n + \mathbf{M}\{\xi_{n+1}\}.$$

Отсюда $\mathbf{M}\{X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = X_n$, если $\mathbf{M}\{\xi_{n+1}\} = 0$, т. е. $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — мартингал. Кроме того, $\mathbf{M}\{X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} \ge X_n$, если $\mathbf{M}\{\xi_{n+1}\} \ge 0$, т. е. $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — субмартингал. ■

Пример 2.5.2. Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\mathcal{F}_n\}$ определены в примере 2.5.1, а $X_n = \prod_{k=0}^{n}\xi_k$. Показать, что при условии $\mathbf{M}\{\xi_k\} = 1$ последовательность $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ образует мартингал, а при условии $\mathbf{M}\{\xi_k\} \ge 1$ — субмартингал, если дополнительно предположить, что $\xi_n \ge 0$ ($\mathbf{P}$-п.н.).

Решение. $\mathbf{M}\{|X_n|\} = \mathbf{M}\left\{\prod_{k=0}^{n}|\xi_n|\right\} = \prod_{k=0}^{n}\mathbf{M}\{|\xi_k|\} < \infty$, где учтено, что сомножители — независимые случайные величины:

$$\mathbf{M}\{X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = \mathbf{M}\{X_n\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = \mathbf{M}\{X_n \mid \mathcal{F}_n\}\mathbf{M}\{\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} =$$
$$= X_n\mathbf{M}\{\xi_{n+1}\} = X_n, \quad \text{если } \ \mathbf{M}\{\xi_{n+1}\} = 1.$$

Если $\xi_n \ge 0$ ($\mathbf{P}$-п.н.), то $X_n \ge 0$ ($\mathbf{P}$-п.н.). Если теперь $\mathbf{M}\{\xi_{n+1}\} \ge 1$, то $\mathbf{M}\{X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} \ge X_n$, что и требовалось. ■

Пример 2.5.3. Пусть ξ — случайная величина с $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$ и $\{\mathcal{F}_n\}$ — некоторый поток σ-алгебр. Пусть $X_n = \mathbf{M}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\}$. Доказать, что $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — мартингал.

Решение. $\mathbf{M}\{|X_n|\} = \mathbf{M}\{|\mathbf{M}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\}|\} \le \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{|\xi| \mid \mathcal{F}_n\}\} = \mathbf{M}\{|\xi|\}$, поэтому $\mathbf{M}\{|X_n|\} < \infty$. Теперь в силу $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ и свойства 8 из разд. 4.2.5 находим $\mathbf{M}\{X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi \mid \mathcal{F}_{n+1}\} \mid \mathcal{F}_n\} = \mathbf{M}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\} = X_n$. ■

Пример 2.5.4. Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — мартингал, а $g(x)$ — выпуклая вниз функция такая, что $\mathbf{M}\{|g(X_n)|\} < \infty$. Доказать, что последовательность $\{g(X_n), \mathcal{F}_n\}$ образует субмартингал.

Решение. Пусть $Y_n = g(X_n)$, тогда $\mathbf{M}\{|Y_n|\} < \infty$ по условию. Воспользуемся неравенством Иенсена: $\mathbf{M}\{g(\xi) \mid \mathcal{F}_n\} \geq g\left(\mathbf{M}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\}\right)$, верного для выпуклой вниз функции $g(\cdot)$ и СВ ξ: $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$:

$$\mathbf{M}\{Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = \mathbf{M}\{g(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\} \geq g\left(\mathbf{M}\{X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\}\right) = g(X_n) = Y_n,$$

т. е. $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}$ — субмартингал. ■

Замечание. Пример 2.5.4 показывает важный способ формирования субмартингала из некоторого мартингала. Например, если $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — мартингал, а $Y_n = X_n^2$, то $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}$ — субмартингал, так как $g(x) = x^2$ — выпуклая вниз функция. Естественно, предполагается, что $\mathbf{M}\{X_n^2\} < \infty$.

Пример 2.5.5. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$, принимающих значения $\{-1, 1\}$ с вероятностями $\mathbf{P}\{\eta_n = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{\eta_n = -1\} = q = 1 - p$. Эту последовательность можно рассматривать как результаты игры двух лиц, где $\eta_n = 1$ трактуется как выигрыш первого игрока в n-й партии, а $\eta_n = -1$ — как проигрыш. Заметим, что $\mathbf{M}\{\eta_n\} = p - q$ при любых n. Если последовательность ставок первого игрока есть $\{V_k\}$, то его общий выигрыш X_n после n-й партии равен

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k V_k = X_{n-1} + \eta_n V_n, \quad X_0 = 0.$$

Поскольку игроку неизвестны результаты будущих партий, то его стратегия может базироваться только на результатах прошедших партий, что означает

$$V_n = \varphi_n(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \geq 0,$$

где $\varphi_n(\cdot)$ — некоторая неслучайная борелевская функция. Таким образом, случайная величина V_n измерима относительно $\mathcal{F}_{n-1}^{\eta} = \sigma\{\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}\}$. Рассмотрим поведение последовательности $X = \{X_n, \mathcal{F}_n^{\eta}\}$ с точки зрения определения 2.5.3. Тогда

$$\mathbf{M}\{X_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\eta}\} = X_{n-1} + V_n \mathbf{M}\{\eta_n\},$$

и последовательность X образует мартингал, если $\mathbf{M}\{\eta_n\} = p - q = 0$, субмартингал, если $p - q > 0$, и супермартингал, если $p - q < 0$. ■

Пример 2.5.6. Пусть $p_n^1(x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерная плотность распределения случайной последовательности $\xi = \{\xi_n, n \geq 1\}$. Доказать, что если

$p_n^0(x_1, \ldots, x_n)$ — также n-мерная плотность и $p_n^1(x_1, \ldots, x_n) > 0$, то последовательность

$$\rho_n = \frac{p_n^0(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{p_n^1(\xi_1, \ldots, \xi_n)}$$

является мартингалом относительно потока $\mathcal{F}_n^\xi = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

Решение. $\mathbf{M}\{\rho_n\} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p_n^0(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1 < \infty.$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}\{\rho_{n+1} \mid \xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n\} = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{p_{n+1}^0(x_1, \ldots, x_n, y)}{p_{n+1}^1(x_1, \ldots, x_n, y)} \cdot p_{\xi_{n+1}}(y \mid x_1, \ldots, x_n)\, dy = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{p_{n+1}^0(x_1, \ldots, x_n, y)}{p_{n+1}^1(x_1, \ldots, x_n, y)} \cdot \frac{p_{n+1}^1(x_1, \ldots, x_n, y)}{p_n^1(x_1, \ldots, x_n)}\, dy = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{p_{n+1}^0(x_1, \ldots, x_n, y)}{p_n^1(x_1, \ldots, x_n)}\, dy = \frac{p_n^0(x_1, \ldots, x_n)}{p_n^1(x_1, \ldots, x_n)}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{M}\big\{\rho_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\xi\big\} = \rho_n$, т. е. последовательность $\{\rho_n, \mathcal{F}_n^\xi\}$ образует мартингал. С другой стороны, поскольку в силу определения ρ_n

$$\mathcal{G}_n = \sigma\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \subseteq \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} = \mathcal{F}_n^\xi,$$

получаем

$$\mathbf{M}\{\rho_{n+1} \mid \mathcal{G}_n\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\rho_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\xi\} \mid \mathcal{G}_n\} = \mathbf{M}\{\rho_n \mid \mathcal{G}_n\} = \rho_n.$$

Таким образом, последовательность $\{\rho_n, \mathcal{G}_n\}$ — также мартингал. ■

Замечание. Величина ρ_n называется отношением правдоподобия. Вычисление отношения правдоподобия используется в статистике при решении задачи различения гипотез. В данном случае рассматривается ситуация различения гипотез о совместном распределении совокупности случайных величин $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, т. е. задача о выборе $p_n^0(\cdot)$ или $p_n^1(\cdot)$ в качестве истинной плотности распределения набора $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

Структура произвольного субмартингала описывается следующей теоремой.

Теорема 2.5.1. *Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — субмартингал. Тогда существуют мартингал $m = \{m_n, \mathcal{F}_n\}$ и неубывающая предсказуемая последовательность $A = \{A_n, \mathcal{F}_{n-1}\}$ такие, что для любого $n \geq 0$ справедливо* *разложение*

$$X_n = m_n + A_n \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \tag{2.5.1}$$

Замечание. Формула (2.5.1) называется ***разложением Дуба*** для субмартингала. Из доказательства теоремы 2.5.1 вытекает, что последовательности $\{m_n\}$ и $\{A_n\}$ имеют вид

$$m_n = X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} [X_{j+1} - \mathbf{M}\{X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\}], \tag{2.5.2}$$

$$A_n = \sum_{j=0}^{n-1} [\mathbf{M}\{X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\} - X_j], \quad A_0 = 0. \tag{2.5.3}$$

Определение 2.5.4. *Последовательность $A = \{A_n, \mathcal{F}_{n-1}\}$ в (2.5.1) называется **компенсатором субмартингала** X.*

Разложение Дуба играет основную роль при изучении ***квадратично-интегрируемых мартингалов***, т. е. мартингалов $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}$, для которых $\mathbf{M}\{X_n^2\} < \infty$ $\forall n \geq 0$. Тогда последовательность $X^2 = \{X_n^2, \mathcal{F}_n\}$ — субмартингал, и по теореме 2.5.1 существуют мартингал $m = \{m_n, \mathcal{F}_n\}$ и предсказуемая неубывающая последовательность $\langle X \rangle = \{\langle X \rangle_n, \mathcal{F}_{n-1}\}$ такие, что

$$X_n^2 = m_n + \langle X \rangle_n . \tag{2.5.4}$$

Определение 2.5.5. *Последовательность $\langle X \rangle$, определяемая из разложения* (2.5.4), *называется **квадратической характеристикой** мартингала X.*

Из формулы (2.5.3) следует (см. задачу 2.5.5), что

$$\langle X \rangle_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{M}\{(X_{j+1} - X_j)^2 \mid \mathcal{F}_j\}, \tag{2.5.5}$$

и для всех $l \leq k$

$$\mathbf{M}\{(X_k - X_l)^2 \mid \mathcal{F}_l\} = \mathbf{M}\{X_k^2 - X_l^2 \mid \mathcal{F}_l\} = \mathbf{M}\{\langle X \rangle_k - \langle X \rangle_l \mid \mathcal{F}_l\}. \tag{2.5.6}$$

Если $X_0 = 0$ ($\mathbf{P}$-п.н.), то

$$\mathbf{M}\{X_k^2\} = \mathbf{M}\{\langle X \rangle_k\}. \tag{2.5.7}$$

Пример 2.5.7. Предположим, что $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ и $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, где $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин с $\mathbf{M}\{\xi_n\} = 0$ и $\mathbf{M}\{\xi_n^2\} < \infty$. Доказать, что стохастическая последовательность $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — мартингал с квадратической характеристикой

$$\langle X \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{\xi_k\}. \qquad (2.5.8)$$

Решение. Мы можем сразу получить ответ, воспользовавшись формулой (2.5.5). Однако мы дадим полное решение, основываясь на теореме 2.5.1, чтобы продемонстрировать технику работы с условным математическим ожиданием.

Пусть $T_n = X_n^2$, тогда $\{T_n, \mathcal{F}_n\}$ — субмартингал (см. пример 2.5.4). По теореме 2.5.1 для T_n справедливо разложение Дуба $T_n = m_n + A_n$, где $A_n = \langle X \rangle_n$ — квадратическая характеристика мартингала $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$. Вычислим A_n по формуле (2.5.3) для $n \geq 1$ с учетом $\xi_0 = 0$:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{M}\{T_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\} - T_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{M}\{T_{k+1} - T_k \mid \mathcal{F}_k\}.$$

Для произвольного $k \geq 0$ имеем:

$$T_{k+1} - T_k = \left(\sum_{i=1}^{k+1} \xi_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i\right)^2 = (X_k + \xi_{k+1})^2 - X_k^2 = 2X_k\xi_{k+1} + \xi_{k+1}^2.$$

Поэтому

$$\mathbf{M}\{T_{k+1} - T_k \mid \mathcal{F}_k\} = \mathbf{M}\{2X_k\xi_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\} + \mathbf{M}\{\xi_{k+1}^2 \mid \mathcal{F}_k\} =$$
$$= 2X_k\mathbf{M}\{\xi_{k+1}\} + \mathbf{M}\{\xi_{k+1}^2\} = \mathbf{D}\{\xi_{k+1}\},$$

где учтено, что X_k измерима относительно $\mathcal{F}_k$, а ξ_{k+1} не зависит от $\mathcal{F}_k$, причем $\mathbf{M}\{\xi_{k+1}\} = 0$ и $\mathbf{M}\{\xi_{k+1}^2\} = \mathbf{D}\{\xi_{k+1}\}$. Итак,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{D}\{\xi_{k+1}\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{\xi_k\} = \langle X \rangle_n.$$

Таким образом, $\langle X \rangle_n = \mathbf{M}\{X_n^2\} = \mathbf{D}\{X_n\}$, причем квадратическая характеристика оказалась детерминированной последовательностью. ■

2.5.2. Марковские моменты. Случайная замена времени в мартингале

В задачах теории случайных процессов важное значение имеет понятие марковского момента или момента остановки. Фактически, марковский момент соответствует моменту времени первого появления некоторого случайного события, причем определить, произошло оно или нет можно по наблюдениям предыстории случайного процесса. Далее будем предполагать, что на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан поток σ-алгебр $\{\mathcal{F}_n\}$, $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$.

Определение 2.5.6. *Случайная величина τ, заданная на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ и принимающая значения из множества $\{0, 1, \ldots, \infty\}$, называется **марковским моментом** (относительно $\{\mathcal{F}_n\}$), если для любого $n \geq 0$*

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

*Если $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$, то марковский момент τ называется **моментом остановки**.*

Замечание. Можно показать, что данное определение эквивалентно следующему:

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \geq 0.$$

Определение 2.5.7. *Значение случайной последовательности $\{X_n\}$ в случайный момент времени τ определяется как*

$$X_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} X_n I\{\tau = n\},$$

где $I\{\tau = n\}$ — индикатор события $\{\tau = n\}$.

Заметим, что X_τ является случайной величиной. Действительно, для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$

$$\{X_\tau \in B\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n \in B\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}.$$

Процедура, описанная в определении 2.5.7, называется ***случайной заменой времени***.

Рассмотрим следующий типичный пример марковского момента.

Пример 2.5.8. Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — стохастическая последовательность, множество $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ и τ — момент первого попадания последовательности в множество B, т. е.

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\},$$

причем, если $X_n \notin B$ для всех $n \geq 0$, то полагаем $\tau = \infty$.

Показать, что случайная величина τ является марковским моментом.

Решение. По условию СВ τ имеет множество значений $\{0, 1, \ldots, \infty\}$. Для любого $n \geq 0$

$$\{\tau = n\} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{X_k \notin B\} \cap \{X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n,$$

что и доказывает требуемое утверждение. ■

Множество марковских моментов является замкнутым относительно некоторых простых операций.

Пример 2.5.9. Показать, что если τ и σ — два марковских момента (относительно потока $\{\mathcal{F}_n\}$), то $\tau + \sigma$, $\min(\tau, \sigma)$ и $\max(\tau, \sigma)$ также являются марковскими моментами.

Решение. Для любого $n \geq 0$

$$\{\min(\tau, \sigma) \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n,$$

так как $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, $\{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, а $\mathcal{F}_n$ замкнута относительно операции конечного или счетного объединения (см. разд. 4.1.1). Аналогично,

$$\{\max(\tau, \sigma) \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n;$$

$$\{\tau + \sigma \leq n\} = \bigcup_{\substack{k,\, l \geq 0 \\ k + l \leq n}} \{\tau = k\} \cap \{\sigma = l\} \in \mathcal{F}_n. \ ■$$

В разд. 2.5.1 отмечено, что для всякого мартингала $\mathbf{M}\{X_n\} = \mathbf{M}\{X_0\}$. Это свойство, однако, может нарушаться, если заменить детерминированный момент времени n на некоторый случайный момент времени τ.

Пример 2.5.10. Рассмотрим пример 2.5.5, в котором игрок использует следующую стратегию игры: величина ставки V_n выбирается по правилу

$$V_n = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если} \quad \eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_{n-1} = -1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это означает, что он удваивает ставки, начиная со ставки $V_1 = 1$, и прекращает игру после первого выигрыша. Если $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_n = -1$, то

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_n V_n = \sum_{k=1}^{n} (-2^{k-1}) = 1 - 2^n.$$

Однако, если $\eta_{n+1} = 1$, то

$$X_{n+1} = X_n + V_{n+1} = (1 - 2^n) + 2^n = 1.$$

Пусть $\tau = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$. Если $p = q = 1/2$, то $\mathbf{P}\{\tau = n\} = (1/2)^n$, поэтому

$$\mathbf{M}\{\tau\} = \sum_{n=1}^{\infty} n(1/2)^n = 2 < \infty$$

и, следовательно, $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$. Далее, $\mathbf{P}\{X_\tau = 1\} = 1$ по определению момента τ, поэтому $\mathbf{M}\{X_\tau\} = 1 \neq \mathbf{M}\{X_0\} = 0$. ■

Пример 2.5.11. Пусть $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{M}\{|\xi_k|\} < \infty$; τ — некоторый момент остановки относительно $\mathcal{F}_n^\xi = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $\tau \geq 1$, $\mathbf{M}\{\tau\} < \infty$. Тогда

$$\mathbf{M}\{\xi_1 + \ldots + \xi_\tau\} = \mathbf{M}\{\xi_1\}\mathbf{M}\{\tau\}. \tag{2.5.9}$$

Если к тому же $\mathbf{M}\{\xi_k^2\} < \infty$, то

$$\mathbf{M}\Big\{[\xi_1 + \ldots + \xi_\tau - \tau\mathbf{M}\{\xi_1\}]^2\Big\} = \mathbf{D}\{\xi_1\}\,\mathbf{M}\{\tau\}\,. \tag{2.5.10}$$

Соотношения (2.5.9), (2.5.10) называются ***тождествами Вальда***. ■

Пример 2.5.12. Применим тождества Вальда к исследованию задачи об игре двух лиц (см. примеры 2.5.5, 2.5.10). Предположим, что игроки располагают конечными начальными капиталами A и B соответственно, ставки фиксированы и равны 1. Если $S_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$, то величины капиталов первого и второго игроков после n-го розыгрыша будут

$$X_n = A + S_n, \qquad Y_n = B - S_n.$$

Игра заканчивается, если S_n достигает уровня $(-A)$ или B. В первом случае разоряется первый игрок, во втором — второй. Определим момент окончания игры как момент остановки:

$$\tau = \inf\{n \geq 1 : S_n = -A \quad \text{или} \quad S_n = B\}.$$

Найти вероятности разорения для каждого из игроков, если $p = q = 1/2$.

Решение. Последовательность S_n есть последовательность состояний марковской цепи, соответствующей модели случайных блужданий, у которой при $p = q = 1/2$ все состояния возвратны. Поэтому за конечное время она достигает любого уровня и $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$, $\mathbf{M}\{\tau\} < \infty$. Введем $\alpha = \mathbf{P}\{S_\tau = -A\}$ и $\beta = \mathbf{P}\{S_\tau = B\}$, $\alpha + \beta = 1$. Далее, при $p = q = 1/2$ мы имеем из (2.5.9) с учетом $\mathbf{M}\{\eta_1\} = 0$:

$$\mathbf{M}\{S_\tau\} = \mathbf{M}\{\tau\}\mathbf{M}\{\eta_1\} = 0 = -A\mathbf{P}\{S_\tau = -A\} + B\mathbf{P}\{S_\tau = B\} = \alpha(-A) + \beta B.$$

Таким образом, α и β удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha A = \beta B, \end{cases}$$

разрешив которую, получим

$$\alpha = \frac{B}{A+B}, \quad \beta = \frac{A}{A+B}.$$

Для вычисления среднего времени игры $\mathbf{M}\{\tau\}$ применим тождество (2.5.10), которое дает в силу $\mathbf{D}\{\eta_1\} = 1$, $\mathbf{M}\{\eta_1\} = 0$

$$\mathbf{M}\{S_\tau^2\} = \mathbf{M}\{\tau\}\mathbf{D}\{\eta_1\} = \mathbf{M}\{\tau\} = \alpha A^2 + \beta B^2 = AB.$$

Таким образом, $\mathbf{M}\{\tau\} = AB$, т. е. среднее время игры быстро возрастает, если увеличиваются начальные капиталы игроков. ■

Замечание. В примере 2.5.12 мы вычислили финальные вероятности состояний цепи Маркова, описывающей игру двух лиц (см. пример 2.3.14), с использованием мартингальной техники.

2.5.3. Теоремы сходимости мартингалов и их приложения

Рассматриваемые ниже результаты показывают, что последовательности случайных величин, являющиеся мартингалами, при определенных условиях сходятся с вероятностью 1 ($\mathbf{P}$-п.н.) и в среднем, т. е. существует такая СВ X_∞, что

$$X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X_\infty \quad \text{и} \quad \mathbf{M}\{|X_n - X_\infty|\} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 2.5.2. *Если $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — субмартингал, для которого найдется $p > 1$ такое, что $\sup\limits_{n \ge 0} \mathbf{M}\{|X_n|^p\} < \infty$, то существует случайная величина X_∞ такая, что $\mathbf{M}\{|X_\infty|\} < \infty$, причем*

1) *$X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X_\infty$ при $n \to \infty$;*

2) *$\mathbf{M}\{|X_n - X_\infty|\} \to 0$ при $n \to \infty$.*

Утверждение теоремы может быть использовано для обоснования сходимости оценок параметров в различных задачах математической статистики.

Пример 2.5.13 (усиленный закон больших чисел). Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют одинаковые математические ожидания $\mathbf{M}\{\xi_k\} = a$ и ограниченные дисперсии $\mathbf{D}\{\xi_k\} = \sigma_k^2 \le D$. Доказать, что

$$\widehat{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} a \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Решение. Пусть $\eta_k = \xi_k - a$, тогда $\mathbf{M}\{\eta_k\} = 0$, $\mathbf{D}\{\eta_k\} = \sigma_k^2 \le D$. Рассмотрим оценку $\widehat{a}_n$:

$$\widehat{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a + \eta_k) = a + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k \xrightarrow{\text{п.н.}} a,$$

если $\overline{\eta}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ при $n \to \infty$. Докажем, что требуемая сходимость действительно имеет место.

Пусть $\varepsilon_k = \dfrac{\eta_k}{k}$, тогда $\{\varepsilon_k\}$ независимы и $\mathbf{M}\{\varepsilon_k\} = 0$. Пусть $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k$, тогда из примера 2.5.1 следует, что $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — мартингал, где

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} = \sigma\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}, \quad \mathbf{M}\{X_n^2\} = \mathbf{D}\{X_n\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{\varepsilon_k\}.$$

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}\{\varepsilon_k\}$ сходится, то $\sup\limits_{n\ge 0} \mathbf{M}\{X_n^2\} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}\{\varepsilon_k\} < \infty$. Тогда из утверждения теоремы 2.5.2 следует, что $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X_\infty$ при $n \to \infty$:

$$\mathbf{D}\{\varepsilon_k\} = \frac{1}{k^2}\mathbf{D}\{\eta_k\} = \frac{\sigma_k^2}{k^2} \le \frac{D}{k^2},$$

поэтому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}\{\varepsilon_k\} \le D\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} < \infty$ в силу сходимости последнего ряда. Итак, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\eta_k}{k} \xrightarrow{\text{п.н.}} X_\infty$ при $n \to \infty$. Последнее означает, что

$$\mathbf{P}\left\{\omega : \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k(\omega)}{k} \to X_\infty(\omega)\right\} = 1.$$

Здесь нам понадобится утверждение, известное как ***лемма Кронекера***: *если числовые последовательности* $\{u_n\}$ *и* $\{x_n\}$ *таковы, что* $0 < u_n \uparrow \infty$ *при* $n \to \infty$, *а ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится, то* $\frac{1}{u_n}\sum_{k=1}^{n} u_k x_k \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Если обозначить $x_k = \eta_k(\omega)/k$, $u_k = k$, то $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = X_\infty(\omega)$, поэтому

$$\overline{\eta}_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k(\omega) = \frac{1}{u_n}\sum_{k=1}^{n} u_k x_k \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Итак, $\mathbf{P}\{\omega : \overline{\eta}_n(\omega) \to 0\} = 1$, т. е. $\overline{\eta}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать. ■

Замечание. Оценка $\widehat{\theta}_n$ параметра θ, построенная по наблюдениям $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, называется ***сильно состоятельной***, если $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \theta$ при $n \to \infty$. Предыдущий пример показывает, что выборочное среднее $\widehat{a}_n$ является сильно состоятельной оценкой математического ожидания a.

Поведение квадратично-интегрируемого мартингала $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}$ в значительной степени определяется его квадратической характеристикой (компенсатором) $\langle X \rangle_n$.

Обозначим через $\{\langle X \rangle_\infty = \infty\}$ подмножество Ω, на котором неубывающая последовательность $\langle X \rangle_n$ не ограничена.

Теорема 2.5.3. *Пусть* $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}$ — *квадратично-интегрируемый мартингал и* $\langle X \rangle = \{\langle X \rangle_n, \mathcal{F}_{n-1}\}$ — *его квадратическая характеристика. Если* $\mathbf{P}\{\langle X \rangle_\infty = \infty\} = 1$, *то*

$$\frac{X_n}{\langle X \rangle_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Следующие примеры показывают применение этого результата в задачах оценивания неизвестных параметров моделей наблюдения.

Пример 2.5.14. Пусть

$$y_k = x_k\theta + \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\{\varepsilon_k\}$ — независимые центрированные ошибки наблюдений, $\mathbf{D}\{\varepsilon_k\} = \sigma^2$. Доказать, что оценка параметра θ, построенная по методу наименьших квадратов (МНК-оценка), является сильно состоятельной при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \infty.$$

Решение. Найдем выражение для МНК-оценки $\widehat{\theta}_n$, построенной по наблюдениям $\{y_1, \ldots, y_n\}$:

$$\widehat{\theta}_n = \arg\min_{\theta} \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k\theta)^2 = \arg\min_{\theta} \mathcal{L}(\theta).$$

Найдем $\widehat{\theta}_n$ из условия $\dfrac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} = 0$, т. е. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - x_k\theta) = 0$:

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{d_n} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad \text{где} \quad d_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Из последнего выражения следует

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{d_n} \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k\theta + \varepsilon_k) = \theta + \frac{1}{d_n} \sum_{k=1}^{n} x_k\varepsilon_k = \theta + \Delta\widehat{\theta}_n.$$

Таким образом, нам достаточно показать, что $\Delta\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.

Если $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\varepsilon_k$, то с учетом условия $\mathbf{M}\{\varepsilon_k\} = 0$ мы заключаем, что $\{X_n\}$ — мартингал, причем в силу примера 2.5.7 $\langle X\rangle_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{x_k\varepsilon_k\} = \sigma^2 d_n$. Поэтому $\langle X\rangle_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \infty$ при $n \to \infty$, если $d_n \to \infty$. Тогда в силу теоремы 2.5.3 имеем $\Delta\widehat{\theta}_n = \sigma^2 \dfrac{X_n}{\langle X\rangle_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \theta$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать. ■

В заключение рассмотрим задачу оценивания неизвестного параметра в разностном стохастическом уравнении (задачу параметрической идентификации модели случайного процесса).

Пример 2.5.15. Пусть $\{X_n,\, n \geq 0\}$ — последовательность, удовлетворяющая уравнению авторегрессии первого порядка

$$X_{n+1} = \theta X_n + \xi_{n+1}, \quad n \geq 0, \qquad X_0 = 0,$$

где $\{\xi_n\}$ — независимые центрированные случайные величины такие, что $\mathbf{D}\{\xi_n\} = D_n \geq D > 0$, $D_{n+1}/D_n \leq K_1$, $\mathbf{M}\{\xi_n^4\} \leq K_2$, а θ — неизвестный неслучайный параметр. Доказать, что оценка $\widehat{\theta}_n$ метода взвешенных наименьших квадратов является сильно состоятельной.

Решение. Рассмотрим оценку метода взвешенных наименьших квадратов, которая строится следующим образом: для заданного набора наблюдений $\{X_0, \ldots, X_n\}$ оценка $\widehat{\theta}_n$ выбирается так, чтобы минимизировать сумму нормированных квадратических отклонений, а именно

$$\widehat{\theta}_n = \arg\min_\theta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(X_{k+1} - \theta X_k)^2}{D_{k+1}}.$$

Преобразования, аналогичные приведенным выше в примере 2.5.14, дают следующий результат:

$$\widehat{\theta}_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k^2}{D_{k+1}} \right)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k X_{k+1}}{D_{k+1}}.$$

Данную оценку можно записать в виде $\widehat{\theta}_n = \theta + M_n / \langle M \rangle_n$, где

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k \xi_{k+1}}{D_{k+1}}, \tag{2.5.11}$$

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k^2}{D_{k+1}}. \tag{2.5.12}$$

Пусть σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ порождена наблюдениями $\{X_0, \ldots, X_n\}$, тогда

$$\mathbf{M}\{M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = \mathbf{M}\left\{ M_n + \frac{X_n \xi_{n+1}}{D_{n+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_n \right\} = M_n + \frac{X_n}{D_{n+1}} \mathbf{M}\{\xi_{n+1}\} = M_n,$$

т. е. $\{M_n, \mathcal{F}_n\}$ — мартингал. Также нетрудно показать, что $\langle M \rangle_n$ — квадратическая характеристика указанного мартингала (см. задачу 11).

Докажем теперь расходимость ($\mathbf{P}$-п.н.) последовательности $\langle M \rangle_n$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{D_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(X_k - \theta X_{k-1})^2}{D_k} \le 2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^2}{D_k} + \theta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_{k-1}^2}{D_k} \right] =$$
$$= 2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{k+1}}{D_k} \cdot \frac{X_k^2}{D_{k+1}} + \theta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k^2}{D_{k+1}} \right] \le 2 \left[K_1 + \theta^2 \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k^2}{D_{k+1}}.$$

Поэтому расходимость ($\mathbf{P}$-п.н.) ряда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{D_k}$ влечет $\langle M \rangle_\infty = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k^2}{D_{k+1}} = \infty$ с вероятностью 1.

Пусть $\eta_k = \dfrac{\xi_k^2}{D_k}$, тогда $\mathbf{M}\{\eta_k\} = 1$, $\mathbf{M}\big\{\eta_k^2\big\} = \dfrac{\mathbf{M}\big\{\xi_k^4\big\}}{D_k^2} \le \dfrac{K_2}{D^2} < \infty$. Отсюда с учетом результата примера 2.5.13 получаем $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\xi_k^2}{D_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1$ при $n \to \infty$, что влечет $\mathbf{P}\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\xi_k^2}{D_k} = \infty\right\} = 1$.

Итак, $\mathbf{P}\{\langle M\rangle_\infty = \infty\} = 1$, поэтому по теореме 2.5.3

$$\widehat{\theta}_n - \theta = \frac{M_n}{\langle M\rangle_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что и означает сильную состоятельность оценки $\widehat{\theta}_n$.

Заметим, что если $\{\xi_n\}$ одинаково распределены, достаточно потребовать только $\mathbf{D}\{\xi_n\} = D > 0$. Если же $\{\xi_n\}$ — гауссовская последовательность, то остается лишь условие $D_{k+1}/D_k \le K_1$, так как $\mathbf{M}\big\{\eta_k^2\big\} = 3$. ■

2.5.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть ξ и η — независимые и одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$. Показать, что

$$\mathbf{M}\{\xi \mid \xi + \eta\} = \mathbf{M}\{\eta \mid \xi + \eta\} = \frac{\xi + \eta}{2} \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}).$$

У к а з а н и е: воспользоваться определением условного математического ожидания.

2. Пусть случайные векторы x, u, v имеют совместное гауссовское невырожденное распределение, причем u и v — независимы. Доказать, что

$$\mathbf{M}\{x \mid u, v\} = \mathbf{M}\{x \mid u\} + \mathbf{M}\{x \mid v\} - \mathbf{M}\{x\}.$$

У к а з а н и е: воспользоваться теоремой о нормальной корреляции.

3. Пусть $\{\xi_n,\, n \ge 0\}$ — гауссовская СП с параметрами $m_\xi(n)$ и $R_\xi(n, m)$. Пусть также $v_n = \{R_\xi(0, 1), \dots, R_\xi(0, n)\}$, а V_n — матрица с элементами $R_\xi(i, j)$, $i, j = 1, \dots, n$. Доказать, что последовательность

$$\eta_n = m_\xi(0) + v_n V_n^{-1}(\xi^n - m_\xi^n), \quad n \ge 1,$$

где $\xi^n = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}^*$, $m_\xi^n = \{m_\xi(1), \dots, m_\xi(n)\}^*$, образует мартингал относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

У к а з а н и е: воспользоваться теоремой о нормальной корреляции и результатом примера 2.5.3.

4. Пусть $\{\xi_k\}$ — центрированный белый шум, а $\{\eta_k\}$ — такая СП, что при каждом $k \geq 1$ совокупности случайных величин $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ и $\{\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots\}$ независимы. Доказать, что если $\mathbf{M}\{|\eta_k \xi_k|\} < \infty$, то приведенная ниже последовательность является мартингалом

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \xi_k, \quad n \geq 1.$$

5. Вывести соотношения (2.5.5)–(2.5.7) для квадратично-интегрируемого мартингала $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$.

6. В примере 2.5.7 вывести соотношение (2.5.8) для квадратической характеристики с использованием (2.5.5).

7. Объяснить, почему разность марковских моментов, вообще говоря, марковским моментом не является.

8. Доказать тождество Вальда для дисперсий (соотношение (2.5.10) в примере 2.5.11).

9. Пусть $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_i = 2\} = 1/2$. Показать, что последовательность $X_n = \prod_{i=1}^{n} \xi_i$ является мартингалом относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ и сходится ($\mathbf{P}$-п.н.) к конечной случайной величине.

Указание: показать, что данная последовательность сходится к нулю ($\mathbf{P}$-п.н.).

10. Пусть $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ — последовательность независимых случайных величин с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi_m = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_m = -1\} = \frac{1}{2m^2}, \quad \mathbf{P}\{\xi_m = 0\} = 1 - \frac{1}{m^2}.$$

Показать, что последовательность $X_n = \sum_{m=0}^{n} \xi_m$ сходится ($\mathbf{P}$-п.н.).

11. Доказать, что (2.5.12) — квадратическая характеристика мартингала (2.5.11).

12. Пусть $\widehat{\theta}_n$ — с.к.-оптимальная оценка для СВ θ по наблюдениям $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $\mathbf{M}\{|\theta|^2\} < \infty$. Доказать, что если $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} \theta$, то также и $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \theta$ при $n \to \infty$.

Указание: показать, что $\widehat{\theta}_n$ — квадратично-интегрируемый мартингал относительно $\mathcal{F}_n^{\xi} = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.