4) $A_4 = \{\xi(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in [0, \infty)\}$.

Решение. 1. Поскольку все траектории $\xi(t)$ дифференцируемы по t, то условие их монотонности есть $\xi'(t) = 2Y + 2t \geq 0$, $\forall t \geq 0$. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы Y была неотрицательной. Таким образом, $\mathbf{P}\{A_1\} = \mathbf{P}\{Y \geq 0\} = 1/2$.

2. Условие неотрицательности процесса $\xi(t)$, $\forall t \geq 0$ выполняется, если либо $Y > 0$, либо $Y \leq 0$, но $|Y| \leq |X|$. Таким образом, в силу независимости X, Y и симметрии их законов распределения получаем

$$\mathbf{P}\{A_2\} = \mathbf{P}\{Y > 0\} + \mathbf{P}\{Y \leq 0,\, |Y| \leq |X|\} = 1/2 + 1/4 = 3/4.$$

3. $\mathbf{P}\{A_3\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{t \in D} \{\xi(t) = 0\}\right\} \leq \sum_{t \in D} \mathbf{P}\{\xi(t) = 0\}$. Для любого фиксированного t имеет место

$$\{\xi(t) = 0\} = \{X^2 + 2tY + t^2 = 0\} = \{(X, Y) \in B\},$$

где множество $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2ty + t^2 = 0\}$ представляет собой параболу и поэтому имеет нулевую меру Лебега в $\mathbb{R}^2$. Теперь, учитывая, что совместное распределение случайных величин X, Y имеет плотность $p(x, y)$, получаем

$$\mathbf{P}\{\xi(t) = 0\} = \mathbf{P}\{(X, Y) \in B\} = \int_B p(x, y)\, dxdy = 0.$$

Далее, поскольку множество D не более чем счетно, то $\mathbf{P}\{A_3\} = 0$.

4. Событие A_4 состоит в том, что функция $\xi(t)$ имеет на $[0, \infty)$ по крайней мере один корень, что выполняется, если одновременно $Y \leq 0$ и $|Y| \geq |X|$. Поэтому $\mathbf{P}\{A_4\} = \mathbf{P}\{Y \leq 0,\, |Y| \geq |X|\} = 1/4$. ■

1.1.4. Моментные характеристики случайного процесса

Моментные характеристики случайного процесса задают его простейшие свойства и вычисляются с помощью конечномерных распределений различных порядков. Пусть $\xi(t)$ — действительный (вещественный) скалярный процесс.

Определение 1.1.14. *Неслучайная функция $m_\xi(t)$, $t \in T$, определяемая соотношением*

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_\xi(x;\, t),$$

называется ***математическим ожиданием процесса*** $\xi(t)$ *или его* ***средним значением****. Если* $m_\xi(t) = 0$ *при всех* $t \in T$*, то процесс называется* ***центрированным****.*

Определение 1.1.15. *Неслучайная функция* $D_\xi(t)$*,* $t \in T$*, определяемая соотношением*

$$D_\xi(t) = \mathbf{D}\{\xi(t)\} = \mathbf{M}\Big\{(\xi(t) - m_\xi(t))^2\Big\} = \mathbf{M}\big\{\xi(t)^2\big\} - m_\xi{}^2(t) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF_\xi(x;\, t) - m_\xi{}^2(t),$$

называется ***дисперсией процесса*** $\xi(t)$*.*

Замечание. При каждом $t \in T$ математическое ожидание и дисперсия $m_\xi(t)$, $D_\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ суть математическое ожидание и дисперсия его сечения в точке $t \in T$.

Определение 1.1.16. *Неслучайная функция* $R_\xi(t, \tau)$*,* $t, \tau \in T$*, определяемая соотношением*

$$R_\xi(t, \tau) = \mathbf{cov}\{\xi(t), \xi(\tau)\} = \mathbf{M}\Big\{(\xi(t) - m_\xi(t))(\xi(\tau) - m_\xi(\tau))\Big\} = \\ = \mathbf{M}\{\xi(t)\xi(\tau)\} - m_\xi(t)m_\xi(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, dF_\xi(x_1, x_2;\, t, \tau) - m_\xi(t)m_\xi(\tau),$$

называется ***ковариационной функцией случайного процесса*** $\xi(t)$*.*

Замечания: 1. При любых $t, \tau \in T$ функция $R_\xi(t, \tau)$ численно равна ковариации сечений случайного процесса $\xi_t(\omega)$ и $\xi_\tau(\omega)$ в точках $t, \tau \in T$ и характеризует степень линейной зависимости между сечениями. Для вычисления $R_\xi(t, \tau)$ необходимо знать двумерное распределение $F_\xi(x_1, x_2;\, t, \tau)$ процесса $\xi(t)$. Заметим также, что

$$D_\xi(t) = R_\xi(t, t), \quad t \in T.$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что для существования $m_\xi(t)$, $D_\xi(t)$ и $R_\xi(t, \tau)$ при всех $t, \tau \in T$ достаточно выполнения условия

$$\mathbf{M}\big\{|\xi(t)|^2\big\} < \infty \quad \forall t \in T. \tag{1.1.6}$$

2. Если распределения $F_\xi(x;\, t)$ и $F_\xi(x_1, x_2;\, t, \tau)$ имеют плотности распре-

деления $p_\xi(x;\,t)$ и $p_\xi(x_1,x_2;\,t,\tau)$, то

$$m_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, p_\xi(x;\,t)\, dx, \qquad D_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, p_\xi(x;\,t)\, dx - m_\xi^{\,2}(t),$$

$$R_\xi(t,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, p_\xi(x_1,x_2;\,t,\tau)\, dx_1 dx_2 - m_\xi(t) m_\xi(\tau).$$

Определение 1.1.17. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$, удовлетворяющий условию (1.1.6), называется* ***процессом с конечными моментами второго порядка*** *или* ***гильбертовым случайным процессом****.*

Определение 1.1.18. *Пусть $\xi(t) = X(t) + iY(t)$ — комплексный процесс, где $X(t), Y(t)$, $t \in T$ — некоторые действительные случайные процессы, а $i^2 = -1$. Если*

$$\mathbf{M}\{|\xi(t)|^2\} = \mathbf{M}\Big\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\Big\} = \mathbf{M}\{X^2(t) + Y^2(t)\} < \infty \quad \forall t \in T,$$

то процесс $\xi(t)$ называется ***комплексным гильбертовым процессом****.*

Функция

$$R_\xi(t,\tau) = \mathbf{M}\Big\{(\xi(t) - m_\xi(t))\overline{(\xi(\tau) - m_\xi(\tau))}\Big\}, \quad t,\tau \in T,$$

где $\overline{\{\cdot\}}$ означает комплексное сопряжение, называется ***ковариационной функцией комплексного случайного процесса*** *$\xi(t)$.*

Пример 1.1.12. Пусть $\xi(t) = X\varphi(t)$, $t \in T$, где X — действительная случайная величина со средним m_X и дисперсией D_X, а $\varphi(t)$, $t \in T$ — неслучайная функция. Найти $m_\xi(t)$, $D_\xi(t)$ и $R_\xi(t,\tau)$.

Решение. В соответствии с определениями 1.1.14–1.1.16 имеем

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\{X\varphi(t)\} = \mathbf{M}\{X\}\,\varphi(t) = m_X\varphi(t),$$

$$R_\xi(t,\tau) = \mathbf{cov}\{X\varphi(t), X\varphi(\tau)\} = \mathbf{cov}\{X,X\}\,\varphi(t)\varphi(\tau) = D_X\varphi(t)\varphi(\tau).$$

$$D_\xi(t) = R_\xi(t,t) = D_X\,\varphi^2(t). \ \blacksquare$$

Следующий пример является обобщением предыдущего.

Пример 1.1.13. Пусть $\xi(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\varphi_i(t)$, $t \in T$, где X_i — действительные некоррелированные случайные величины с известными параметрами $\{m_{X_i},\, D_{X_i}\}$, а $\varphi_i(t)$, $t \in T$ — заданные детерминированные функции. Найти $m_\xi(t)$, $D_\xi(t)$ и $R_\xi(t,\tau)$.

Решение. В соответствии с определениями 1.1.14–1.1.16 имеем

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\left\{\sum_{i=1}^n X_i\varphi_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}\{X_i\}\,\varphi_i(t) = \sum_{i=1}^n m_{X_i}\varphi_i(t),$$

$$R_\xi(t,\tau) = \mathbf{cov}\left\{\sum_{i=1}^n X_i\varphi_i(t), \sum_{j=1}^n X_j\varphi_j(\tau)\right\} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mathbf{cov}\{X_i, X_j\}\,\varphi_i(t)\varphi_j(\tau).$$

Так как $X_1, \ldots, X_n$ — некоррелированные случайные величины, т. е. $\mathbf{cov}\{X_i, X_j\} = 0$ при $i \neq j$, то

$$R_\xi(t,\tau) = \sum_{i=1}^n D_{X_i}\varphi_i(t)\varphi_i(\tau), \qquad D_\xi(t) = R_\xi(t,t) = \sum_{i=1}^n D_{X_i}\varphi_i^2(t). \ \blacksquare$$

Пример 1.1.14. Найти необходимое и достаточное условие, при котором существует случайный процесс $\{\xi(t),\, t \in T\}$ с характеристиками

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\} = m_\xi(t), \qquad \mathbf{cov}\{\xi(t), \xi(\tau)\} = R_\xi(t,\tau), \tag{1.1.7}$$

где $m_\xi(t)$, $R_\xi(t,\tau)$ — заданные вещественные функции.

Решение. Найдем сначала необходимое условие. Пусть $\xi(t)$ — процесс с характеристиками (1.1.7). Тогда для любых наборов $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$ справедливо

$$\mathbf{D}\left\{\sum_{i=1}^n \xi(t_i) z_i\right\} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mathbf{cov}\{\xi(t_i), \xi(t_j)\}\, z_i\overline{z}_j \geq 0,$$

т. е. функция $R_\xi(t,\tau)$ удовлетворяет условию ***неотрицательной определенности***:

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n R_\xi(t_i, t_j) z_i\overline{z}_j \geq 0 \quad \forall\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T, \quad \forall\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}. \tag{1.1.8}$$

Докажем теперь, что условие (1.1.8) является в то же время и достаточным для существования процесса с характеристиками (1.1.7). Действительно, условие (1.1.8) означает, что матрица $K = \{R_\xi(t_i, t_j)\}_{i,j=1,\ldots,n}$ является неотрицательно-определенной, поэтому существует функция $F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n)$ n-мерного гауссовского распределения $\mathcal{N}(m; K)$, где $m = \{m_\xi(t_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ (см. разд. 4.2). Как нетрудно проверить, построенная система конечномерных распределений удовлетворяет условиям 1–6 из разд. 1.1.3. Поэтому в силу теоремы Колмогорова существует случайный процесс $\{\xi(t),\, t \in T\}$, имеющий указанное семейство гауссовских распределений и, в частности, обладающий характеристиками (1.1.7). ■

Замечание. Процесс, рассмотренный в примере 1.1.14, называется ***гауссовским случайным процессом***. Свойства таких процессов более детально рассматриваются в следующем разделе.

Определение 1.1.19. *Пусть заданы два комплексных процесса $\xi(t)$, $\eta(t)$, $t \in T$. Детерминированная функция*

$$R_{\xi\eta}(t,\tau) = \mathbf{cov}\{\xi(t),\eta(\tau)\} = \mathbf{M}\Big\{(\xi(t) - m_\xi(t))\overline{(\eta(\tau) - m_\eta(\tau))}\Big\}, \quad t,\tau \in T$$

называется ***взаимной ковариационной функцией процессов*** *ξ и η.*

Замечание. Функция $R_{\xi\eta}(t,\tau)$ существует, если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — гильбертовы процессы.

Определение 1.1.20. *Пусть $\xi(t) = \{\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t)\}^* \in \mathbb{R}^n$ — векторный случайный процесс. Детерминированная n-мерная вектор-функция $m_\xi(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$, определяемая соотношением*

$$m_\xi(t) = \{\mathbf{M}\{\xi_1(t)\},\ldots,\mathbf{M}\{\xi_n(t)\}\}^*,$$

называется ***математическим ожиданием векторного случайного процесса*** *$\xi(t)$.*

Детерминированная матричная функция

$$R_\xi(t,\tau) = \mathbf{cov}\{\xi(t),\xi(\tau)\} = \mathbf{M}\Big\{(\xi(t) - m_\xi(t))\overline{(\xi(\tau) - m_\xi(\tau))}^*\Big\} =$$
$$= \mathbf{M}\Big\{\xi(t)\overline{\xi^*(\tau)}\Big\} - m_\xi(t)\overline{m_\xi^*(\tau)}, \quad t,\tau \in T$$

называется ***ковариационной функцией векторного случайного процесса*** *$\xi(t)$.*

Замечание. Для существования $m_\xi(t)$ и $R_\xi(t,\tau)$ при всех $t,\tau \in T$ достаточно выполнения условия

$$\mathbf{M}\big\{|\xi(t)|^2\big\} = \mathbf{M}\big\{|\xi_1(t)|^2 + \ldots + |\xi_n(t)|^2\big\} < \infty \quad \forall t \in T. \tag{1.1.9}$$

Пример 1.1.15. Пусть $\xi(t) = G(t)\,U$, $t \in T$, где $U \in \mathbb{R}^m$ — некоторый случайный вектор с параметрами $\mathbf{M}\{U\} = m_U$, $\mathbf{cov}\{U,U\} = R_U$, а $G(t)$ — неслучайная матричная функция размера $n \times m$. Найти $m_\xi(t)$, $R_\xi(t,\tau)$.

Решение. В соответствии с определением 1.1.20

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\{\xi(t)\} = G(t)\, m_U,$$

$$R_\xi(t,\tau) = \mathbf{cov}\{G(t)U, G(\tau)U\} = G(t)\,\mathbf{cov}\{U,U\}\,G^*(\tau) = G(t)R_U G^*(\tau),$$

а ковариационная матрица $D_\xi(t)$ сечения $\xi(t)$, $t \in T$ имеет вид

$$D_\xi(t) = R_\xi(t,t) = G(t)R_U G^*(t). \ \blacksquare$$

Определение 1.1.21. *Пусть $\xi(t)$, $t \in T$ — вещественный случайный процесс. Детерминированная вещественная функция $m_\xi(t_1,\ldots,t_k)$, $t_1,\ldots,t_k \in T$, определяемая соотношением*

$$m_\xi(t_1,\ldots,t_k) = \mathbf{M}\{\xi(t_1)\ldots\xi(t_k)\} = \int\limits_{\mathbb{R}^k} x_1\ldots x_k\, dF_\xi(x_1,\ldots,x_k;\, t_1,\ldots,t_k),$$

называется ***смешанным моментом порядка k процесса*** *$\xi(t)$.*

Определение 1.1.22. *Пусть $\xi(t)$, $t \in T$ — вещественный случайный процесс. Детерминированная комплексная функция $\Psi_\xi(z_1,\ldots,z_k;\, t_1,\ldots,t_k)$ вещественных переменных $z_1,\ldots,z_k$, определяемая для произвольного набора $t_1,\ldots,t_k \in T$ соотношением*

$$\Psi_\xi(z_1,\ldots,z_k;\, t_1,\ldots,t_k) = \mathbf{M}\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^k z_j\xi(t_j)\right)\right\} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^k} \exp\left(i\sum_{j=1}^k z_j x_j\right) dF_\xi(x_1,\ldots,x_k;\, t_1,\ldots,t_k),$$

называется ***характеристической функцией k-мерного распределения процесса*** *$\xi(t)$.*

Замечание. Из курса теории вероятностей известно, что характеристическая функция k-го порядка позволяет восстановить соответствующую k-мерную функцию распределения, поэтому эти характеристики при описании вероятностной структуры случайного процесса являются взаимозаменяемыми (см. разд. 4.2).

Пример 1.1.16. В условиях примера 1.1.12 найти характеристическую функцию процесса $\xi(t)$, если дополнительно известно, что X — гауссовская случайная величина.

Р е ш е н и е. Пусть $\eta = \sum_{j=1}^{k} z_j \xi(t_j)$, тогда, учитывая, что $\xi(t_j) = X\varphi(t_j)$, получаем $\eta = X \sum_{j=1}^{k} z_j \varphi(t_j)$, поэтому η — гауссовская случайная величина со средним и дисперсией

$$m_\eta = m_X \sum_{j=1}^{k} z_j \varphi(t_j), \qquad D_\eta = D_X \left(\sum_{j=1}^{k} z_j \varphi(t_j) \right)^2. \tag{1.1.10}$$

Отсюда получаем выражение для искомой характеристической функции:

$$\Psi_\xi(z_1, \ldots, z_k;\, t_1, \ldots, t_k) = \mathbf{M}\{e^{i\eta}\} = \exp\left\{ i m_\eta - \frac{1}{2} D_\eta \right\},$$

где m_η, D_η определены в (1.1.10) и учтено, что для гауссовской случайной величины η при любом вещественном λ справедливо (см. разд. 4.2):

$$\mathbf{M}\{e^{i\lambda\eta}\} = \exp\left\{ i\lambda m_\eta - \frac{\lambda^2}{2} D_\eta \right\}. \quad \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Выше был введен в рассмотрение белый шум с дискретным временем, т. е. последовательность центрированных независимых и, следовательно, некоррелированных случайных величин. Для случая непрерывного времени по аналогии вводится понятие ***белого шума*** как процесса $\xi(t)$ с моментными характеристиками

$$m_\xi(t) = 0, \qquad R_\xi(t, s) = \sigma^2 \delta(t - s),$$

где $\delta(\tau)$ — δ-функция Дирака (см. разд. 4.1). Очевидно, $R_\xi(t, s) = 0$, если $t \neq s$, т. е. сечения этого процесса даже при очень близких t и s некоррелированны. Однако $\xi(t)$ не является гильбертовым случайным процессом, так как $D_\xi(t) = R_\xi(t, t) = \infty$ при всех $t \in T$. Таким образом, белый шум с непрерывным временем физически нереализуем, однако он является удобной математической моделью для описания динамических систем, функционирующих в присутствии постоянно действующих случайных возмущений (см. главу 3).