Замечание. Для конечной меры условие (4.1.1), очевидно, выполнено.

Определение 4.1.5. *Множество X вместе с мерой μ, определенной на некоторой σ-алгебре $\mathcal{A}$, называется* ***пространством с мерой*** *и обозначается $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$.*

Всякую σ-алгебру $\mathcal{A}$ можно пополнить множествами вида $A \cup N$, где $A \in \mathcal{A}$, а $N \subset A_0$ для некоторого $A_0 \in \mathcal{A}$, имеющего нулевую меру: $\mu(A_0) = 0$. Нетрудно проверить, что система множеств $\widetilde{\mathcal{A}}$, содержащая множества указанного вида, также является σ-алгеброй. Пространство с мерой $\{X, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu\}$ называется ***полным***.

Определение 4.1.6. *Пусть $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ — полное пространство с мерой. Если некоторое свойство $\mathcal{P}$ выполняется для всех $x \in X_0 \subseteq X$, где $\mu(X \setminus X_0) = 0$, то мы будем говорить, что* ***свойство $\mathcal{P}$ выполнено почти всюду (по мере μ)***.

4.1.3. Способы задания мер

Следующие примеры измеримых пространств являются наиболее важными для теории вероятностей и случайных процессов.

Дискретное измеримое пространство

Пусть множество $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ не более чем счетно, а $\mathcal{A}$ — σ-алгебра всех подмножеств X. Всякая мера μ на ***дискретном измеримом пространстве*** $\{X, \mathcal{A}\}$ задается числами $\mu_n = \mu(\{x_n\}) \geq 0$:

$$\mu(A) = \sum_{n\colon x_n \in A} \mu_n,$$

где $A \in \mathcal{A}$ — любое подмножество X. Мера μ конечна, если

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty.$$

Измеримое пространство $\{\mathbb{R}^1, \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\}$

Пусть $X = \mathbb{R}^1$ — действительная прямая, а $\langle a, b\rangle$ — промежуток, т. е. одно из множеств вида

$$(a, b], \quad [a, b), \quad (a, b), \quad [a, b],$$

где $-\infty \le a \le b \le \infty$. Обозначим через $\mathcal{A}$ систему подмножеств $A \subseteq \mathbb{R}^1$, состоящих из конечных объединений непересекающихся промежутков:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i \rangle\,, \quad n < \infty. \tag{4.1.2}$$

Очевидно, система $\mathcal{A}$ образует алгебру, но не является σ-алгеброй.

Определение 4.1.7. *σ-алгебра, порожденная системой $\mathcal{A}$, обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ и называется* ***борелевской σ-алгеброй*** *множеств действительной прямой, а ее элементы —* ***борелевскими множествами****.*

Аналогично определяется измеримое пространство $\{[a,b], \mathcal{B}([a,b])\}$, где $\mathcal{B}([a,b])$ состоит из множеств $B \subseteq [a,b]$ таких, что $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$. Система $\mathcal{B}([a,b])$ называется ***борелевской σ-алгеброй*** отрезка $[a,b]$.

Определение 4.1.8. ***Мерой Лебега на*** $\mathbb{R}^1$ *называется мера λ, определенная на $\{\mathbb{R}^1, \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\}$, такая, что*

$$\lambda(\langle a, b\rangle) = b - a.$$

для всех $-\infty \le a \le b \le \infty$.

Из теоремы 4.1.2 следует, что мера Лебега на $\mathbb{R}^1$ существует и единственна. Отметим, что мера Лебега на $\mathbb{R}^1$ не является конечной, так как $\lambda(\mathbb{R}^1) = \infty$.

Конечная мера на борелевской σ-алгебре прямой или отрезка может быть задана с помощью ***функции распределения***, которая определяется следующим образом.

Определение 4.1.9. *Функция $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ называется* ***функцией распределения*** *на $\mathbb{R}^1$, если она обладает следующими свойствами:*

1) *$F(x)$ — неубывающая функция;*

2) *$F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) < \infty$;*

3) *$F(x)$ непрерывна справа, т. е. $\lim\limits_{h\to+0} F(x+h) = F(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^1$.*

Замечание. Для функции распределения на отрезке $[a,b]$ свойство 2 принимает вид

$$F(a) = \lim_{x\to a} F(x) = 0, \qquad F(b) = \lim_{x\to b} F(x) < \infty.$$

Теперь с использованием функции распределения $F(x)$ зададим функцию множества μ_0 на промежутках $\langle a, b\rangle$:

$$\mu_0((a,b]) = F(b) - F(a), \qquad \mu_0([a,b]) = F(b) - F(a-),$$
$$\mu_0((a,b)) = F(b-) - F(a), \qquad \mu_0([a,b)) = F(b-) - F(a-),$$

где $F(x-) = \lim\limits_{h\to+0} F(x-h)$. Далее, если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i\rangle$, $n < \infty$, где промежутки $\langle a_i, b_i\rangle$ попарно не пересекаются, то положим

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_0(\langle a_i, b_i\rangle).$$

Тем самым мы задали μ_0 на системе $\mathcal{A}$, состоящей из множеств вида (4.1.2). В силу свойств функции распределения $F(x)$ (см. определение 4.1.9) μ_0 является конечной мерой на алгебре $\mathcal{A}$, поэтому по теореме 4.1.2 может быть продолжена и притом единственным образом до меры μ, заданной на измеримом пространстве $\{\mathbb{R}^1, \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\}$.

З а м е ч а н и я: 1. С каждой конечной мерой μ, заданной на $\{\mathbb{R}^1, \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\}$, можно связать функцию

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Из свойств меры (см. разд. 4.1.2) вытекает, что F_μ является функцией распределения, причем $F_\mu(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F_\mu(x) = \mu(\mathbb{R}^1)$.

2. Между функциями распределения и конечными мерами на $\{\mathbb{R}^1, \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\}$ существует взаимно однозначное соответствие, т. е. всякой конечной мере μ соответствует функция распределения $F_\mu(x)$, и наоборот, для всякой функции распределения $F(x)$ на $\mathbb{R}^1$ существует конечная мера μ такая, что $F_\mu \equiv F$.

Измеримое пространство $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$

Пространство $\mathbb{R}^n$ есть прямое произведение n экземпляров прямых $\mathbb{R}^1$, т. е. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \ldots \times \mathbb{R}^1$ — множество упорядоченных наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)^*$. Определим на этом пространстве систему подмножеств $\mathcal{A}^n$, образованную множествами

$$A = A_1 \times \ldots \times A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k, \quad A_k \in \mathcal{A},$$

где $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств прямой вида (4.1.2). Нетрудно показать, что $\mathcal{A}^n$ образует алгебру.

Определение 4.1.10. *σ-алгебра, порожденная системой $\mathcal{A}^n$, обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и называется* ***борелевской σ-алгеброй*** *множеств $\mathbb{R}^n$, а ее элементы —* ***борелевскими множествами****.*

Определение 4.1.11. ***Мерой Лебега на*** *$\mathbb{R}^n$ называется мера λ^n, определенная на $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$, такая, что*

$$\lambda^n\left(\prod_{i=1}^{n}\langle a_i, b_i\rangle\right) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

для всех $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty$.

Из теоремы 4.1.2 следует, что мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ существует и единственна. Отметим, что мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ не является конечной, так как $\lambda^n(\mathbb{R}^n) = \infty$.

Конечная мера на борелевской σ-алгебре $\mathbb{R}^n$ может быть задана с помощью ***n-мерной функции распределения***, которая определяется следующим образом.

Определение 4.1.12. *Функция $F(x_1, \ldots, x_n)$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^1$ называется* ***n-мерной функцией распределения****, если она обладает следующими свойствами:*

1) *$F(x_1, \ldots, x_n)$ монотонна в следующем смысле:*

$$\Delta_1 \ldots \Delta_n F(x_1, \ldots, x_n) \geq 0;$$

где Δ_i — оператор конечной разности по переменной x_i:

$$\Delta_i F = F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

а $h_1 \geq 0, \ldots, h_n \geq 0$ произвольны;

2) *если хотя бы одна из переменных $x_i \to -\infty$, то*

$$F(x_1, \ldots, x_n) \to 0;$$

если все переменные $x_i \to +\infty$, то

$$F(x_1, \ldots, x_n) \to F(+\infty, \ldots, +\infty) < \infty;$$

3) *$F(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна справа по переменным x_i.*

Из теоремы 4.1.2 и свойств n-мерной функции распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$ (см. определение 4.1.12) следует, что на измеримом пространстве $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ существует однозначно определенная конечная мера μ такая, что $F_\mu \equiv F$, где

$$F_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \mu\left(\prod_{i=1}^{n}(-\infty, x_i]\right), \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^1. \tag{4.1.3}$$

Верно и обратное, если μ — конечная мера на $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$, то функция $F_\mu(x_1, \ldots, x_n)$, определяемая соотношением (4.1.3), является n-мерной функцией распределения. Тем самым между n-мерными функциями распределения и конечными мерами на $\{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ существует взаимно однозначное соответствие. В этом случае $F_\mu(+\infty, \ldots, +\infty) = \mu(\mathbb{R}^n)$.

4.1.4. Измеримые функции

Пусть $\{X, \mathcal{A}\}$ — некоторое измеримое пространство.

Определение 4.1.13. *Вещественная функция $f(x)$, $x \in X$ называется **$\mathcal{A}$-измеримой**, если*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1), \tag{4.1.4}$$

*где $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ — **прообраз** множества B.*

Тем самым измеримость функции означает то, что прообраз любого борелевского подмножества $\mathbb{R}^1$ является измеримым множеством в X.

Замечания: 1. Постоянная функция $f(x) \equiv \mathrm{const}$ очевидно является измеримой относительно любой σ-алгебры.

2. Индикаторная функция $I_A(x)$ множества A, определяемая как

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \in A, \\ 0, & \text{при} \quad x \notin A, \end{cases}$$

является измеримой в том и только том случае, когда множество A измеримо, т. е. $A \in \mathcal{A}$.

3. Условие $\mathcal{A}$-измеримости функции $f(x)$ тем ограничительнее, чем уже σ-алгебра $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}$-измеримая $f(x)$ является $\mathcal{A}'$-измеримой, если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.

Для проверки измеримости функции используется следующий результат.

Теорема 4.1.3. *Функция $f(x)$, заданная на измеримом пространстве $\{X, \mathcal{A}\}$, является $\mathcal{A}$-измеримой, если для всякого $c \in \mathbb{R}^1$ измеримыми являются множества*

$$\{x \in X : f(x) \leq c\}.$$

Функция $\varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}^1$, заданная на действительной прямой, называется ***борелевской функцией***, если она $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$-измерима. Примерами борелевских функций являются все кусочно-непрерывные функции.

Теорема 4.1.4. *Пусть $\{X, \mathcal{A}\}$ — измеримое пространство. Сложная функция $h(x) = \varphi(f(x))$, $x \in X$, является $\mathcal{A}$-измеримой, если функция $f(x)$, $x \in X$, $\mathcal{A}$-измерима, а функция $\varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}^1$ является борелевской.*

Простые арифметические операции над конечным или счетным набором измеримых функций не выводят за рамки множества измеримых функций.

Теорема 4.1.5. *Пусть функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$ определены на измеримом пространстве $\{X, \mathcal{A}\}$ и $\mathcal{A}$-измеримы. Тогда функции*

$$f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(x) f_2(x), \quad 1/f_1(x) \text{ (при условии } f_1(x) \neq 0),$$

$$|f_1(x)|, \quad \max\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad \min\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad \sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x)$$

также являются измеримыми.

Из приведенного результата следует, что множество

$$A = \{x \in X : \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x)\},$$

на котором существует предел последовательности измеримых функций $\{f_n(x)\}$, является измеримым, т. е. $A \in \mathcal{A}$.

Следующее определение описывает важный пример измеримой функции.

Определение 4.1.14. *Измеримая функция $f(x)$, определенная на измеримом пространстве $\{X, \mathcal{A}\}$, называется **простой**, если она принимает конечное число значений.*

Очевидно, что каждая простая измеримая функция $f(x)$ допускает представление

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k I_{A_k}(x), \quad x \in X, \tag{4.1.5}$$

где $c_k \in \mathbb{R}^1$, $A_k \in \mathcal{A}$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $m < \infty$.

Т е о р е м а 4.1.6. *Для всякой неотрицательной измеримой функции $f(x)$ существует неубывающая последовательность неотрицательных простых измеримых функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся к $f(x)$, т. е.*

$$0 \le f_n(x) \uparrow f(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Результат, приведенный выше, является ключевым при построении интеграла Лебега.

О п р е д е л е н и е 4.1.15. *Пусть $f(x)$ — некоторая измеримая функция, определенная на измеримом пространстве $\{X, \mathcal{A}\}$. Система*

$$\mathcal{A}_f = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\}$$

называется ***σ-алгеброй, порожденной функцией*** *$f(x)$.*

Нетрудно убедиться, что $\mathcal{A}_f$ действительно является σ-алгеброй, причем $\mathcal{A}_f \subseteq \mathcal{A}$. Класс функций, измеримых относительно σ-алгебры $\mathcal{A}_f$, имеет простое описание.

Т е о р е м а 4.1.7. *Функция $g(x)$, $x \in X$ является $\mathcal{A}_f$-измеримой тогда и только тогда, когда существует борелевская функция $\varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}^1$ такая, что*

$$g(x) = \varphi(f(x)) \quad \forall x \in X.$$

О п р е д е л е н и е 4.1.16. *Две измеримые функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$, называются* ***эквивалентными****, если $f(x) = g(x)$ почти всюду по мере μ, т. е. $\mu\{x \in X : f(x) \ne g(x)\} = 0$.*

О п р е д е л е н и е 4.1.17. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых функций, определенных на $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$, называется* ***сходящейся почти всюду*** *к функции $f(x)$, если*

$$\mu\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ne f(x)\} = 0.$$

Т е о р е м а 4.1.8. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых функций сходится к $f(x)$ почти всюду, то $f(x)$ измерима.*

О п р е д е л е н и е 4.1.18. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых функций, определенных на $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$, называется* ***сходящейся по мере*** *μ к измеримой функции $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

Соотношение между этими двумя типами сходимости определяется следующими теоремами.

Теорема 4.1.9. *Если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *почти всюду относительно конечной меры* μ, *то* $f_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *по мере* μ.

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно, тем не менее, справедлив следующий результат.

Теорема 4.1.10. *Если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *по мере, то существует подпоследовательность* $\{f_{n_k}(x)\}$, *сходящаяся к* $f(x)$ *почти всюду.*

4.1.5. Интеграл Лебега

Пусть $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ — полное пространство с мерой. Определим вначале интеграл Лебега от простой измеримой функции.

Определение 4.1.19. ***Интеграл Лебега от простой измеримой функции*** $f(x)$, *имеющей вид* (4.1.5), *определяется равенством*

$$\int\limits_X f(x)\,\mu(dx) = \sum_k c_k \mu(A_k). \tag{4.1.6}$$

Теперь распространим понятие интеграла Лебега на неотрицательную измеримую функцию $f(x)$. В силу теоремы 4.1.6 существует последовательность неотрицательных простых измеримых функций $\{f_n(x)\}$ таких, что

$$0 \le f_n(x) \uparrow f(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{4.1.7}$$

Определение 4.1.20. ***Интегралом Лебега от неотрицательной измеримой функции*** $f(x)$ *называется величина*

$$\int\limits_X f(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mu(dx). \tag{4.1.8}$$

Данное определение корректно, поскольку при заданной функции $f(x)$ предел (4.1.8) (конечный или бесконечный) существует для любой аппроксимирующей последовательности (4.1.7) и не зависит от ее выбора.

Для краткости будем обозначать

$$I(f) = \int\limits_X f(x)\,\mu(dx).$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная измеримая функция. Обозначим

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Тогда функции $f^+(x) \geq 0$, $f^-(x) \geq 0$ измеримы и $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Определение 4.1.21. *Если* $\min\{I(f^+), I(f^-)\} < \infty$, *то* ***интеграл Лебега от*** $f(x)$ ***существует*** *(или* ***определен****) и имеет вид*

$$I(f) = \int\limits_X f(x)\,\mu(dx) = I(f^+) - I(f^-).$$

Если $|I(f)| < \infty$, *то* $f(x)$ *называется* ***интегрируемой по мере*** μ *или* ***суммируемой****.*

Интеграл по множеству $A \in \mathcal{A}$ *определяется как*

$$\int\limits_A f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_X f(x) I_A(x)\,\mu(dx),$$

а $f(x)$ *называется* ***интегрируемой на множестве*** A, *если интегрируема функция* $f(x)I_A(x)$.

Замечание. В соответствии с определением 4.1.21 интеграл Лебега от неотрицательной функции $f(x)$ определен всегда, при этом $0 \leq I(f) \leq \infty$.

Перечислим свойства интеграла Лебега, непосредственно вытекающие из его определения.

1. $\int\limits_X I_A(x)\,\mu(dx) = \mu(A)$ для всякого $A \in \mathcal{A}$.

2. Для всех α, $\beta \in \mathbb{R}^1$

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g),$$

причем если правая часть имеет смысл, то интеграл в левой части определен.

3. Если $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы и $f(x) \leq g(x)$, то $I(f) \leq I(g)$.

4. Если $\mu(A) = 0$, то $\int\limits_A f(x)\,\mu(dx) = 0$.

5. Если $f(x) = g(x)$ почти всюду по мере μ, то $I(f) = I(g)$, причем оба интеграла существуют или не существуют одновременно.

6. Если $h(x) \geq 0$ интегрируема и $|f(x)| \leq h(x)$ почти всюду по мере μ, то $f(x)$ интегрируема.

7. Интегралы $I(f)$ и $I(|f|)$ существуют или не существуют одновременно, при этом интегрируемость функции равносильна интегрируемости ее модуля, т. е.

$$|I(f)| < \infty \iff I(|f|) < \infty,$$

кроме того, $|I(f)| \leq I(|f|)$.

8. Если $f(x) \geq 0$ и $I(f) = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду. В частности, если $I(|f|) = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду.

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на A, то она интегрируема на любом измеримом множестве $A' \subseteq A$.

10. Если $f(x) = 0$ почти всюду, то $I(f) = 0$.

11. (Неравенство Чебышева). Если $c > 0$, то

$$\mu\{x \in X : |f(x)| \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int\limits_X |f(x)|\, \mu(dx).$$

12. (Неравенство Минковского). Если $p \geq 1$, то

$$\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p\, \mu(dx) \right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, \mu(dx) \right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\, \mu(dx) \right)^{1/p}.$$

13. (Неравенство Иенсена). Если $\varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}^1$ выпукла и $\mu(X) = 1$, то

$$\int\limits_X \varphi(f(x))\, \mu(dx) \leq \varphi\left(\int\limits_X f(x)\, \mu(dx) \right).$$

14. (Неравенство Гельдера). Если $1 < p$, $q < \infty$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то

$$\left| \int\limits_X f(x) g(x)\, \mu(dx) \right| \leq \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, \mu(dx) \right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_X |g(x)|^q\, \mu(dx) \right)^{1/q},$$

причем интеграл в левой части определен, если интегралы в правой части конечны. При $p = q = 2$ неравенство Гельдера называется ***неравенством Коши–Буняковского***:

$$\left| \int_X f(x)g(x)\mu(dx) \right|^2 \le \int_X |f(x)|^2 \mu(dx) \int_X |g(x)|^2 \mu(dx).$$

Теорема 4.1.11 (σ-аддитивность интеграла Лебега). *Пусть функция $f(x)$ интегрируема. Если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \ne j$, то*

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\,\mu(dx),$$

причем в правой части интегралы конечны, а ряд сходится абсолютно.

Из теоремы 4.1.11 следует, что для любой неотрицательной измеримой функции $f(x) \ge 0$ функция множества

$$\nu(A) = \int_A f(x)\,\mu(dx), \quad A \in \mathcal{A} \tag{4.1.9}$$

является мерой на измеримом пространстве $\{X, \mathcal{A}\}$.

Теорема 4.1.12 (абсолютная непрерывность интеграла Лебега). *Пусть $f(x)$ — интегрируемая функция, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\left| \int_A f(x)\,\mu(dx) \right| < \varepsilon$ для всякого измеримого множества $A \in \mathcal{A}$ такого, что $\mu(A) < \delta$.*

Следующая теорема утверждает, что всякая мера ν, абсолютно-непрерывная относительно меры μ, допускает представление (4.1.9).

Определение 4.1.22. *Мера ν называется **абсолютно-непрерывной относительно меры** μ (сокращенно $\nu \ll \mu$), если для любого $A \in \mathcal{A}$ такого, что $\mu(A) = 0$ следует, что и $\nu(A) = 0$.*

Теорема 4.1.13 (Радон–Никодим). *Если $\nu \ll \mu$, то существует измеримая неотрицательная функция $\rho(x)$ такая, что*

$$\nu(A) = \int_A \rho(x)\,\mu(dx) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Функция $\rho(x)$ называется ***производной Радона–Никодима меры*** ν ***по мере*** μ и обозначается

$$\rho(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x).$$

Следующий результат дает правило замены меры в интеграле Лебега.

Теорема 4.1.14. *В условиях теоремы 4.1.13 для любой измеримой функции $g(x)$ имеет место равенство*

$$\int\limits_X g(x)\,\nu(dx) = \int\limits_X g(x)\,\rho(x)\,\mu(dx),$$

где интегралы в левой и правой частях существуют или не существуют одновременно.

Тем самым интегрируемость функции $g(x)$ по мере ν равносильна интегрируемости функции $g(x)\,\rho(x)$ по мере μ.

Теперь рассмотрим вопрос о замене переменной под знаком интеграла Лебега.

Определение 4.1.23. *Пусть $f(x)$ — измеримая функция, определенная на пространстве с мерой $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$. Тогда мера μ_f на $\{\mathbb{R}^1, \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\}$, задаваемая равенством*

$$\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1),$$

называется ***мерой, порожденной функцией*** f.

Нетрудно проверить, что функция множества μ_f действительно является мерой на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$.

Теорема 4.1.15 (формула замены переменной в интеграле Лебега). *Пусть функция $f(x)$, $x \in X$ измерима, а функция $\varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}^1$ является борелевской. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_X \varphi(f(x))\,\mu(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi(y)\,\mu_f(dy),$$

где интегралы в левой и правой частях существуют или не существуют одновременно.

Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Следующие результаты показывают, в каких случаях можно переходить к пределу под знаком интеграла Лебега.

Теорема 4.1.16 (А. Лебег). *Пусть последовательность* $\{f_n(x)\}$ *на* X *сходится почти всюду к* $f(x)$*, причем для всех* n *почти всюду выполняется неравенство* $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$*, где функция* $\varphi(x)$ *интегрируема. Тогда предельная функция* $f(x)$ *также является интегрируемой и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\,\mu(dx).$$

Теорема 4.1.17 (Б. Леви). *Пусть* $\{f_n(x)\}$ *— неубывающая последовательность функций, т. е.*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots,$$

где $f_n(x)$ *интегрируемы, а их интегралы ограничены в совокупности, т. е.*

$$\exists K < \infty : \quad \int\limits_X f_n(x)\,\mu(dx) \leq K.$$

Тогда почти всюду существует конечный предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *такой, что функция* $f(x)$ *интегрируема и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\,\mu(dx).$$

Теорема 4.1.18 (П. Фату). *Если последовательность неотрицательных функций* $\{f_n(x)\}$ *сходится почти всюду к* $f(x)$ *и* $\int\limits_X f_n(x)\,\mu(dx) \leq K$ *для всех* n*, то* $f(x)$ *интегрируема и* $\int\limits_X f(x)\,\mu(dx) \leq K$.

Интеграл Лебега на прямой

Следующее утверждение показывает связь между интегралом Римана и интегралом Лебега.

Теорема 4.1.19. *Если существует интеграл Римана*

$$I_R(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

то $f(x)$ интегрируема по мере Лебега λ на $[a,b]$ и

$$I_L(f) = \int_{[a,b]} f(x)\,\lambda(dx) = I_R(f).$$

Заметим, что обратное утверждение в общем случае не верно.

Введем еще одно понятие интеграла, основанное на понятии интеграла Лебега.

Определение 4.1.24. *Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ — борелевская функция, а $F(x)$ — функция распределения на $\mathbb{R}^1$ (см. определение 4.1.9).* ***Интеграл Стилтьеса от*** *$f(x)$* ***по функции распределения*** *$F(x)$ определяется следующим образом:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF(x) = \int_{\mathbb{R}^1} f(x)\,\mu(dx),$$

где интеграл в правой части понимается как интеграл Лебега по мере μ, имеющей функцию распределения $F(x)$.

В большинстве практически важных случаев функция распределения $F(x)$ может быть представлена в виде

$$F(x) = F^a(x) + F^d(x), \quad F^a(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)\,\lambda(dy), \quad F^d(x) = \sum_{k\colon x_k \le x} p_k,$$

где функция $p(y) \geq 0$ интегрируема по мере Лебега на $\mathbb{R}^1$, а множество точек $\{x_k\}$ не более чем счетно, причем $p_k > 0$.

Составляющая $F^a(x)$ называется ***функцией абсолютно-непрерывного распределения*** или просто ***абсолютно-непрерывной функцией***. В этом случае для почти всех $x \in \mathbb{R}^1$ (по мере Лебега) справедливо равенство $\dfrac{d}{dx}F(x) = \dfrac{d}{dx}F^a(x) = p(x)$, поэтому $p(x)$ называется ***функцией плотности распределения***. Заметим, что если $\mu_a(dx)$ — мера, имеющая функцию распределения $F^a(x)$, то плотность $p(x)$ есть производная Радона–Никодима меры μ_a по мере Лебега λ.

Составляющая $F^d(x)$ называется ***функцией дискретного распределения***, при этом $p_k = F(x_k) - F(x_k-)$ есть величина скачка функции $F(x)$ в точке ее разрыва $x_k \in \mathbb{R}^1$. Если число скачков конечно, то $F^d(x)$ кусочно-постоянна.

Если $f(x)$ — борелевская функция, то справедливо следующее правило вычисление интеграла Стилтьеса:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)\,p(x)\,\lambda(dx) + \sum_k f(x_k)\,p_k,$$

причем интеграл Стилтьеса конечен, если функция $f(x)\,p(x)$ интегрируема по мере Лебега, а ряд $\sum\limits_k f(x_k)\,p_k$ сходится абсолютно.

В заключение рассмотрим пример меры на прямой, чрезвычайно важный для приложения. Мера $\delta_{x_0}(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, $x_0 \in \mathbb{R}^1$, определяемая равенством

$$\delta_{x_0}(B) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_0 \in B, \\ 0, & \text{если} \quad x_0 \notin B, \end{cases}$$

называется ***мерой Дирака, сосредоточенной в точке*** x_0. Тогда интеграл по мере Дирака принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)\,\delta_{x_0}(dx) = f(x_0).$$

Последний интеграл часто записывают в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0),$$

где $\delta(x)$ называют ***$\boldsymbol{\delta}$-функцией Дирака***. При этом, поскольку функция

$$\mathbb{I}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$$

является функцией распределения меры Дирака δ_0, считают, что выполнено равенство $\delta(x) = \dfrac{d\,\mathbb{I}(x)}{dx}$.