2.2 Мартингалы (Дискретное время)

При решении прикладных задач, в которых используются теоретико-вероятностные модели, ключевым моментом является наличие зависимости между различными случайными величинами. В общем случае эта зависимость описывается совместным распределением, что хотя и характеризует эту зависимость полностью, но является весьма громоздким и часто неприемлемым. Поэтому все описанные выше основные модели случайных процессов упрощают эту зависимость, сводя ее к некоторым более простым соотношениям. Ясно, что при таком упрощении, модель теряет многие свойства исходного процесса и поэтому для каждого класса моделей можно решить лишь некоторый круг типовых задач. Если рассматривать модель последовательности, образующей мартингал, с этой точки зрения, то удивительным является несоответствие между чрезвычайно простым описанием и тем широким кругом задач, которые в рамках этого описания можно решить. Дело в том, что описание мартингала напрямую связано с множеством случайных событий, происходящих до текущего момента времени, и тем самым его структура оределена естественным ходом времени, что чрезвычайно важно для моделей, описывающих динамические процессы. Этим можно обьяснить широкое применение теории мартингалов в задачах фильтрации, управления, теории связи, финансовой математики и статистики. Кроме того, мартингалы позволяют весьма "экономными" средствами обобщить классические теоремы о сходимости случайных последовательностей, дать оценки вероятностей важных случайных событий в очень простых терминах и т.д. Свойство мартингальности основано на понятии условного математического ожидания относительно некоторой σ - алгебры, которое является обобщением классического понятия, вводимого с помощью формулы Байеса и которое можно определить как

$$\mathbf{M}\{\xi|B\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x|B)$$

с интегралом по условной функции распределения

$$F(A|B) = \frac{\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{B\}} = \mathbf{P}\{\xi \in A|B\}.$$

Необходимоть обобщения этого определения связана с тем, что данная формула теряет смысл если вероятность события B равна нулю, что часто имеет место, если событие B порождается случайной величиной с непрерывным распределением. Поэтому в следующем разделе вводится общее определение условного математического ожидания и приводятся основные свойства этой характеристики случайной величины.

2.2.1 Определение и свойства условного математического ожидания

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, $\mathcal{G}$ - некоторая σ - подалгебра алгебры $\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ и $\xi(\omega)$ - случайная величина такая, что $\mathbf{M}|\xi| < \infty$.

Определение 2.2.1 *Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$* называется случайная величина, обозначаемая $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}$ является $\mathcal{G}$ - измеримой;

2. для любого множества $A \in \mathcal{G}$ выполняется равенство

$$\int_A \xi d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} d\mathbf{P}. \qquad (2.2.1)$$

■

Теорема 2.2.1 *Условное математическое ожидание случайной величины ξ, такой что $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$ существует и определено единственным образом с точностью до множества $\mathcal{N}$, $\mathbf{P}\{\mathcal{N}\} = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Определим меру $\mathbf{Q}$ на измеримом пространстве $\{\Omega, \mathcal{G}\}$ соотношением

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A \xi d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{G}.$$

Эта мера является абсолютно непрерывной относительно меры $\mathbf{P}$, рассматриваемой на том же пространстве. Действительно, если для некоторого множества A мера $\mathbf{P}(A) = 0$ то отсюда в силу интегрируемости случайной величины ξ следует, что и мера $\mathbf{Q}(A) = 0$. По теореме Родона-Никодима это означает, что существует случайная величина, называемая производной Родона-Никодима $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega)$, определенная с точностью до множества меры нуль (по мере $\mathbf{P}$) и измеримая относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$ такая, что для любого события $A \in \mathcal{G}$

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) d\mathbf{P}.$$

Данное соотношение означает, что для любого события $A \in \mathcal{G}$

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A \xi d\mathbf{P} = \int_A \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) d\mathbf{P},$$

и следовательно,

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega).$$

■

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства условного математического ожидания:

1. Если $\xi(\omega) = C = const \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = C \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
2. Если $\xi(\omega) \leq \eta \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} \leq \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
3. $|\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}| \leq \mathbf{M}\{|\xi||\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
4. Если a, b - заданные константы, ξ, η - интегрируемые случайные величины, то
$$\mathbf{M}\{a\xi + b\eta|\mathcal{G}\} = a\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} + b\mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
5. Пусть $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ - тривиальная σ - алгебра. Тогда,
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
6. Пусть случайная величина ξ измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{F}$, тогда $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}\} = \xi, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
7. $\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\xi\}$.
8. Если $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_1\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
9. Если $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
10. Если случайная величина ξ не зависит от σ - алгебры $\mathcal{G}$, то есть для любого $B \in \mathcal{G}$ случайные величины ξ и I_B - независимы, то
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi\}.$$
11. Пусть η измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$, и $\mathbf{M}\{|\xi\eta|\} < \infty$, тогда
$$\mathbf{M}\{\xi\eta|\mathcal{G}\} = \eta\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

12. **Неравенство Иенсена.** Пусть $g(x)$ - выпуклая вниэ функция такая, что $\mathbf{M}\{|g(x)|\} < \infty$, тогда

$$g[\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}] \leq \mathbf{M}\{[g(\xi)|\mathcal{G}]\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

13. Пусть η - $\mathcal{G}$ произвольная измеримая случайная величина. Если $\mathbf{M}\{\xi^2\} < \infty$, $\mathbf{M}\{\eta^2\} < \infty$, то

$$\mathbf{M}\{(\xi - \eta)^2\} \geq \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2\}.$$

Доказательство [свойство (13)]. Вычислим

$$\mathbf{M}\{(\xi - \eta)^2\} = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} + \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2\} =$$

$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2\} + \mathbf{M}\{(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2\} + 2\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\}.$$

Покажем, что последнее слагаемое равно нулю. Действительно, по свойству (7)

$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)|\mathcal{G}\}\}.$$

Далее, поскольку случайная величина $(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)$ является $\mathcal{G}-$ измеримой и

$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = 0,$$

то по свойству (10)

$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\}(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)\} = 0.$$

И, наконец, так как $\mathbf{M}\{(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} - \eta)^2)\} \geq 0$, получаем соотношение (13). ■

Замечание Свойство (13) является чрезвычайно важным в задачах оценивания случайных величин. Действительно, пусть дана пара случайных величин, $\{\xi, \eta\}$, первая из которых ненаблюдаема, а вторая наблюдаема. Предположим, что мы хотим оценить случайную величину ξ наилучшим образом по наблюдению случайной величины η. Ясно, что всякая такая оценка есть не что иное как какая-то измеримая функция случайной величины η, то есть оценка ищется в виде $\hat{\xi} = \varphi(\eta)$. В качестве меры близости оценки и самой случайной величины ξ можно выбрать

$$\mathbf{M}|\xi - \hat{\xi}|^2 = \mathbf{M}|\xi - \varphi(\eta)|^2.$$

Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{F}^\eta$, тогда $\varphi(\eta)$ - есть $\mathcal{G}$ - измеримая случайная величина, и в силу свойства (13)

$$\mathbf{M}\{\xi - \varphi(\eta)\}^2 \geq \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})^2$$

для любой функции φ. Это означает, что условное математическое ожидание обладает экстремальным свойством наилучшей оценки в среднеквадратическом смысле.

Замечание Если объединить это свойство вместе со свойством (8), то можно увидеть, что оператор взятия условного математического ожидания является оператором проектиравания случайных величин $\xi \in H^2$ на множество $\mathcal{G}$ - измеримых случайных величин, и при этом выполняется естественное условие ортогональности

$$(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}) \perp \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\},$$

поскольку

$$\mathbf{cov}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}), \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\})|\mathcal{G}\}\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}\} = 0.$$

Приведем примеры вычисления условных математических ожиданий.

Пример 2.2.1 Пусть η - дискретная случайная величина, принимающая счетное множество значений $\{y_k,\ k = 1, ...\}$ с вероятностями $\mathbf{P}\{\eta = y_k\} > 0$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta = y_k\} = 1$. Пусть ξ интегрируемая случайная величина. Определить условное математическое ожидание ξ относительно σ - алгебры $\mathcal{F}^\eta$, порожденной случайной величиной η.

Р е ш е н и е Для любого события $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{P}(A|\eta = y_k) = \frac{\mathbf{P}(A \cap \{\eta = y_k\})}{\mathbf{P}(\eta = y_k)}, \quad k \geq 1.$$

Для $y \in R \setminus \{y_1, y_2, ...\}$ условная вероятность может быть определена произвольным образом, например, можно положить ее равной нулю.

По определению для любого множества $A \in \mathcal{F}^\eta$ должно выполняться равенство

$$\int\limits_A \xi d\mathbf{P} = \int\limits_A \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} d\mathbf{P}. \qquad (2.2.2)$$

Возьмем в качестве $A = \{\eta = y_k\}$, тогда равенство (2.2.2) будет выполняться если

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} = \mathbf{M}\{\xi|\eta = y\} = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbf{P}(\eta = y)} \displaystyle\int\limits_{\{\omega:\eta=y\}} \xi d\mathbf{P}, & y = y_k,\, k \geq 1, \\ 0, \quad y = R \setminus \{y_1, y_2, ...\}. \end{cases}$$

Поскольку любое подмножество $A \in \mathcal{F}^\eta$ представимо как счетное объединение множеств вида $\{\eta = y_k\}$, то равенство (2.2.2) выполнено и для любого множества $A \in \mathcal{F}^\eta$, и следовательно условное математическое ожидание определено как измеримая функция от случайной величины η. ■

П р и м е р 2.2.2 Пусть дана пара случайных величин $\{\xi, \eta\}$, имеющих совместную плотность распределения $p_{\xi\,\eta}(x, y) \geq 0$ и $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$. Показать, что условное математическое ожидание $\mathbf{M}\{\xi|\eta\}$ можно вычислить по формуле

$$\mathbf{M}\{\xi|\eta\} = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx}{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx}, & \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx > 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(x, \eta) dx = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е По определению должно выполняться равенство (2.2.1). В качестве множества $A \in \mathcal{F}^\eta$ возьмем $A = \{\eta \leq y\}$. Кроме того, условное математическое ожидание есть $\mathcal{F}^\eta$ - измеримая случайная величина, и поэтому существует борелевская функция $\varphi(y)$ такая, что

$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} = \varphi(\eta).$$

Подставив это соотношение в равенство (2.2.1), получим

$$\int\limits_A \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}^\eta\} d\mathbf{P} = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) f_{\xi\,\eta}(u, v) du dv,$$

$$\int\limits_A \xi d\mathbf{P} = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u, v) du dv.$$

Поскольку равенство (2.2.1) должно выполняться при всех $y \in R$, то в силу теоремы Фубини, получаем следующее соотношение, которому должна удовлетворять функция φ

$$\varphi(v) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u, v) du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u, v) du. \qquad (2.2.3)$$

Поскольку равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)du = 0$$

влечет за собой в силу интегрируемости ξ выполнение равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)du = 0$$

то функция $\varphi(v)$

$$\varphi(v) = \begin{cases} \dfrac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} u f_{\xi\,\eta}(u,v)du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)du}, & \text{если} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)du > 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\,\eta}(u,v)du = 0. \end{cases}$$

лействительно удовлетвряет уравнению (2.2.3), и определяет условное математическое ожидание. ■

П р и м е р 2.2.3 [Гауссовские случайные величины]. Пусть в предыдущем примере совместное распределение слуайных величин $\{\xi,\eta\}$ - гауссовское с параметрами

$$\mathbf{M}\{\xi\} = m_\xi, \quad \mathbf{M}\{\eta\} = m_\eta,$$

$$\mathbf{D}\{\xi\} = d_{\xi\,\xi}, \quad \mathbf{D}\{\eta\} = d_{\eta\,\eta} > 0, \quad \mathbf{cov}\{\xi,\eta\} = d_{\xi\,\eta}.$$

Показать, что условное математическое ожидание $\mathbf{M}\{\xi|\eta\}$ можно вычислить по формуле

$$\mathbf{M}\{\xi|\eta\} = m_\xi + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta), \tag{2.2.4}$$

при этом

$$\mathbf{M}\{(\xi - M\{\xi|\eta\})^2\} = d_{\xi\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi}. \tag{2.2.5}$$

Р е ш е н и е Конечно, эту формулу можно получить из общих соотношений, используя выражение для плотности условного распределения. Однако, для гауссовских случайных величин можно воспользоваться тем, что некоррелированность влечет за собой независимость.

Рассмотрим случайную величину

$$\theta = \xi - m_\xi + C(\eta - m_\eta)$$

и выберем параметр C таким образом, чтобы $\theta \perp \eta - m_\eta$. Условие ортогональности дает соотношение

$$d_{\xi\,\eta} + C d_{\eta\,\eta} = 0,$$

откуда $C = -d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}$. Следовательно, случайная величина

$$\theta = \xi - m_\xi - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)$$

не зависит от η и по свойствам условного математического ожидания

$$\mathbf{M}\{\theta|\eta\} = \mathbf{M}\{\theta\} = 0.$$

Вычисляя условное математическое ожидание θ, получаем

$$0 = \mathbf{M}\{\theta|\eta\} = \mathbf{M}\{\xi|\eta\} - m_\xi - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)$$

откуда и следует (2.2.4). Подставляя соотношение для условного математического ожидания в формулу для условной ковариации с учетом соотношения $d_{\xi\,\eta} = d_{\eta\,\xi}$, получаем

$$\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\{\xi|\eta\})^2\} = \mathbf{M}\{(\xi - m_\xi + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta))^2\} =$$

$$\mathbf{M}\{(\xi - m_\xi)^2 + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}\mathbf{M}\{(\eta - m_\eta)^2\}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} -$$

$$\mathbf{M}\{(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi}\} - \mathbf{M}\{d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}(\eta - m_\eta)(\xi - m_\xi)\} =$$

$$d_{\xi\,\xi} + d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi} = d_{\xi\,\xi} - d_{\xi\,\eta}(d_{\eta\,\eta})^{-1}d_{\eta\,\xi}.$$

■

З а м е ч а н и е Соотношения (2.2.4), (2.2.5) являются выражением важной *теоремы о нормальной корреляции,* дающей простое соотношение для вычисления условных математических ожиданий гауссовских случайных величин. Эти соотношения справедливы и в векторном случае, когда матрица ковариации случайного вектора $d_{\eta\,\eta}$ является положительно определенной.

2.2.2 Определение и примеры мартингалов и субмартингалов

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задано неубывающее семейство σ - алгебр $\mathcal{F}_n$, $n > 0$ такое, что $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq ... \subseteq \mathcal{F}$.

О п р е д е л е н и е 2.2.2 Пусть $X_0, X_1, ...$ - последовательность случайных величин, определенных на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$. Если при каждом n случайная величина X_n - $\mathcal{F}_n$ - измерима, то $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, $n > 0$ или просто $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ будет называться *стохастической последовательностью.*

Если стохастическая последовательность такова, что случайная величина X_n - $\mathcal{F}_{n-1}$ - измерима при всех $n \geq 1$, то такая последовательность будет называться *предсказуемой.* ■

З а м е ч а н и е Смысл этого названия становится понятным, если в качестве $\mathcal{F}_n$ выбраны σ - алгебры $\mathcal{F}_n^X = \sigma\{X_0, ..., X_n\}$, порожденные случайными величинами из последовательности X до момента времени n. Предсказуемость означает тогда, что случайная величина X_n - есть борелевская функция величин $\{X_0, ..., X_{n-1}\}$, и следовательно, может быть определена по наблюдениям случайных величин до момента, предшествующего n.

О п р е д е л е н и е 2.2.3 Стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$*называется мартингалом, или субмартингалом, если для любого* $n \geq 0$,

$$\mathbf{M}\{|X_n|\} < \infty$$

и соответственно,

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\{X_{n+1}|\mathcal{F}_n\} = X_n \quad (\mathbf{P} - \textit{п.н.}) \quad (\textit{мартингал}), \\ &\mathbf{M}\{X_{n+1}|\mathcal{F}_n\} \geq X_n \quad (\mathbf{P} - \textit{п.н.}) \quad (\textit{субмартингал}). \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$*называется супермартингалом если последовательность* $-X = (-X_n, \mathcal{F}_n)$ *- субмартингал.* ■

Из свойств условного математического ожидания следует, что свойство (2.2.6) эквивалентно следующему условию: *для любого* $n \geq 0$ *и события* $A \in \mathcal{F}_n$ *имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} &\int\limits_A X_{n+1} d\mathbf{P} = \int\limits_A X_n d\mathbf{P} \quad \text{(мартингал)}, \\ &\int\limits_A X_{n+1} d\mathbf{P} \geq \int\limits_A X_n d\mathbf{P} \quad \text{(субмартингал)}. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Приведем ряд простых примеров стохастических последовательностей образующих мартингалы и субмартингалы.

П р и м е р 2.2.4 Пусть $(\xi_n)_{n\geq 0}$ - последовательность независимых случайных величин с $\mathbf{M}\{\xi_n\} = 0$. Тогда стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, где $X_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \xi_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_0, ..., \xi_n\}$ - мартингал. Если $\mathbf{M}\{\xi_n\} \geq 0$, то последовательность X - субмартингал.

П р и м е р 2.2.5 Пусть $(\xi_n)_{n\geq 0}$ - последовательность независимых случайных величин с $\mathbf{M}\{\xi_n\} = 1$. Тогда стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, где $X_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \xi_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_0, ..., \xi_n\}$ - мартингал. Если $\mathbf{M}\{\xi_n\} \geq 1$, то последовательность X - субмартингал.

П р и м е р 2.2.6 Пусть ξ - случайная величина с $\mathbf{M}\{|\xi|\} < \infty$ и $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq ... \subseteq \mathcal{F}$. Тогда стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, где $X_n = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}_n\}$ - мартингал. Мартингалы, допускающие такое представление называются *регулярными мартингалами.*

П р и м е р 2.2.7 Пусть стохастическая последоватеьность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$- мартингал, и $g(x)$ - выпуклая вниз функция такая, что $\mathbf{M}\{|g(X_n|\} < \infty$ для всех $n \geq 0$. Тогда стохастическая последовательность $(g(X_n), \mathcal{F}_n)$ - субмартингал. Если стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$- субмартингал, и $g(x)$ - выпуклая вниз неубывающая функция такая, что для всех $n \geq 0$ $\mathbf{M}\{|g(X_n|\} < \infty$ для всех $n \geq 0$, то стохастическая последовательность $(g(X_n), \mathcal{F}_n)$ - также субмартингал.

П р и м е р 2.2.8 Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $(\eta_n)_{n\geq 1}$, принимающих значения $\{-1, 1\}$ с вероятностями $\mathbf{P}\{\eta_n = 1\} = p$, $\quad \mathbf{P}\{\eta_n = -1\} = q = 1-p$. Эту последовательность можно рассматривать как результаты игры двух лиц, где $\eta_n = 1$ трактуется как выигрыш первого игрока в $n-$ партии, а $\eta_n = -1$, как его проигрыш. Если последовательность ставок первого игрока есть V_n, то его общий выигрыш после $n-$ ой партии равен

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_n V_n = X_{n-1} + \eta_n V_n.$$

Поскольку игроку неизвестны результаты будущих партий, то его стратегия может базироваться только на результатах прошедших партий, что означает

$$V_n = V_n\{\eta_1, ..., \eta_{n-1}\} \geq 0,$$

или V_n - есть $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{\eta_1, ..., \eta_{n-1}\}$ - измеримая случайная величина. Рассмотрим поведение последовательности $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$с точки зрения определения 2.2.3, тогда

$$\mathbf{M}\{X_n|\mathcal{F}_{n-1}\} = X_{n-1} + V_n\mathbf{M}\{\eta_n\}$$

и последовательность образует мартингал, если $\mathbf{M}\{\eta_n\} = p-q = 0$, субмартингал, если $\mathbf{M}\{\eta_n\} = p-q > 0$, и супермартингал, если $\mathbf{M}\{\eta_n\} = p-q < 0$.

П р и м е р 2.2.9 Пусть $\xi = (\xi_n)_{n\geq 1}$ - последовательность случайных величин, совместная плотность распределения которых равна либо $p^0_n(x_1, ..., x_n)$ либо $p^1_n(x_1, ..., x_n)$. Предположим, что функция $p^1_n > 0$ и рассмотрим функцию

$$\rho_n = \frac{p^0_n(\xi_1, ..., \xi_n)}{p^1_n(\xi_1, ..., \xi_n)},$$

которая есть отношение правдоподобия. (Вычисление отношения правдоподобия часто используется в статистике при решении задачи различения гипотез. В данном случае рассматривается ситуация различения гипотез о совместном распределении совокупности случайных величин $\xi_1, ..., \xi_n$.)

Если истиная плотность распределения есть p_1, а $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\}$, то

$$\mathbf{M}\{\rho_{n+1}|\mathcal{F}_n\} = \mathbf{M}\{\rho_{n+1}|\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\} =$$

$$\int\limits_R \rho_{n+1}(x_1, ..., x_n, y)\mathbf{P}\{\xi_{n+1} \in dy|\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n\} =$$

$$\int\limits_R \frac{p^0_{n+1}(x_1, ..., x_n, y)}{p^1_n(x_1, ..., x_n)} dy = \frac{p^0_n(x_1, ..., x_n)}{p^1_n(x_1, ..., x_n)} = \rho_n.$$

Следовательно, последовательность $\rho = (\rho_n, \mathcal{F}_n)$ образует мартингал. С другой стороны, поскольку

$$\mathcal{G}_n = \sigma\{\rho_1, ..., \rho_n\} \subseteq \sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\} = \mathcal{F}_n,$$

то

$$\mathbf{M}\{\rho_{n+1}|\mathcal{G}_n\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\rho_{n+1}|\mathcal{F}_n\}|\mathcal{G}_n\} = \mathbf{M}\{\rho_n|\mathcal{G}_n\} = \rho_n,$$

и следовательно, последовательность $(\rho_n, \mathcal{G}_n)$ также - мартингал.

Следующая теорема, принадлежащая Дубу определяет структуру субмартингала и супермартингала.

Т е о р е м а 2.2.2 *Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$- субмартингал. Тогда существует мартингал $m = (m_n, \mathcal{F}_n)$ и неубывающая предсказуемая случайная последовательность $A = (A_n, \mathcal{F}_{n-1})$ такие, что для любого $n \geq 0$ справедливо разложение Дуба*

$$X_n = m_n + A_n \quad (\mathbf{P} - \textit{п.н.}). \tag{2.2.8}$$

В классе предсказуемых последовательностей A разложение Дуба единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о Положим $m_0 = X_0$, $A_0 = 0$ и

$$\begin{aligned} m_n &= m_0 + \sum_{j=0}^{n-1}[X_{j+1} - \mathbf{M}\{X_{j+1}|\mathcal{F}_j\}], \\ A_n &= \sum_{j=0}^{n-1}[\mathbf{M}\{X_{j+1}|\mathcal{F}_j\} - X_j]. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Нетрудно убедиться, что последовательности m, A обладают требуемыми свойствами. Если существует другое разложение $X_n = m_n^{'} + A_n^{'}$ с предсказуемой последовательностью $A^{'}$, то

$$A_{n+1}^{'} - A_n^{'} = (A_{n+1} - A_n) + (m_{n+1} - m_n) - (m_{n+1}^{'} - m_n^{'}).$$

Взятие условного математического ожидания относительно σ - алгебры $\mathcal{F}_n$, дает равенство

$$A_{n+1}^{'} - A_n^{'} = A_{n+1} - A_n \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}),$$

и поскольку $A_0^{'} = A_0 = 0$, то

$$A_n^{'} = A_n, \quad m_n^{'} = m_n \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$$

для всех $n \geq 0$. ■

О п р е д е л е н и е 2.2.4 Предсказуемая неубывающая последовательность A в разложении Дуба (2.2.8) называется *компенсатором мартингала X.* ■

Разложение Дуба играет основную роль при изучении свойств квадратично интегрируемых мартингалов, то есть мартингалов $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, для которых $\mathbf{M}\{X_n^2\} < \infty$ при $n \geq 0$. Тогда последовательность $X^2 = (X_n^2, \mathcal{F}_n)$ - субмартингал и по Теореме 2.2.2 существуют мартингал $m = (m_n, \mathcal{F}_n)$ и предсказуемая неубывающая последовательность $< X >= (< X >_n, \mathcal{F}_{n-1})$ такие, что

$$X_n^2 = m_n + < X >_n . \tag{2.2.10}$$

О п р е д е л е н и е 2.2.5 Последовательность $< X >$ называется *предсказуемой квадратичной вариацией* или *квадратичной характеристикой* мартингала X. ■

Из формул (2.2.9) следует, что

$$< X >_n = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{M}\{(X_j - X_{j-1})^2|\mathcal{F}_{j-1}\} = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{M}\{(\Delta X_j)^2|\mathcal{F}_{j-1}\}, \tag{2.2.11}$$

и для всех $l \leq k$

$$\mathbf{M}\{(X_k - X_l)^2|\mathcal{F}_l\} = \mathbf{M}\{X_k^2 - X_l^2|\mathcal{F}_l\} = \mathbf{M}\{< X >_k - < X >_l |\mathcal{F}_l\}. \qquad (2.2.12)$$

Если $X_0 = 0, (\mathbf{P} -$ п.н.) то

$$\mathbf{M}\{X_k^2\} = \mathbf{M}\{< X >_k\}. \qquad (2.2.13)$$

П р и м е р 2.2.10 Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, где $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\}$, а ξ_n, $n \geq 1$ - последовательность независимых случайных величин с $\mathbf{M}\{\xi_n\} = 0$ и $\mathbf{M}\{\xi_n^2\} < \infty$. Тогда стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$- квадратично интегрируемый мартингал с квадратичной характеристикой

$$< X >_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{\xi_i\}. \qquad (2.2.14)$$

Квадратичная характеристика, таким образом, является детерминированной последовательностью.

П р и м е р 2.2.11 Пусть даны две последовательности $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ и $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n)$ - квадратично интегрируемые мартингалы. Положим

$$< X, Y >_n = \frac{1}{4}[< X + Y >_n - < X - Y >_n]. \qquad (2.2.15)$$

Тогда последовательность $(X_n Y_n - < X, Y >_n, \mathcal{F}_n)$ - мартингал. Поэтому

$$\mathbf{M}\{(X_k - X_l)(Y_k - Y_l)|\mathcal{F}_l\} = \mathbf{M}\{< X, Y >_k - < X, Y >_l |\mathcal{F}_l\}.$$

Если, как в предыдущем примере, мартингалы X, Y образованы как суммы независимых случайных величин $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ и $\{\eta_1, ..., \eta_n\}$, соответственно, то

$$< X, Y >_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{cov}\{\xi_i, \eta_i\}.$$

О п р е д е л е н и е 2.2.6 Последовательность $< X, Y > = (< X, Y >_n, \mathcal{F}_{n-1})$, определенная соотношением (2.2.15) называется *вазимной характеристикой* квадратично интегрируемых мартингалов X и Y. ■

Взаимная квадратичная характеристика равна

$$< X, Y >_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\{\Delta X_i \Delta Y_i |\mathcal{F}_{i-1}\}. \qquad (2.2.16)$$

2.2.3 Марковские моменты и сохранение мартингального свойства при случайной замене времени

В задачах теории случайных процессов важное значение играет понятие Марковского момента или момента остановки. Его физическое значение соответствует моменту времени наступления какого-нибудь случайного события, причем определить произошло оно или нет, можно по наблюдениям предыстории случайного процесса.

О п р е д е л е н и е 2.2.7 Случайная величина $\tau = \tau(\omega)$, принимающая значения из множества $\{0, 1, ..., \infty\}$ называется *Марковским моментом* (относительно $(\mathcal{F}_n)$) если для любого $n \geq 0$

$$\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Если $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$, то Марковский момент τ называется *моментом остановки.* ■

Данное определение эквивалентно следующему, для любого $n \geq 0$

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Покажем это. Дейсвительно, пусть τ удовлетворяет определению 2.2.7. Тогда,

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau = k\},$$

однако, каждое из событий $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$. Поэтому, событие $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Обратно, пусть для всех $n \geq 0$ выполнено $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Тогда,

$$\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\tau > n-1\} = \{\tau \leq n\} \cap \overline{\{\tau \leq n-1\}} \in \mathcal{F}_n.$$

Значение случайной последовательности X в случайный момент времени τ определяется как

$$X_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} X_n I\{\omega : \tau = n\}.$$

Здесь $I\{\omega : \tau(\omega) = n\} = 1$, если $\tau(\omega) = n$ и равно нулю в противном случае. В силу определения 2.2.7 такая суперпозиция случайных величин сохраняет свойства измеримости, и следовательно, является случайной величиной. Действительно, для любого $B \in \mathcal{B}$

$$\{\omega : X_\tau \in B\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{X_n \in B, \tau = n\} \in \mathcal{F}.$$

Рассмотрим следующий пример Марковского момента.

П р и м е р 2.2.12 Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$- стохастическая последовательность, множество $B \in \mathcal{B}(R)$, и τ - момент первого попадания в множество B. То есть

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\},$$

при этом, если $X_n \bar{\in} B$ для всех $n \geq 0$, то полагаем $\tau = \infty$. Случайная величина $\tau(\omega)$ - является Марковским моментом, поскольку для любого $n \geq 0$

$$\{\omega : \tau(\omega) = n\} = \{X_0 \bar{\in} B, ..., X_{n-1} \bar{\in} B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n.$$

Множество Марковских моментов является замкнутым относительно простых операций, например, если τ и σ - два Марковских момента относительно потока $\mathcal{F}_n$, то $\tau + \sigma$, $\min(\tau, \sigma) = \tau \wedge \sigma$ и $\max(\tau, \sigma)$ являются Марковскими моментами. Действительно, для любого $n \geq 0$,

$$\{\min(\tau, \sigma) \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n\} \in F_n,$$

$$\{\max(\tau, \sigma) \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\sigma \leq n\} \in F_n,$$

$$\{\tau + \sigma \leq n\} = \bigcup_{\substack{k,\, l \geq 0 \\ k + l \leq n}} \{\tau = k\} \cap \{\sigma = l\} \in F_n.$$

П р и м е р 2.2.13 Пусть τ - некоторый Марковский момент, тогда $\min\{\tau, n\} = \tau \wedge n$ - также Марковский момент и можно определить, так называемый *остановленный* процесс

$$X_{\tau \wedge n} = \begin{cases} X_n, & \text{при} \quad n \leq \tau, \\ \\ X_\tau, & \text{при} \quad n > \tau. \end{cases}$$

Тогда, если стохастическая последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$- мартингал (субмартингал), то и остановленная последовательность $X_{\tau \wedge n} = (X_{\tau \wedge n}, \mathcal{F}_n)$ - также мартингал (субмартингал).

Покажем это. Пусть последовательность $X-$ субмартингал. По определению остановленного процесса

$$X_{\tau\wedge(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} X_k I\{\tau = k\} + X_{n+1} I\{\tau \geq n+1\}.$$

Тогда, поскольку случайные величины X_k, $I\{\tau = k\}$, $k = 0, ..., n$ и $I\{\tau \geq n+1\} = I\{\overline{\{\tau \leq n\}}\}$ - $\mathcal{F}_n$ измеримы, то в силу субмартингального свойства

$$\mathbf{M}\{X_{\tau\wedge(n+1)}|\mathcal{F}_n\} = \sum_{k=0}^{n} X_k I\{\tau = k\} + \mathbf{M}\{X_{n+1}|\mathcal{F}_n\} I\{\tau \geq n+1\} \geq$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} X_k I\{\tau = k\} + X_n I\{\tau = n\} + X_n I\{\tau \geq n+1\} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k I\{\tau = k\} + X_n I\{\tau \geq n\} = X_n.$$

Если рассматривать σ - алгебру $\mathcal{F}_n$ как множество событий, происходящих до момента времени n, то по аналогии можно рассматривать и множество событий $\mathcal{F}_\tau$, происходящих до случайного момента времени τ.

О п р е д е л е н и е 2.2.8 Это множество событий определяется как

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \geq 0\}.$$

■

Множество $\mathcal{F}_\tau$ содержит Ω и $\emptyset$, замкнуто относительно операций счетного объединения и счетного пересечения, а кроме того, если $A \in \mathcal{F}_\tau$, то для любого n $\bar{A} \cap \{\tau = n\} = \{\tau = n\} \setminus (A \cap \{\tau = n\}) \in \mathcal{F}_n$, и следовательно, $\bar{A} \in \mathcal{F}_\tau$. Таким образом, $\mathcal{F}_\tau$ - σ - алгебра.

П р и м е р 2.2.14 Случайные величины τ и X_τ измеримы относительно $\sigma-$ алгебры $\mathcal{F}_\tau$. Покажем, что τ измерима относительно $\mathcal{F}_\tau$. Действительно, для произвольного $n \geq 0$ рассмотрим событие $A = \{\tau = n\}$. Проверим, что это событие $A \in \mathcal{F}_\tau$. По определению для любого $m \geq 0$ должно иметь место включение

$$A \cap \{\tau = m\} = \{\tau = n\} \cap \{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m.$$

Однако,

$$\{\tau = n\} \cap \{\tau = m\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}_m, & \text{если} \quad m \neq n, \\ \{\tau = n\} = \{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m, & \text{если} \quad m = n. \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения для случайной величины X_τ показывают, что событие $A = \{X_\tau \in B\}$, для любого $B \in \mathcal{B}(R)$, удовлетворяет включению

$$A \cap \{\tau = m\} = \{X_\tau \in B\} \cap \{\tau = m\} = \{X_m \in B\} \in \mathcal{F}_m,$$

что и означает измеримость X_τ относительно $\mathcal{F}_\tau$.

Если рассматриваются детерминированные моменты времени $m < n$, то в силу определения потока $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$, выполняется включение $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$. Оказывается, что данное свойство остается справедливым, если заменить детерминированные моменты времени на случайные Марковские моменты.

П р и м е р 2.2.15 Пусть τ, σ - Марковские моменты относительно $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$. Пусть $\mathbf{P}\{\tau \leq \sigma\} = 1$, тогда $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$.

Для доказательства этого утверждения возьмем некоторое событие $A \in \mathcal{F}_\tau$ и покажем, что $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Рассмотрим событие

$$A \cap \{\sigma = m\} = A \cap \{\sigma = m\} \cap \{\tau \leq \sigma\}.$$

Это равенство имеет место с точностью до множества нулевой меры, поскольку событие $\{\tau \le \sigma\} = \Omega$ с точностью до множества меры нуль, а все σ - алгебры пополнены множествами нулевой меры. Далее

$$A \cap \{\sigma = m\} \cap \{\tau \le \sigma\} = A \cap \{\tau = m\} = \bigcup_{k=0}^{m} A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_m.$$

Следовательно, для любого $m \ge 0$,

$$A \cap \{\sigma = m\} \in \mathcal{F}_m,$$

что и означает, что $A \in \mathcal{F}_\sigma$.

Если $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ образует мартингал или субмартингал, то по свойствам условного математического ожидания для мартингала

$$\mathbf{M}\{X_n\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{X_n|\mathcal{F}_0\}\} = \mathbf{M}\{X_0\},$$

и для субмартингала

$$\mathbf{M}\{X_n\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{X_n|\mathcal{F}_0\}\} \ge \mathbf{M}\{X_0\}.$$

Это свойство может, однако, нарушаться если заменить детерминированный момент времени на некоторый случайный момент времени τ.

П р и м е р 2.2.16 Рассмотрим пример 2.2.8, в котором игрок использует следующую стратегию игры, выбирая величину ставки V_n по правилу:

$$V_n = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если} \quad \eta_1 = \eta_2 = ... = \eta_{n-1} = -1 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это означает, что он удваивает ставки, начиная со ставки $V_1 = 1$, и прекращает игру после первого выигрыша. Если $\eta_1 = \eta_2 = ... = \eta_n = -1$, то

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_n V_n = \sum_{k=1}^{n} (-2^{k-1}) = -(2^n - 1).$$

Однако, если $\eta_{n+1} = 1$, то

$$X_{n+1} = X_n + V_{n+1} = -(2^n - 1) + 2^n = 1.$$

Пусть $\tau = \inf\{n : X_n = 1\}$. Если $p = q = 1/2$, то $\mathbf{P}\{\tau = n\} = (1/2)^n$, поэтому

$$\mathbf{M}\{\tau\} = \sum_{n=1}^{\infty} n(1/2)^n = 2 < \infty,$$

и следовательно, $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$. Далее, $\mathbf{P}\{X_\tau = 1\} = 1$, поэтому $\mathbf{M}\{X_\tau\} = 1 \ne \mathbf{M}\{X_0\} = 0$.

Таким образом в данном примере мартингальное свойство нарушается при замене детерминированного момента времени на случайный. Причина в том, что такая стратегия игры в действительности не реализуема, так как игра может продолжаться бесконечно долго и текущее значение проигрыша может быть сколь угодно большим.

Следующая теорема показывает, что в "нормальных" ситуациях мартингальное свойство сохраняется.

Т е о р е м а 2.2.3 *Пусть $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$- мартингал (субмартингал) и τ, σ - моменты остановки, для которых $\tau, \sigma \le N < \infty$. Если $\mathbf{P}\{\tau \le \sigma\} = 1$, то*

$$\mathbf{M}\{X_\sigma|\mathcal{F}_\tau\} = X_\tau \quad (\ge X_\tau \quad \textit{для субмартингала}),$$

если τ, σ - произвольные ограниченные моменты остановки, то

$$\mathbf{M}\{X_\sigma|\mathcal{F}_\tau\} = X_{\tau\wedge\sigma} \quad (\ge X_{\tau\wedge\sigma} \quad \textit{для субмартингала}).$$

Если $\mathbf{P}\{\tau \le \sigma\} = 1$, то

$$\mathbf{M}\{X_\tau\} = \mathbf{M}\{X_\sigma\} \quad (\le \mathbf{M}\{X_\sigma\} \quad \textit{для субмартингала}).$$

Для мартингалов, рассматриваемых на бесконечом интервале времени, свойство "нормальности" характеризуется как равномерная интегрируемость.

О п р е д е л е н и е 2.2.9 *Последовательность случайных величин* X_n равномерно интегрируема если

$$\lim_{C\uparrow\infty}\sup_{n\geq 0}\int\limits_{|X_n|>C}|X_n|d\mathbf{P}=0.$$

■

Т е о р е м а 2.2.4 *Пусть последовательность* $X=(X_n,\mathcal{F}_n)$*образует мартингал и последовательность случайных величин* X_n *является равномерно интегрируемой. Тогда предыдущая Теорема 2.2.3 верна для произвольных (возможно неограниченных) моментов остановки.*

(Доказательство основано на свойстве сходимости равномерно интегрируемого мартингала и приведено ниже см. Пример 2.2.20.)

В примере 2.2.16 условие Теоремы 2.2.4 нарушается. Действительно, последовательность случайных величин X_n не является равномерно интегрируемой, так как случайная величина $|X_n|=2^n-1$ с вероятностью $p=(1/2)^n$, поэтому

$$\sup_{n\geq 0}\int\limits_{|X_n|>C}|X_n|d\mathbf{P}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1.$$

Рассмотрим некоторые примеры использования данной теоремы.

П р и м е р 2.2.17 [Тождества Вальда]. Пусть $\xi_1,\xi_2...$ последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{M}\{|\xi_k|\}<\infty$, и τ - некоторый момент остановки относительно $\mathcal{F}_n^\xi=\sigma\{\xi_1,...,\xi_n\}, \quad \tau\geq 1$ и $\mathbf{M}\tau<\infty$. Тогда

$$\mathbf{M}\{\xi_1+...+\xi_\tau\}=\mathbf{M}\{\xi_1\}\mathbf{M}\{\tau\}. \tag{2.2.17}$$

Если $\mathbf{M}\{\xi_k^2\}<\infty$, то

$$\mathbf{M}\{(\xi_1+...+\xi_\tau)-\tau\mathbf{M}\xi_1\}^2=\mathbf{D}\{\xi_1\}\mathbf{M}\{\tau\}. \tag{2.2.18}$$

Доказать соотношения (2.2.17), (2.2.18).

З а м е ч а н и е Соотношения (2.2.17), (2.2.18) называются *тождествами Вальда.*

Р е ш е н и е Докажем тождество (2.2.17) для математического ожидания. Прежде всего обратим внимание на то, что последовательность

$$X_n=\sum_{k=1}^n\xi_k-n\mathbf{M}\xi_1,$$

есть мартингал относительно $\mathcal{F}_n^\xi$. Рассмотрим ограниченный момент остановки $T=\tau\wedge n$, и воспользуемся теоремой о сохранении мартингального свойства. Тогда

$$\mathbf{M}\{X_T\}=\mathbf{M}\{X_0\}=0,$$

откуда следует, что

$$\mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_k\right\}=\mathbf{M}\{\xi_1\}\mathbf{M}\{\tau\wedge n\}. \tag{2.2.19}$$

Требуемое тождество будет получено, если мы перейдем к пределу при $n\to\infty$. Поскольку

$$\tau\wedge n=\min(\tau,n)\uparrow\tau,\quad (\mathbf{P}-\text{п.н.})$$

и $\mathbf{M}\{\tau\} < \infty$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости правая часть (2.2.19) сходится к $\mathbf{M}\{\tau\}$. Случайная величина под знаком математического ожидания в левой части (2.2.19) также ограничена интегрируемой случайной величиной, действительно,

$$\left|\sum_{k=1}^{\tau\wedge n} \xi_k\right| \le \sum_{k=1}^{\tau\wedge n} |\xi_k| \le \sum_{k=1}^{\tau} |\xi_k|,$$

и поскольку $\tau \wedge n \le n$, то для последовательности

$$S_n = \sum_{k=1}^{\tau\wedge n} |\xi_k| - \mathbf{M}|\xi_k|, \quad S_0 = 0,$$

образующей мартингал, имеем $\mathbf{M}\{S_n\} = \mathbf{M}\{S_0\} = 0$, откуда в силу $\mathbf{M}\{|\xi_k|\} = \mathbf{M}\{|\xi_1|\}$

$$\mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^{\tau\wedge n} |\xi_k|\right\} = \mathbf{M}|\xi_1|\mathbf{M}\{\tau\wedge n\} \le \mathbf{M}|\xi_1|\mathbf{M}\{\tau\}.$$

Последовательность

$$S_n \uparrow \sum_{k=1}^{\tau} |\xi_k|, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$$

поэтому в силу теоремы о монотонном пределеьном переходе под знаком интеграла Лебега

$$\mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^{\tau} |\xi_k|\right\} \le \mathbf{M}|\xi_1|\mathbf{M}\{\tau\}.$$

Таким образом в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости можно перейти к пределу под знаком математического ожидания и в левой части соотношения (2.2.19), и поскольку $\tau\wedge n \uparrow \tau, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$ то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\tau\wedge n} \xi_k = \sum_{k=1}^{\tau} \xi_k, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^{\tau\wedge n} \xi_k\right\} = \mathbf{M}\left\{\sum_{k=1}^{\tau} \xi_k\right\}.$$

Таким образом тождество Вальда для средних значений установлено. Тождество для дисперсий получается аналогичным образом, если рассмотреть мартингал $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n^{\xi})$ с $Y_n = X_n^2 - n\mathbf{D}\{\xi_1\}$. ■

П р и м е р 2.2.18 Применим тождества Вальда к исследованию задачи об игре двух лиц (Примеры 2.2.8, 2.2.16). Предположим, что игроки располагают конечными начальными капиталами A и B, соответственно, ставки фиксированы и равны 1. Если $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k$, то величины капиталов первого и второго игроков после n - го розыгрыша равны

$$X_n = A + S_n, \qquad Y_n = B - S_n.$$

Игра заканчивается если S_n достигает уровня $-A$ или B. В первом случае разоряется первый игрок, во втором - второй. Определим момент окончания игры как момент остановки

$$\tau = \inf\{n \ge 1 : S_n = -A, \quad \text{или} \quad S_n = B\}.$$

Последовательность S_n есть последвательность состояний Марковской цепи, соответствующей модели случайных блужданий, у которой при $p = q = 1/2$ все состояния возвратны. Поэтому за конечное время она достигает любого уровня, поэтому $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$ и $\mathbf{M}\{\tau\} < \infty$ (Задача 2.2.15). Введем $\alpha = \mathbf{P}\{S_\tau = -A\}$ и $\beta = \mathbf{P}\{S_\tau = B\}$, $\alpha + \beta = 1$. Далее при $p = q = 1/2$ мы имеем из (2.2.17)

$$\mathbf{M}\{S_\tau\} = \mathbf{M}\{\tau\}\mathbf{M}\{\eta_1\} = 0 = (-A)\mathbf{P}\{S_\tau = -A\} + B\mathbf{P}\{S_\tau = B\} = \alpha(-A) + \beta B.$$

Разрешив систему уравнений относительно α и β получаем

$$\alpha = \frac{B}{A+B}, \quad \beta = \frac{A}{A+B}.$$

Для оценки среднего времени игры применим тождество (2.2.18), которое дает

$$\mathbf{M}\{S_\tau^2\} = \mathbf{M}\{\tau\}\mathbf{D}\{\eta_1\} = \mathbf{M}\{\tau\} = \alpha A^2 + \beta B^2 = AB.$$

П р и м е р 2.2.19 Рассмотрим предыдущий пример в случае $p \neq q$. Для случайных величин $\xi_k = (q/p)^{\eta_k}$ имеем

$$\mathbf{M}\{\xi_k\} = \frac{q}{p}p + \frac{p}{q}q = 1.$$

Поэтому последовательность

$$X_n = \prod_{k=1}^n \xi_k = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$$

мартингал, причем $\mathbf{M}\{X_0\} = 1$. Если $\mathbf{M}\{\tau\} < \infty$, то можно применить Теорему 2.2.3, что дает соотношение

$$\mathbf{M}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{S_\tau}\right\} = 1 = \alpha\left(\frac{q}{p}\right)^{-A} + \beta\left(\frac{q}{p}\right)^{B},$$

из которого вместе с равенством $\alpha + \beta = 1$

$$\alpha = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{B} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{B} - \left(\frac{q}{p}\right)^{A}}, \quad \beta = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{A}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{B} - \left(\frac{q}{p}\right)^{A}}.$$

Для определения $\mathbf{M}\{\tau\}$ применим тождество (2.2.17), которое дает

$$\mathbf{M}\{\tau\} = \frac{\mathbf{M}S_\tau}{\mathbf{M}\{\eta_1}\} = \frac{\mathbf{M}\{S_\tau\}}{p-q} = \frac{\alpha A + \beta B}{p-q}.$$

Для вычисления $\mathbf{M}\{\tau\}$ нужно подставить соответствующие значения α и β.

З а м е ч а н и е Для корректного применения тождеств Вальда в обоих предыдущих примерах нужно, конечно, вначале убедиться в том, что $\mathbf{M}\{\tau\} < \infty$. Для доказательства конечности математического ожидания τ можно использовать следующее соображение. Рассмотрим последовательность $\tau_n = \tau \wedge n$, поскольку $\tau_n \leq n$, то $\mathbf{M}\{\tau_n\} < \infty$ и применимы тождества Вальда. При этом $|S_{\tau_n}| \leq \max\{|A|, |B|\}$, и следовательно,

$$|\mathbf{M}\{S_{\tau_n}\}| \leq \mathbf{M}\{|S_{\tau_n}|\} \leq C_1 < \infty, \quad \mathbf{M}\{S_{\tau_n}^2\} \leq C_2 < \infty,$$

откуда следует, что в Примере 2.2.18

$$\mathbf{M}\{S_{\tau_n}^2\} = \mathbf{M}\{\tau_n\}, \quad \text{то есть} \quad \mathbf{M}\{\tau_n\} \leq C_2,$$

а в Примере 2.2.19

$$|\mathbf{M}\{S_{\tau_n}\}| = \mathbf{M}\{\tau_n\}|p-q| \quad \text{то есть} \quad \mathbf{M}\{\tau_n\} \leq \frac{C_1}{|p-q|}.$$

Поскольку $\tau_n \uparrow \tau$ и $\mathbf{M}\{\tau_n\} \leq C < \infty$ то в силу теоремы о монотонном предельном переходе подзнаком интеграла Лебега $\mathbf{M}\{\tau\} \leq C < \infty$.

2.2.4 Фундаментальные неравенства для мартингалов

Одним из наиболее важных применений Теоремы о сохранении мартингального свойства при случайной замене времени являются, так называемые *мартингальные неравенства.* По форме они напоминают неравенство Чебышева, однако, их содержание существенно опирается на мартингальные свойства. По сути они означают, что распределение всех элементов последовательности, образующей мартингал или субмартингал, до некоторого номера n в значительной степени определяется распределением последнего элемента. Таким образом определяющее свойство субмартингала, состоящее в том, что он является в среднем возрастающей последовательностью, позволяет определить свойства и оценить важные вероятностные характеристики всей совокупности элементов последовательности по распределению последнего элемента.

Т е о р е м а 2.2.5 *Пусть последовательность* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- субмартингал. Положим*

$$X_n^+ = \max\{X_n, 0\}, \quad и \quad X_n^- = \min\{X_n, 0\}.$$

Тогда для любого $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right\} \le \mathbf{M}\left\{X_n^+ I\left(\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right)\right\} \le \mathbf{M}X_n^+, \tag{2.2.20}$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\min_{k\le n} X_k \le -\lambda\right\} \le \mathbf{M}\left\{X_n I\left(\min_{k\le n} X_k \ge -\lambda\right)\right\} - \mathbf{M}\{X_0\} \le \mathbf{M}\{X_n^+\} - \mathbf{M}\{X_0\}, \tag{2.2.21}$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} |X_k| \ge \lambda\right\} \le 3\max_{k\le n}\mathbf{M}\{|X_k|\}. \tag{2.2.22}$$

Пусть последовательность $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n)$ *- супермартингал. Тогда для любого* $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} Y_k \ge \lambda\right\} \le \mathbf{M}\{Y_0\} - \mathbf{M}\left\{Y_n I\left(\max_{k\le n} Y_k \le \lambda\right)\right\} \le \mathbf{M}\{Y_0\} + \mathbf{M}\{Y_n^-\}, \tag{2.2.23}$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\min_{k\le n} Y_k \le -\lambda\right\} \le \mathbf{M}\left\{Y_n I\left(\min_{k\le n} Y_k \le -\lambda\right)\right\} \le \mathbf{M}\{Y_n^-\}, \tag{2.2.24}$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} |Y_k| \ge \lambda\right\} \le 3\max_{k\le n}\mathbf{M}\{|Y_k|\}. \tag{2.2.25}$$

Пусть последовательность $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n)$ *- неотрицательный супермартингал. Тогда для любого* $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} Y_k \ge \lambda\right\} \le \mathbf{M}\{Y_0\}, \tag{2.2.26}$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\sup_{k\ge n} Y_k \ge \lambda\right\} \le \mathbf{M}\{Y_n\}. \tag{2.2.27}$$

З а м е ч а н и е Доказательство всех неравенств производится по общей схеме, поэтому покажем в качестве примера вывод неравенства (2.2.20).

Д о к а з а т е л ь с т в о неравенства (2.2.20). Определим момент остановки

$$\tau = \begin{cases} \inf\{k \le n : X_k \ge \lambda\}, \\ \\ n, \quad \text{если} \quad \max\limits_{k\le n} X_k < \lambda. \end{cases}$$

В силу Теоремы о сохранении мартингального свойства для субмартингала X имеем следующую цепочку неравенств

$$\mathbf{M}\{X_n\} \ge \mathbf{M}\{X_\tau\} = \mathbf{M}\left\{X_\tau I\left(\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right)\right\} + \mathbf{M}\left\{X_\tau I\left(\max_{k\le n} X_k < \lambda\right)\right\} \ge$$

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right\} + \mathbf{M}\left\{X_n I\left(\max_{k\le n} X_k < \lambda\right)\right\},$$

откуда

$$\lambda\mathbf{P}\left\{\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right\} \le \mathbf{M}\left\{X_n I\left(\max_{k\le n} X_k \ge \lambda\right)\right\} \le \mathbf{M}\left\{X_n^+ I\left(\max_{k\le n} X_x \ge \lambda\right)\right\} \le \mathbf{M}X_n^+.$$

■

Т е о р е м а 2.2.6 *Пусть последовательность* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- неотрицательный субмартингал. Тогда для любого* $p \ge 1$ *выполняются следующие неравенства:*

если $p > 1$

$$\mathbf{M}\{X_n^p\} \le \mathbf{M}\{\max_{k\le n} X_k^p\} \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{M}\{X_n^p\}, \tag{2.2.28}$$

если $p = 1$

$$\mathbf{M}\{X_n\} \le \mathbf{M}\{\max_{k\le n} X_k\} \le \frac{e}{e-1}\left[1 + \mathbf{M}\{|X_n \ln X_n|\}\right]. \tag{2.2.29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о случай $p > 1$. Вначале предположим, что $\mathbf{M}\{\max_{k\le n} X_n^p\} < \infty$. Обозначим $\xi_n = \max_{k\le n} X_n^p$. Для любой неотрицательной случайной величины ξ и $r > 1$ справедливо соотношение (Задача 2.2.20)

$$\mathbf{M}\{\xi^r\} = r\int_0^\infty t^{r-1}\mathbf{P}(\xi \ge t)dt.$$

Воспользовавшись этим соотношением и неравенством (2.2.20) для оценки вероятности события $\mathbf{P}\{\xi \ge t\}$, получим цепочку неравенств

$$\mathbf{M}\{\xi_n^p\} = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbf{P}(\xi_n \ge t)dt \le p\int_0^\infty t^{p-2}\left(\int_{\{\xi_n \ge t\}} X_n d\mathbf{P}\right)dt =$$

$$p\int_0^\infty t^{p-2}\left[\int_\Omega X_n I\{\xi_n \ge t\}d\mathbf{P}\right]dt = p\int_\Omega X_n\left[\int_0^{\xi_n} t^{p-2}dt\right]d\mathbf{P} = \frac{p}{p-1}\mathbf{M}\left\{X_n(\xi_n)^{p-1}\right\}.$$

(Изменение порядка интегрирования возможно в силу неорицательности подинтеральных величин по теореме Фубини.) В силу неравенства Гельдера

$$\mathbf{M}\{X_n(\xi_n)^{p-1}\} \le (\mathbf{M}\{X_n^p\})^{1/p}(\mathbf{M}\{\xi_n^{(p-1)q}\})^{1/q},$$

где $q = \dfrac{p}{p-1}$. Поэтому, подставляя это соотношение в неравенство для $\mathbf{M}\{\xi_n^p\}$, получаем

$$(\mathbf{M}\{\xi_n^p\})^{1/p} \le \frac{p}{p-1}(\mathbf{M}\{X_n^p\})^{1/p}.$$

Возводя последнее неравенство в степень p, получаем результат теоремы.

Если условие $\mathbf{M}\{\xi^p\} < \infty$ не задано, то можно рассмотреть случайную величину $\xi_n \wedge L$, где $L > 0$ - некоторая положительная постоянная. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения для этой случайной величины, имеем неравенство

$$\mathbf{M}\{(\xi_n \wedge L)^p\} \le \frac{p}{p-1}\mathbf{M}\{X^p\},$$

и переходя к пределу при $L \uparrow \infty$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\mathbf{M}\{\xi_n^p\} = \lim_{L\uparrow\infty}\mathbf{M}\{(\xi_n \wedge L)^p\} \le \frac{p}{p-1}\mathbf{M}\{X^p\}.$$

■

Следующая теорема является простым следствием первых двух. Действительно, если последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ - мартингал, то последовательность $|X|^p = (|X_n|^p, \mathcal{F}_n)$ - неотрицательный субмартингал при $p \geq 1$, если $\mathbf{M}\{|X_n|^p\} < \infty$, и к ней применимы предыдущие результаты.

Т е о р е м а 2.2.7 *Пусть последовательность* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- мартингал,* $\lambda > 0$ *и* $p \geq 1$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k\leq n}|X_k| \geq \lambda\right\} \leq \frac{\mathbf{M}\{|X_n|^p\}}{\lambda^p}, \tag{2.2.30}$$

если $p > 1$

$$\mathbf{M}\{|X_n|^p\} \leq \mathbf{M}\{\max_{k\leq n}|X_k|^p\} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{M}\{|X_n|^p\}, \tag{2.2.31}$$

в частности, если $p = 2$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k\leq n}|X_k| \geq \lambda\right\} \leq \frac{\mathbf{M}\{|X_n|^2\}}{\lambda^2}, \tag{2.2.32}$$

$$\mathbf{M}\{\max_{k\leq n}|X_k|^2\} \leq 4\mathbf{M}\{X_n^2\}, \tag{2.2.33}$$

З а м е ч а н и е Следующая теорема характеризует "число пересечений" некоторого отрезка $[a, b]$ случайной последовательностью $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$, образующей субмартингал. Почему важна эта характеристика? Если некоторая последовательность ξ_n сходится ($\mathbf{P}$- п.н.), то для любого отрезка $[a, b]$ элементы последовательности либо остаются в нем после некоторого N, либо выходят из него, либо локализуются около одной из его границ. В любом случае для сходящейся последовательности число пересечений любого отрезка является конечным ($\mathbf{P}$- п.н.). Тоерема, принадлежащая Дубу, дает оценку среднего значения числа пересечений ограниченным субмартингалом. Оказывается, что для любых $a, b, \quad a < b$ число песечений конечно с вероятностью 1, отсюда следует сходимость этого субмартингала ($\mathbf{P}$- п.н.).

О п р е д е л е н и е 2.2.10 Пусть заданы a, b, $a < b$. Определим последовательность случайных времен

$$\tau_0 = 0,$$

$$\tau_1 = \inf\{n > \tau_0 : X_n \leq a\},$$

$$\tau_2 = \inf\{n > \tau_1 : X_n \geq b\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tau_{2m-1} = \inf\{n > \tau_{2m-2} : X_n \leq a\},$$

$$\tau_{2m} = \inf\{n > \tau_{2m-1} : X_n \geq b\},$$

полагая $\tau_k = \infty$, если соответствующее множество, по которому берется инфинимум пусто. Для каждого $n \geq 1$ определим случайную величину

$$\beta_n(a,b) = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad \tau_2 > n, \\ \\ \max\{m : \tau_{2m} \leq n\}, \quad \text{если} \quad \tau_2 \leq n. \end{cases}$$

Случайная величина $\beta_n(a, b)$ - есть *число пересечений отрезка* $[a, b]$ *последовательностью* $\{X_k, k = 1, ..., n\}$ *снизу вверх.* ■

Т е о р е м а 2.2.8 *Пусть* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- субмартингал. Тогда для любого* $n \geq 1$

$$\mathbf{M}\{\beta_n(a, b)\} \leq \frac{\mathbf{M}\{[X_n - a]^+\}}{b - a}. \tag{2.2.34}$$

2.2.5 Сходимость субмартингалов и мартингалов

Из неравенства Дуба для числа пересечений следует теорема о сходимости субмартингала. Эта теорема является аналогом теоремы классического анализа о сходимости неубывающей ограниченной последовательности. Действительно, субмартингал является аналогом неубывающей последовательности, поскольку является неубывающим в вероятностном смысле (в смысле условного среднего), однако, этого оказывается достаточно, чтобы установить его сходимость почти наверное.

Т е о р е м а 2.2.9 *Пусть* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- субмартингал с*

$$\sup_n \mathbf{M}\{[X_n]^+\} < \infty.$$

Тогда ($\mathbf{P}$*- п.н.) существует* $\lim_n X_n = X_\infty$ *и* $\mathbf{M}\{[X_\infty]^+\} < \infty$.

Если

$$\sup_n \mathbf{M}\{|X_n|\} < \infty,$$

то условие теоремы выполняется и ($\mathbf{P}$- п.н.) существует $\lim_n X_n = X_\infty$ и $\mathbf{M}\{|X_\infty|\} < \infty$.

Непосредственное применение данной теоремы позволяет сформулировать ряд простых следствий для неположительных мартингалов и субмартиингалов, поскольку для них $[X_n]^+ = 0$.

Т е о р е м а 2.2.10 *Если* X *- неположительный субмартингал, (*$\mathbf{P}$*- п.н.) существует ограниченный предел* $\lim X_n$.

Если $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- неположительный субмартингал, то расширенная последовательность* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *с* $1 \le n \le \infty$*, где* $X_\infty = \lim X_n$*, и* $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left\{\bigcup \mathcal{F}_n\right\}$ *- неположительный мартингал.*

Данное утверждение означает, что

$$\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_m\} \ge X_m.$$

Если X *- неположительный мартингал, то (*$\mathbf{P}$*- п.н.) существует ограниченный предел* $\lim X_n$.

Следующая теорема относится к важному классу равномерно интегрируемых мартингалов и устанавливает свяь между свойством равномерной интегрируемости (см. Определение 2.2.9), регулярностью (см. Пример 2.2.6) и сходимостью.

Т е о р е м а 2.2.11 *Пусть последовательность* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *образует мартингал, тогда следующие условия эквивалентны:*

а) Последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *является регулярным мартингалом, то есть существует случайная величина* η, $\mathbf{M}\{|\eta|\} < \infty$ *такая, что*

$$X_n = \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_n\};$$

б) Последовательность случайных величин X_n, $n \ge 1$ *является равномерно интегрируемой;*

в) Последовательность X_n *сходится в* L_1 *к некоторой случайной величине* X_∞*, то есть*

$$\lim_n \mathbf{M}\{|X_n - X_\infty|\} = 0;$$

д) $\sup_n \mathbf{M}\{|X_n|\} < \infty$ *и расширенная последовательность* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$*,* $1 \le n \le \infty$*, где*

$$X_\infty = \lim X_n, \qquad \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$$

образует мартингал, то есть, $\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_n\} = X_n$, $(\mathbf{P} - п.н.)$.

С помощью данной теоремы можно установить теперь и теорему о сохранении мартингального свойства при случайной замене времени, сформулированную ранее (см. Теорему 2.2.4).

П р и м е р 2.2.20 [Доказательство Теоремы 2.2.4] Вследствие Теоремы 2.2.11 последовательность $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ образует равномерно интегрируемый мартингал и поэтому ($\mathbf{P}$- п.н.) существует $X_\infty = \lim_n X_n$.

Далее, чтобы определить $\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\}$ нужно показать, что случайная величина X_τ - интегрируема, то есть $\mathbf{M}\{|X_\tau|\} < \infty$. Однако, как следует из свойств Марковских моментов, если $X_n = \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_n)\}$ то $X_\tau = \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\}$. Действительно, воспользуемся равенством

$$\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_n\}I\{\tau = n\} = \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\}I\{\tau = n\},$$

которое означает, что на множестве, где $\tau = n$ условные математические ожидания относительно σ - алгебр $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{F}_\tau$ совпадают. Это свойство справедливо и для любых случайных величин η, $\mathbf{M}\{|\eta|\} < \infty$, то есть

$$\mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_n\}I\{\tau = n\} = \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_\tau\}I\{\tau = n\}$$

и мы его приводим без доказательства.

Далее в силу этого равенства и свойства регулярности имеем

$$\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\}I\{\tau = n\} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_n\}I\{\tau = n\} = \sum_{n=0}^{\infty}X_n I\{\tau = n\} = X_\tau.$$

Таким образом

$$X_\tau = \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\},$$

$$\mathbf{M}\{|X_\tau|\} = \mathbf{M}\{|M\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\}|\} \leq \mathbf{M}\{|X_\infty|\},$$

и следовательно, $\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\}$ определено. Воспользуемся теперь свойством вложенности σ - алгебр: $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$, если $\mathbf{P}\{\sigma \leq \tau\} = 1$ (см. Пример 2.2.15). Тогда

$$\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\tau\}|\mathcal{F}_\sigma\} = \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_\sigma\} = X_\sigma, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

Если условие $\mathbf{P}\{\sigma \leq \tau\} = 1$ не имеет места, то равенство выполнено лишь на множестве $\{\sigma \leq \tau\}$, однако, на множестве $\{\sigma > \tau\}$

$$\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\} = X_\tau,$$

поэтому в общем случае мы имеем соотношение

$$\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\} = X_{\tau\wedge\sigma}. \tag{2.2.35}$$

Обобщение теоремы о случайной замене времени для субмартингалов имеет следующий вид.

Т е о р е м а 2.2.12 *Пусть субмартингал $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ мажорируется некоторым регулярным мартингалом, то есть для некоторой интегрируемой случайной величины η, $\mathbf{M}\{|\eta|\} < \infty$*

$$X_n \leq \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_n\}.$$

Тогда, если $\mathbf{P}\{\sigma \leq \tau\} = 1$, то

$$\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\} \geq X_\sigma. \tag{2.2.36}$$

Если условие $\mathbf{P}\{\sigma \leq \tau\} = 1$ не имеет места, то в общем случае выполняется соотношение

$$\mathbf{M}\{X_\tau|\mathcal{F}_\sigma\} \geq X_{\tau\wedge\sigma}. \tag{2.2.37}$$

Еще одно полезное свойство также вытекает из свойств регулярных мартингалов.

Т е о р е м а 2.2.13 [Леви] *Пусть* $\eta = \eta(\omega)$ *- интегрируемая случайная величина (*$\mathbf{M}\{|\eta|\} < \infty$*) и* $\{\mathcal{F}_n, n = 1, 2, ..\}$ *- неубывающее семейство* σ *- подалгебр* $\mathcal{F}$*. Тогда при* $n \to \infty$ *(*$\mathbf{P}$*- п.н.)*

$$\mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_n\} \to \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{F}_\infty\},$$

где $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$ *- минимальная* σ *- алгебра, содержащая все* σ *- алгебры* $\mathcal{F}_n$*.*

З а м е ч а н и е Смысл данной теоремы становится прозрачным если вспомнить о том, что операция взятия условного математического ожидания осуществляет проектирование случайной величины на σ - алгебру, относительно которой оно вычисляется (см. свойство 8 и комментарий к экстремальному свойству условного математического ожидания 13). Тогда смысл данной теоремы состоит в том, что результат проектирования некоторого вектора (случайной величины η) на последовательность расширяющихся подпространств (σ - алгебр $\mathcal{F}_n$) сходится к результату проектирования этой случайной величины на предельное подпространство (σ - алгебу $\mathcal{F}_\infty$).

В заключение приведем пример нерегулярного мартингала, еще один нерегулярный мартингал возникал в Примере 2.2.16.

П р и м е р 2.2.21 Пусть $X_n = exp\{S_n - \frac{n}{2}\}$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, и независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_k имеют нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$, и $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\}$. Тогда $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ - мартингал, и

$$\lim_n X_n = \lim_n exp\left\{n\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)\right\} = 0, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}),$$

поскольку в силу усиленного закона больших чисел

$$\frac{S_n}{n} \to 0, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

Следовательно $X_\infty = 0, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, и $X_n \neq \mathbf{M}\{X_\infty|\mathcal{F}_n\} = 0$.

2.2.6 Сходимость и расходимость квадратично - интегрируемых мартингалов

Поведение квадратично - интегрируемого мартингала в значительной степени определяется его квадратической характеристикой (компенсатором).

Обозначим $\{X_n \to\}$ подмножество пространства элементарных исходов, на котором последовательность X_n сходится к некоторому пределу. Для квадратично интегрируемого мартингала $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ обозначим $\{< X >_\infty < \infty\}$ подмножество пространства элементарных исходов, на котором неубывающая последовательность $< X >_n$, образующая его компенсатор, ограничена, и следовательно, сходится к конечному пределу.

Будем также использовать обозначение

$$A \subseteq B, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}),$$

если

$$\mathbf{P}\{I_A \leq I_B\} = 1,$$

то есть событие A содержится в событии B с точностью до множества нулевой вероятности.

Т е о р е м а 2.2.14 *Пусть* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- квадратично интегрируемый мартингал. Тогда имеет место включение*

$$\{< X >_\infty < \infty\} \subseteq \{X_n \to\}, \quad (\mathbf{P} - \textit{п.н.}).$$

(Иными словами сходимость мартингала влечет за собой сходимость его квадратичной характеристики ($\mathbf{P}$*- п.н.).)*

Доказательству этого результата предпошлем следующую лемму.

Л е м м а 2.2.1 *Пусть* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- субмартингал с* $X_0 = 0$ *и*

$$X_n = m_n + A_n$$

его разложение Дуба (см. Теорему 2.2.2.) Тогда, если $X_n \geq 0$, *то* ($\mathbf{P}$- *п.н.)*

$$\{A_\infty < \infty\} \subseteq \{X_n \rightarrow\}. \tag{2.2.38}$$

Доказательство леммы.

Для произвольного $a > 0$ определим Марковский момент

$$\tau_a = \begin{cases} \inf\{n \geq 1 : A_{n+1} > a\}, \\ \\ \infty \quad \text{если} \quad \sup A_n \leq a. \end{cases}$$

Тогда $A_{\tau_a} \leq a$ и поскольку $m_{\tau_a \wedge n}$ также мартингал (см. Пример 2.2.13), то

$$\mathbf{M}\{X_{\tau_a \wedge n}\} = \mathbf{M}\{m_{\tau_a \wedge n}\} + \mathbf{M}\{A_{\tau_a \wedge n}\} = \mathbf{M}\{X_0\} + \mathbf{M}\{A_{\tau_a \wedge n}\} = \mathbf{M}\{A_{\tau_a \wedge n}\} \leq a.$$

Последовательность $Y_n^a = X_{\tau_a \wedge n}$ есть неотрицательный субмартингал с $\sup\limits_n \mathbf{M}\{Y_n^a\} \leq a < \infty$, поэтому Y_n^a - сходится ($\mathbf{P}$- п.н.) и $\{Y_n^a \rightarrow\} = \Omega$, ($\mathbf{P}$- п.н.). Далее поскольку на множестве $\{\tau_a = \infty\}$ выполняется $Y_n^a = X_n$, то

$$\{A_\infty \leq a\} = \{\tau_a = \infty\} = \{Y_n^a \rightarrow\} \bigcap \{\tau_a = \infty\} = \{X_n \rightarrow\} \bigcap \{\tau_a = \infty\} \subseteq \{X_n \rightarrow\}.$$

Поэтому ($\mathbf{P}$- п.н.)

$$\{A_\infty < \infty\} = \bigcup_{a>0} \{A_\infty \leq a\} \subseteq \{X_n \rightarrow\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о [Доказательство теоремы] Рассмотрим два субмартингала $X^2 = (X_n^2, \mathcal{F}_n)$ и $(X+1)^2 = ((X+1)_n^2, \mathcal{F}_n)$. Пусть их разложения Дуба

$$X_n^2 = m_n^{'} + A_n^{'}, \quad (X+1)_n^2 = m_n^{''} + A_n^{''},$$

тогда $A_n^{'} = A_n^{''}$, поскольку

$$A_n^{'} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{\Delta X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{(\Delta X_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}\},$$

и

$$A_n^{''} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{\Delta (X_k + 1)^2 | \mathcal{F}_{k-1}\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{\Delta X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{(\Delta X_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}\}.$$

В силу 2.2.38 ($\mathbf{P}$- п.н.)

$$\{< X >_\infty < \infty\} = \{A_\infty^{'} < \infty\} \subseteq \{X_n^2 \rightarrow\} \bigcap \{(X+1)_n^2 \rightarrow\} = \{X_n \rightarrow\}.$$

■

Следующий результат, который мы приводим без докательства показывает, когда сходимость квадратичной характеристики и сходимость мартингала эквивалентны.

Т е о р е м а 2.2.15 *Если выполнено неравенство* $\mathbf{M} \sup |\Delta X_n|^2 < \infty$, *то* ($\mathbf{P}$- *п.н.)*

$$\{< X >_\infty < \infty\} = \{X_n \rightarrow\}.$$

(Если приращения мартингала равномерно ограничены в среднем, то мартингал и его квадратичная характеристика сходятся и расходятся одновременно ($\mathbf{P}$- *п.н.). Данное условие выполняется если, например,* $|\Delta X_n| \leq C$).

Для квадратично - интегрируемых мартингалов справедлив закон больших чисел.

Т е о р е м а 2.2.16 *Пусть* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ *- квадратично интегрируемый мартингал, и* $< X >= (< X >_n, \mathcal{F}_{n-1})$ *- его квадратичная характеристика. Если* $\mathbf{P}\{< X >_\infty = \infty\} = 1$, *то*

$$\lim_n \frac{X_n}{< X >_n} = 0, \quad (\mathbf{P} - \textit{п.н.}).$$

Следующий пример показывает применение этого результата в задаче оценивания неизвестного параметра.

П р и м е р 2.2.22 Пусть $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$ - последовательность независимых случайных величин, с $\mathbf{M}\xi_i = 0, \quad \mathbf{D}\xi_i = V_i > 0$, и последовательность X_n определена с помощью рекуррентного соотношения

$$X_{n+1} = \theta X_n + \xi_{n+1},$$

где X_0 не зависит от $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$ и θ - неизвестный параметр, $-\infty < \theta < \infty$. Можно рассаматривать X_n как результаты измерений, по которым необходимо построить оценку параметра θ,

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_0, X_1, ..., X_n).$$

Рассмотрим оценку метода наименьших квадратов, которая строится следующим образом, для заданного набора $X_0, ..., X_n$ оценка θ_n выбирается так, чтобы минимизировать сумму нормированных среднеквадратических отклонений, а именно:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(X_{k+1} - \theta X_k)^2}{V_{k+1}} \to \min_\theta .$$

Эта задача на нахождение минимума квадратичной формы

$$\theta^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k^2}{V_{k+1}} - 2\theta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k X_{k+1}}{V_{k+1}} \to \min_\theta$$

имеет решение в виде оценки метода наименьших квадратов

$$\hat{\theta}_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k X_{k+1}}{V_{k+1}}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k^2}{V_{k+1}}}.$$

Эту оценку можно записать в виде

$$\hat{\theta}_n = \theta + \frac{M_n}{< M >_n},$$

где

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k \xi_{k+1}}{V_{k+1}}$$

квадратично интегрируемый матрингал с квадратичной характеристикой

$$< M >_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k^2}{V_{k+1}}.$$

Таким образом, сходимость оценки метода наименьших квадратов к точному значению параметра θ имеет место если

$$\frac{M_n}{< M >_n} \to 0, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}). \tag{2.2.39}$$

Следующие условия являются достаточными для выполнения (2.2.39). Если

$$\sup_n \frac{V_{n+1}}{V_n} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M} \min\left(\frac{\xi_n^2}{V_n}, 1\right) = \infty,$$

то условие (2.2.39) выполняется и $\hat{\theta}_n \to \theta, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi_n^2}{V_n}, 1\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2}{V_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X_n - \theta X_{n-1})_n^2}{V_n} \le$$

$$2\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^2}{V_n} + \theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{n-1}^2}{V_n}\right] \le 2\left[\sup_n \frac{V_{n+1}}{V_n} + \theta^2\right] < M >_{\infty} .$$

Следовательно,

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi_n^2}{V_n}, 1\right) = \infty\right\} \subseteq \{< M >_{\infty} = \infty\}.$$

По теореме Колмогорова о трех рядах расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M} \min\left(\frac{\xi_n^2}{V_n}, 1\right)$$

влечет за собой ($\mathbf{P}$- п.н.) расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{\xi_n^2}{V_n}, 1\right)$. Таким образом, $\mathbf{P}\{< M >_{\infty} = \infty\} = 1$, и по Теореме 2.2.16 выполняется (2.2.39), что влечет за собой сходимость оценки.

2.2.7 Задачи для самостоятельного решения

2.2.1. Пусть ξ и η - независимые и одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{M}|\xi| < \infty$. Показать, что

$$\mathbf{M}\{\xi|\xi + \eta\} = \mathbf{M}\{\eta|\xi + \eta\} = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

У к а з а н и е Воспользоваться определением 2.2.1 и проверить выполнение свойств условного математического ожидания.

2.2.2. Пусть ξ - случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$. Показать, что если $F_\xi(b) - F_\xi(a) > 0$, то

$$\mathbf{M}\{\xi|a < \xi \le b\} = \frac{\int\limits_a^b x F_\xi(x)}{F_\xi(b) - F_\xi(a)}.$$

У к а з а н и е Воспользоваться определением 2.2.1 и проверить выполнение свойств условного математического ожидания.

2.2.3. Вывести из определения условного математического ожидания его свойства:

1. Если $\xi(\omega) = C = const \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = C \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
2. Если $\xi(\omega) \le \eta \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$, то $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} \le \mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
3. $|\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}| \le \mathbf{M}\{|\xi||\mathcal{G}\} \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.})$.
4. Если a, b - заданные константы, ξ, η - интегрируемые случайные величины, то

$$\mathbf{M}\{a\xi + b\eta|\mathcal{G}\} = a\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} + b\mathbf{M}\{\eta|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$

5. Пусть $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ - тривиальная σ - алгебра. Тогда,
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\xi, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
У к а з а н и е Воспользоваться тем, что относительно тривиальной σ алгебры измеримы лишь константы.
6. Пусть случайная величина ξ измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{F}$, тогда $\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}\} = \xi, \quad$ (**P**-п.н.).
7. $\mathbf{M}(\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{F}\}) = \mathbf{M}\xi$.
8. Если $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_1\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
9. Если $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, то
$$\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}|\mathcal{G}_1\} = \mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}_2\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
10. Если случайная величина ξ не зависит от σ - алгебры $\mathcal{G}$, то есть для любого $B \in \mathcal{G}$ случайные величины ξ и I_B - независимы, то
$$\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\} = \mathbf{M}\xi.$$
11. Пусть η измерима относительно σ - алгебры $\mathcal{G}$, и $\mathbf{M}|\xi\eta| < \infty$, тогда
$$\mathbf{M}\{\xi\eta|\mathcal{G}\} = \eta\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
12. **Неравенство Иенсена.** Пусть $g(x)$ - выпуклая вниэ функция такая, что $\mathbf{M}\{|g(x)|\} < \infty$, тогда
$$g[\mathbf{M}\{\xi|\mathcal{G}\}] \leq \mathbf{M}\{[g(\xi)|\mathcal{G}]\}, \quad (\mathbf{P} - \text{п.н.}).$$
У к а з а н и е Воспользоваться тем, что для выпуклой вниз функции $g(x)$ существует такая функция $q(x)$, что для любых x, y справедливо неравенство
$$g(x) \geq g(y) + q(y)(x - y).$$
Если $g(x)$ - дифференцируема, то $q(x) = g^{'}(x)$.

2.2.4. Доказать теорему о нормальной корреляции для гауссовских векторов. См. пример 2.2.3.

У к а з а н и е Рассмотреть случайный вектор
$$\theta = \xi - m_\xi + C(\eta - m_\eta)$$
и выбрать матрицу C таким образом, чтобы $\theta \perp \eta - m_\eta$. Далее как в примере 2.2.3.

2.2.5. Доказать, что последовательность в примере 2.2.3 образует мартингал.

2.2.6. Доказать, что последовательность в примере 2.2.5 образует мартингал.

2.2.7. Доказать, что последовательность в примере 2.2.6 образует мартингал.

2.2.8. Доказать, что последовательность в примере 2.2.7 образует субмартингал.

У к а з а н и е Использовать неравенство Иенсена.

2.2.9. Для квадратично интегрируемого мартингала вывести соотношения (2.2.11) - (2.2.13).

2.2.10. В примере 2.2.10 вывести соотношение (2.2.14) для квадратичной характеристики.

2.2.11. В примере 2.2.11 показать, что последовательность
$$(X_n Y_n - < X, Y >_n, \mathcal{F}_n),$$
где $< X, Y >$ определена соотношением (2.2.15) образует мартингал. Вывести соотношение (2.2.16) для взаимной квадратичной характеристики.

2.2.12. В примере 2.2.13 показать, что "остановленный" мартингал (субмартингал) также является мартингалом (субмартингалом).

2.2.13. Объяснить почему разность Марковских моментов, вообще говоря Марковским моментом не является.

2.2.14. Вывести тождество Вальда для дисперсий (соотношение (2.2.18) в примере 2.2.17).

2.2.15. Показать, что в примерах 2.2.18, 2.2.19 игра всегда заканчивается за конечное время (**P**- п.н.) и математическое ожидание времени окончания игры конечно.

У к а з а н и е Воспользоваться свойствами Марковского процесса случайного блуждания и замечанием после Примера 2.2.19.

2.2.16. Воспользовавшись общей схемой доказательства неравенства (2.2.20) завершить доказательство Теоремы 2.2.5.

2.2.17. Пусть $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_i = 2\} = 1/2$. Показать, что последовательность

$$X = (X_n, \mathcal{F}_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \xi_i, \sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\}\right\}$$

является мартингалом и сходится с вероятностью 1 к конечной случайной величине. Показать также, что при этом последовательность X не является регулярным мартингалом.

У к а з а н и е Показать, что данная последовательность сходится к нулю (**P**- п.н.). Показать, что данная последовательность не яваляется равномерно интегрируемой и воспользоваться Теоремой 2.2.11.

2.2.18. Пусть $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$ - последовательность независимых случайных величин с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_i = -1\} = \frac{1}{2i}, \quad \mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = 1 - \frac{1}{i}.$$

Показать, что последовательность

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

расходится (**P**- п.н.).

У к а з а н и е Показать, что X_n - квадратично интегрируемый мартингал, найти его квадратичную характеристику и воспользоваться Теоремой 2.2.15.

2.2.19. Пусть $\{\xi_1, \xi_2, ...\}$ - последовательность независимых случайных величин с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_i = -1\} = \frac{1}{2i^2}, \quad \mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = 1 - \frac{1}{i^2}.$$

Показать, что последовательность

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

сходится (**P**- п.н.).

У к а з а н и е См. указание к предыдущему примеру.

2.2.20. Показать, что для любой неотрицательной случайной величины ξ и $r > 1$ справедливо соотношение

$$\mathbf{M}\xi^r = r\int\limits_0^\infty t^{r-1}\mathbf{P}(\xi \geq t)dt.$$

У к а з а н и е   Использовать формулу интегрирования по частям и показать, что для любой $L > 0$

$$r\int\limits_0^L t^{r-1}\mathbf{P}(\xi \geq t)dt = L^r\mathbf{P}\{\xi \geq L\} + \int\limits_0^L t^r\,dF(t) = \mathbf{M}\{(\xi \wedge L)^r\},$$

а затем перейти к пределу по $L \uparrow \infty$.

2.2.21. Показать, что случайные моменты времени $\tau_k, k \geq 1$ в Определении 2.2.10 являются Марковскими моментами.