Глава 1.

Основные понятия теории случайных процессов

В данной главе рассматриваются основные характеристики случайных последовательностей и случайных функций: конечномерные законы распределения и моментные характеристики. Во втором разделе главы приводится краткое описание наиболее важных классов случайных процессов и обсуждаются их характерные особенности. Материал данной главы является базовым для более детального изучения случайных процессов в последующих главах.

1.1. Случайные процессы и их вероятностные характеристики

1.1.1. Определение случайного процесса

Случайный процесс является математической моделью для описания случайных явлений, развивающихся во времени. При этом предполагается, что состояние процесса в текущий момент времени $t \in \mathbb{R}^1$ есть векторная или скалярная случайная величина $\xi(t, \omega)$. Пространство элементарных событий (исходов) Ω предполагается измеримым, т. е. на нем определена σ-алгебра его подмножеств $\mathcal{F}$. Кроме того, предполагается, что на измеримом пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ задана вероятностная мера $\mathbf{P}$, т. е. для любого множества $A \in \mathcal{F}$ определена его вероятность $\mathbf{P}\{A\}$. Таким образом, задано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, и понятие случайного процесса определяется следующим образом.

Определение 1.1.1. ***Случайный процесс*** *есть семейство (действительных или комплексных) случайных величин* $\{\xi(t, \omega),\ t \in T\}$, *определенных на* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, *где множество параметров* $T \subseteq \mathbb{R}^1$.

Замечание. Обычно, когда это не приводит к неясности, зависимость $\xi(t, \omega)$ от ω не указывается и случайный процесс обозначается просто $\xi(t)$.

Определение 1.1.2. *Пусть $t_0 \in T$ — фиксированный момент. Случайная величина $\xi_{t_0}(\omega) = \xi(t_0, \omega)$ называется **сечением** случайного процесса в точке $t_0 \in T$.*

Мы далее будем рассматривать два типа случайных процессов.

Определение 1.1.3. *Если переменная t пробегает дискретное множество значений, например, $t \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, то случайный процесс $\xi(t)$ называется **процессом с дискретным временем** или **случайной последовательностью**, а если $t \in \mathbb{R}^1$ или $t \in [a, b]$, где $b \leq \infty$, то случайный процесс называется **процессом с непрерывным временем** или **случайной функцией**.*

Определение 1.1.4. *Процесс называется **действительным** или **вещественным**, если случайные величины $\xi(t, \omega)$ являются действительными для любого $t \in T$, и **комплексным**, если случайные величины $\xi(t, \omega)$ являются комплексными для любого $t \in T$.*

Определение 1.1.5. *При фиксированном $\omega_0 \in \Omega$ неслучайная функция $\xi_{\omega_0}(t) = \xi(t, \omega_0)$, $t \in T$ называется **траекторией**, соответствующей элементарному исходу $\omega_0 \in \Omega$. Траектории называются также **реализациями** или **выборочными функциями** случайного процесса.*

Замечание. Случайный процесс можно трактовать как совокупность сечений (см. определение 1.1.2) или как совокупность (“пучок”) траекторий (см. определение 1.1.5). В различных задачах используются оба эти описания.

Определение 1.1.6. *Случайная функция $\xi(t)$ называется **регулярной**, если ее траектории в каждой точке $t \in T$ непрерывны справа и имеют конечные пределы слева.*

Рассмотрим некоторые примеры, поясняющие введенные определения.

Пример 1.1.1. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ определен следующим образом:

$$\xi(t) = tX, \quad t \in [0, 1],$$

где $X \sim \mathcal{R}[0, 1]$ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$. Описать множество сечений и траекторий случайного процесса $\xi(t)$.

Решение. Случайный процесс $\xi(t)$ является случайной функцией. При фиксированном $t_0 \in [0, 1]$ сечение $\xi_{t_0}(\omega) = t_0 X(\omega)$ является случайной величиной, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0, t_0]$.

Траектории процесса $\xi(t)$, т. е. неслучайные функции $\xi_{\omega_0}(t) = X(\omega_0)\, t$, являются прямыми линиями, выходящими из точки $(0, 0)$ со случайным тангенсом угла наклона, равным $X(\omega_0)$. Случайная функция $\xi(t)$ регулярна, так как все ее траектории непрерывны. ■

Пример 1.1.2. Пусть $t \in [0, \infty)$, а случайная функция $\xi(t)$ задана следующим образом:

$$\xi(t) = U_n \quad \text{при} \quad t \in [n, n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\{U_n,\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ — последовательность конечных случайных величин. Описать траектории случайного процесса $\xi(t)$. Является ли этот процесс регулярным?

Решение. Траектории процесса $\xi(t)$ — кусочно-постоянные функции, испытывающие разрывы в точках $t = n = 0, 1, 2, \ldots$. По определению эти функции непрерывны справа и имеют пределы слева, равные $\lim\limits_{t \uparrow n} \xi_\omega(t) = U_{n-1}(\omega)$ для всякого $\omega \in \Omega$. Поскольку $\mathbf{P}\{|U_{n-1}| < \infty\} = 1$ по условию, то этот случайный процесс является регулярным. ■

1.1.2. Конечномерные распределения случайного процесса

Определение 1.1.7. *Пусть $\{\xi(t),\, t \in T\}$ — действительный случайный процесс и задано некоторое произвольное множество моментов времени $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$. Соответствующая совокупность случайных величин $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$ имеет n-мерную функцию распределения*

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{P}\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\}. \tag{1.1.1}$$

*Совокупность таких функций распределения для различных $n = 1, 2, \ldots$ и всех возможных моментов времени $t_i \in T$ называется **семейством конечномерных распределений случайного процесса** ξ.*

Определение 1.1.8. *Если функция F_ξ допускает представление*

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p_\xi(u_1, \ldots, u_n;\, t_1, \ldots, t_n)\, du_1 \ldots du_n,$$

где $p_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n)$ — некоторая измеримая по Лебегу неотрицательная функция такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(u_1, \ldots, u_n;\, t_1, \ldots, t_n)\, du_1 \ldots du_n = 1,$$

то говорят, что функция распределения имеет плотность. Функция $p_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n)$ *называется* ***n-мерной плотностью распределения процесса*** ξ.

Следующие примеры демонстрируют нахождение конечномерных функций распределения.

Пример 1.1.3. Пусть случайный процесс задан соотношением

$$\xi(t) = \varphi(t)U, \quad t \in [0, 1],$$

где U — некоторая случайная величина с функцией распределения $F_U(x)$, а $\varphi(t) > 0$. Найти семейство конечномерных распределений процесса ξ. Имеет ли n-мерная функция распределения плотность?

Решение. В соответствии с определением 1.1.7

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{P}\{\xi(t_1) \le x_1, \ldots, \xi(t_n) \le x_n\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\varphi(t_1)\, U \le x_1, \ldots, \varphi(t_n)\, U \le x_n\} = \mathbf{P}\left\{U \le \frac{x_1}{\varphi(t_1)}, \ldots, U \le \frac{x_n}{\varphi(t_n)}\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{U \le \min_{i=1,\ldots,n} x_i/\varphi(t_i)\right\} = F_U\left(\min_{i=1,\ldots,n} x_i/\varphi(t_i)\right). \quad (1.1.2)$$

Если функция распределения $F_U(x)$ имеет плотность $p_U(x)$, то существует и плотность одномерного распределения случайного процесса $\xi(t)$, поскольку для $n = 1$ из (1.1.2)

$$F_\xi(x;\, t) = F_U\left(\frac{x}{\varphi(t)}\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\varphi(t)}\, p_U\left(\frac{z}{\varphi(t)}\right) dz,$$

следовательно, $p_\xi(x;\, t) = \dfrac{1}{\varphi(t)}\, p_U\left(\dfrac{x}{\varphi(t)}\right)$.

Однако, при $n \ge 2$ n-мерная функция распределения не имеет плотности. Действительно, в силу определения процесса $\xi(t)$ для любых $t_1, \ldots, t_n$ имеет место соотношение

$$\xi(t_1)/\varphi(t_1) = \ldots = \xi(t_n)/\varphi(t_n),$$

поэтому мера $F_{t_1,\ldots,t_n}(dx_1, \ldots, dx_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, соответствующая функции распределения (1.1.2), сосредоточена на прямой линии

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1/\varphi(t_1) = \ldots = x_n/\varphi(t_n)\},$$

имеющей нулевую лебегову меру. Следовательно, мера $F_{t_1,\dots,t_n}(dx_1,\dots,dx_n)$ сингулярна по отношению к мере Лебега, и поэтому n-мерная плотность не существует, если $n \ge 2$. ■

Пример 1.1.4. Пусть X и Y — независимые случайные величины с функциями распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$. Пусть $\{\xi(t),\, t \ge 0\}$ — случайный процесс, определенный соотношением $\xi(t) = Xt + Y$. Описать траектории данного процесса, найти семейство конечномерных функций распределения.

Решение. Выборочные функции этого процесса представляют собой прямые линии со случайным наклоном и случайным начальным условием при $t = 0$. Одномерная функция распределения процесса $\xi(t)$ при $t > 0$ имеет вид

$$F_\xi(x;\, t) = \mathbf{P}\{Xt + Y \le x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{Xt + Y \le x \mid Y = y\}\, dF_Y(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{Xt + y \le x\}\, dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left\{X \le \frac{x-y}{t}\right\} dF_Y(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X\left(\frac{x-y}{t}\right) dF_Y(y).$$

Если же $t = 0$, то $F_\xi(x;\, t) = F_Y(x)$. Для n-мерной функции распределения аналогично примеру 1.1.3 получаем

$$F_\xi(x_1,\dots,x_n;\, t_1,\dots,t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X\left(\min\left(\frac{x_1-y}{t_1},\dots,\frac{x_n-y}{t_n}\right)\right) dF_Y(y)$$

при $t_1 > 0,\dots,t_n > 0$. ■

Пример 1.1.5. Пусть X, Y — независимые случайные величины, имеющие гауссовское распределение $\mathcal{N}(0; 1/2)$. Случайный процесс определен соотношением $\xi(t) = (X+Y)/t$, $t > 0$. Вычислить $\mathbf{P}\{|\xi(t)| \le 3/t\}$ для произвольного $t > 0$.

Решение. По определению $F_\xi(x;\, t)$ есть функция распределения случайной величины $\xi(t)$. В силу того, что X, Y — гауссовские и независимые, $\xi(t) = (X+Y)/t$ также имеет гауссовское распределение, причем

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\} = \frac{1}{t}(\mathbf{M}\{X\} + \mathbf{M}\{Y\}) = 0, \qquad \mathbf{D}\{\xi(t)\} = \frac{1}{t^2}(\mathbf{D}\{X\} + \mathbf{D}\{Y\}) = \frac{1}{t^2}.$$

Тем самым $\xi(t) \sim \mathcal{N}(0; 1/t^2)$, поэтому $F_\xi(x;\, t) = \Phi(xt)$. Здесь и далее

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du.$$

Функция $\Phi(z)$ называется ***интегралом вероятностей*** или ***функцией Лапласа***. Итак,

$$\mathbf{P}\{|\xi(t)| \le 3/t\} = F_\xi(3/t;\, t) - F_\xi(-3/t;\, t) = \Phi(3) - \Phi(-3) \approx 0{,}997. \quad \blacksquare$$

Рассмотренные примеры относятся к случайным функциям. Приведем примеры нахождения законов распределения случайных последовательностей.

П р и м е р 1.1.6. Пусть случайная последовательность $\{\xi(n), n = 1, 2, \ldots\}$ такова, что ее сечения независимы в совокупности и имеют одинаковую функцию распределения $F(x)$. Найти семейство конечномерных распределений последовательности ξ.

Р е ш е н и е. По определению 1.1.7 с учетом независимости случайных величин $\xi(n)$ имеем

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_k;\, n_1, \ldots, n_k) = \mathbf{P}\{\xi(n_1) \le x_1, \ldots, \xi(n_k) \le x_k\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}\{\xi(n_i) \le x_i\} = \prod_{i=1}^{k} F(x_i).$$

Заметим, что все конечномерные распределения в данном случае выражаются через одномерное распределение $F(x)$. $\blacksquare$

П р и м е р 1.1.7. Случайная последовательность $\{\xi(n),\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ определена рекуррентным соотношением

$$\xi(n) = \alpha\, \xi(n-1) + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad \xi(0) = 0,$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность независимых в совокупности гауссовских случайных величин с параметрами $\mathbf{M}\{\varepsilon_n\} = 0$, $\mathbf{D}\{\varepsilon_n\} = \sigma^2 > 0$. Найти одномерную функцию распределения случайной последовательности ξ.

Р е ш е н и е. Из определения случайной величины $\xi(n)$ находим

$$\xi(n) = \varepsilon_1 \alpha^{n-1} + \ldots + \varepsilon_{n-1}\alpha + \varepsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \alpha^{n-k}.$$

В силу гауссовости и независимости случайных величин $\{\varepsilon_k\}$ случайная величина $\xi(n)$ — гауссовская с параметрами $m_\xi(n) = 0$ и $D_\xi(n)$, где

$$D_\xi(n) = \mathbf{D}\{\xi(n)\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{\varepsilon_k\}\, \alpha^{2(n-k)} = \begin{cases} \sigma^2 \dfrac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}, & \text{если} \quad \alpha^2 \neq 1, \\ \sigma^2 n, & \text{если} \quad \alpha^2 = 1. \end{cases}$$

Поэтому одномерная функция распределения имеет вид

$$F_\xi(x;\, n) = \mathbf{P}\{\xi(n) \le x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\xi(n)}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2D_\xi(n)} du = \varPhi\left(x/\sqrt{D_\xi(n)}\right). \ \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Случайная последовательность, описанная в примере 1.1.6, называется ***дискретным белым шумом***. В дальнейшем эта модель будет часто использоваться для построения более сложных случайных последовательностей. В примере 1.1.7 последовательность $\{\varepsilon_n\}$ является ***дискретным гауссовским белым шумом***.

1.1.3. Теорема Колмогорова

Семейство конечномерных распределений является основной характеристикой случайного процесса, полностью определяющей его свойства. Мы будем говорить, что случайный процесс задан, если задано его семейство конечномерных распределений (1.1.1).

Функции распределения процесса $\xi(t)$ обладают следующими свойствами:

1) $0 \le F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) \le 1$ (условие нормировки);

2) функции $F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n)$ непрерывны справа по переменным x_i;

3) если хотя бы одна из переменных $x_i \to -\infty$, то

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) \to 0;$$

если все переменные $x_i \to +\infty$, то

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) \to 1;$$

4) функции $F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n)$ монотонны в следующем смысле:

$$\Delta_1 \ldots \Delta_n F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) \ge 0,$$