В силу гауссовости и независимости случайных величин $\{\varepsilon_k\}$ случайная величина $\xi(n)$ — гауссовская с параметрами $m_\xi(n) = 0$ и $D_\xi(n)$, где

$$D_\xi(n) = \mathbf{D}\{\xi(n)\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\{\varepsilon_k\}\, \alpha^{2(n-k)} = \begin{cases} \sigma^2 \dfrac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1}, & \text{если} \quad \alpha^2 \neq 1, \\ \sigma^2 n, & \text{если} \quad \alpha^2 = 1. \end{cases}$$

Поэтому одномерная функция распределения имеет вид

$$F_\xi(x;\, n) = \mathbf{P}\{\xi(n) \le x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\xi(n)}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2D_\xi(n)} du = \Phi\left(x/\sqrt{D_\xi(n)}\right). \ \blacksquare$$

Замечание. Случайная последовательность, описанная в примере 1.1.6, называется ***дискретным белым шумом***. В дальнейшем эта модель будет часто использоваться для построения более сложных случайных последовательностей. В примере 1.1.7 последовательность $\{\varepsilon_n\}$ является ***дискретным гауссовским белым шумом***.

### 1.1.3. Теорема Колмогорова

Семейство конечномерных распределений является основной характеристикой случайного процесса, полностью определяющей его свойства. Мы будем говорить, что случайный процесс задан, если задано его семейство конечномерных распределений (1.1.1).

Функции распределения процесса $\xi(t)$ обладают следующими свойствами:

1) $0 \le F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) \le 1$ (условие нормировки);

2) функции $F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n)$ непрерывны справа по переменным $x_i$;

3) если хотя бы одна из переменных $x_i \to -\infty$, то

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) \to 0;$$

если все переменные $x_i \to +\infty$, то

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) \to 1;$$

4) функции $F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n)$ монотонны в следующем смысле:

$$\Delta_1 \ldots \Delta_n F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) \ge 0,$$

где $\Delta_i$ — оператор конечной разности по переменной $x_i$:

$$\Delta_i F = F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) - \\ - F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n),$$

а $h_1 \geq 0, \ldots, h_n \geq 0$ произвольны;

5) для любой перестановки $\{k_1, \ldots, k_n\}$ индексов $\{1, \ldots, n\}$

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) = F_\xi(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n};\, t_{k_1}, \ldots, t_{k_n});$$

6) для любых $1 \leq k < n$ и $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^1$

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_k;\, t_1, \ldots, t_k) = F_\xi(x_1, \ldots, x_k, +\infty, \ldots, +\infty;\, t_1, \ldots, t_n).$$

Определение 1.1.9. *Свойства* 5 *и* 6 *называются* ***условиями согласованности семейства конечномерных распределений***.

Пример 1.1.8. Доказать справедливость свойств 1–6 для произвольного семейства конечномерных распределений.

Решение. Все свойства 1–6 непосредственно вытекают из свойств вероятности. Действительно, свойство 1 есть условие нормировки для вероятности. Свойства 2 и 3 немедленно следуют из свойства непрерывности вероятности. Свойство 4 есть условие неотрицательности вероятности, поскольку

$$\Delta_1 \ldots \Delta_n F_\xi(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} \{x_i < \xi(t_i) \leq x_i + h_i\}\right\} \geq 0.$$

Наконец, свойства 5 и 6 являются свойствами совместной функции распределения случайных величин $\{\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)\}$. Полное доказательство предлагается выполнить самостоятельно (см. задачу 1). ■

Предположим, что для любого $n \geq 1$ и любого набора моментов времени $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ заданы функции $F(x_1, \ldots, x_n;\, t_1, \ldots, t_n)$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие условиям 1–6. Является ли это семейство функций семейством конечномерных распределений некоторого случайного процесса? Чтобы положительно ответить на этот вопрос, необходимо построить пространство элементарных исходов $\Omega$, задать некоторую $\sigma$-алгебру $\mathcal{F}$ его подмножеств и вероятность $\mathbf{P}$, и, наконец, построить семейство функций $\xi(t, \omega)$, определенных на $T \times \Omega$ так, чтобы семейство конечномерных распределений процесса $\xi(t, \omega)$ совпало с семейством функций $F$. Оказывается, что данная процедура осуществима всегда. Этот основополагающий результат теории случайных процессов известен как теорема Колмогорова.

Теорема 1.1.1 (Колмогоров). *Пусть задано некоторое семейство конечномерных функций распределения*

$$F = \{F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n),\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^1,\ t_1, \dots, t_n \in T,\ 1 \le n < \infty\},$$

*удовлетворяющих условиям* 1–6. *Тогда существуют вероятностное пространство* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ *и случайный процесс* $\{\xi(t),\, t \in T\}$ *такие, что семейство конечномерных распределений* $F_\xi$ *случайного процесса* $\xi(t)$ *совпадает с* $F$.

Замечание. Теорема Колмогорова вместе с установленными выше свойствами семейства конечномерных распределений показывает, что условия 1–6 являются необходимыми и достаточными для существования процесса с заданными конечномерными распределениями $F_\xi$.

Таким образом, всегда найдется случайный процесс с заданным семейством конечномерных распределений. Оказывается, что в общем случае такой процесс не будет единственным. Другими словами, семейство конечномерных распределений задает целый класс случайных процессов, которые в некотором смысле являются ***эквивалентными***. Рассмотрим более подробно различные подходы к определению этого понятия.

Пусть $\{X(t),\, t \in T\}$ и $\{Y(t),\, t \in T\}$ — два случайных процесса, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ и принимающих значения в одном и том же измеримом пространстве, например $\{\mathbb{R}^1, \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\}$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ — $\sigma$-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^1$.

Определение 1.1.10. *Процессы* $\{X(t),\, t \in T\}$ *и* $\{Y(t),\, t \in T\}$ *называются* ***стохастически эквивалентными в широком смысле****, если для любых* $n = 1, 2, \dots$, $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ *выполняется равенство*

$$\mathbf{P}\{X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n\} = \mathbf{P}\{Y(t_1) \in B_1, \dots, Y(t_n) \in B_n\}. \quad (1.1.3)$$

Замечание. Условие эквивалентности в широком смысле означает, что семейства конечномерных распределений процессов $X$ и $Y$ совпадают.

Определение 1.1.11. *Если для любого* $t \in T$

$$\mathbf{P}\{X(t) = Y(t)\} = 1, \quad (1.1.4)$$

*то процессы называются* ***стохастически эквивалентными*** *или просто* ***эквивалентными****.*

Введенные понятия эквивалентности связаны между собой, так как справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1.2. *Эквивалентные процессы всегда эквивалентны в широком смысле.*

Определение 1.1.12. *Если процесс $X(t)$ эквивалентен процессу $Y(t)$, то $X(t)$ называется* ***версией*** *или* ***модификацией*** *процесса $Y(t)$.*

Эквивалентность процессов в общем случае не означает их тождественности. Следующий пример показывает, что два эквивалентных процесса могут иметь совершенно различные траектории.

Пример 1.1.9. Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ — $\sigma$-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0,1]$, $\mathbf{P}$ — мера Лебега и $T = [0,1]$. На вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ определим процессы $\{X(t),\, t \in T\}$ и $\{Y(t),\, t \in T\}$ следующим образом:

$$X(t,\omega) = 0, \qquad Y(t,\omega) = \begin{cases} 0, & t \neq \omega, \\ 1, & t = \omega \end{cases} \qquad \text{при} \quad (t,\omega) \in T \times \Omega.$$

Показать, что процессы являются эквивалентными, однако их траектории отличаются ($\mathbf{P}$-п.н.).

Решение. Для некоторого фиксированного $t \in T$

$$\{\omega : X(t,\omega) \neq Y(t,\omega)\} = \{\omega : \omega = t\} = \{t\}.$$

Поскольку мера Лебега одноточечного множества равна нулю, то

$$\mathbf{P}\{X(t) = Y(t)\} = 1 \quad \text{для любого} \quad t \in T,$$

т. е. процессы $X(t)$ и $Y(t)$ эквивалентны. Тем не менее у процессов $X(t)$ и $Y(t)$ нет ни одной пары совпадающих траекторий. Действительно, для всякого $\omega \in \Omega$ в точке $t^* = \omega$ по условию $X(t^*,\omega) \neq Y(t^*,\omega)$, поэтому

$$\mathbf{P}\{\omega : X(t,\omega) = Y(t,\omega) \quad \forall t \in T\} = 0. \ \blacksquare$$

Следующее определение дает наиболее сильный тип эквивалентности.

Определение 1.1.13. *Процессы $\{X(t),\, t \in T\}$ и $\{Y(t),\, t \in T\}$ называются* ***неотличимыми****, если*

$$\mathbf{P}\{X(t) = Y(t) \quad \forall t \in T\} = 1. \tag{1.1.5}$$

Условие (1.1.5) часто записывают также в следующем виде:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in T} |X(t) - Y(t)| > 0\right\} = 0.$$

При некоторых условиях, однако, определения 1.1.11 и 1.1.13 эквивалентны. Это справедливо, например, если $X(t)$ и $Y(t)$ — случайные последовательности (т. е. множество $T$ счетно).

Пример 1.1.10. Доказать, что эквивалентные случайные последовательности неотличимы.

Решение. Пусть $X(t)$, $Y(t)$ — эквивалентные процессы с дискретным временем $t \in T = \mathbb{Z}$, тогда

$$\mathbf{P}\{X(t) \neq Y(t) \text{ хотя бы для одного } t \in T\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\bigcup_{t\in T}\{X(t) \neq Y(t)\}\right\} \leq \sum_{t\in T} \mathbf{P}\{X(t) \neq Y(t)\} = 0,$$

что влечет выполнение условия (1.1.5). ■

Таким образом, стохастически эквивалентные случайные последовательности неотличимы. Для случайных функций, к сожалению, это утверждение в общем случае несправедливо без некоторых дополнительных ограничений. Тем не менее справедливо следующее практически важное утверждение.

Теорема 1.1.3. *Если две стохастически эквивалентные случайные функции являются регулярными (см. определение* 1.1.6*), то они неотличимы.*

Замечание. Из приведенных выше рассуждений следует, что задание совокупности конечномерных распределений в общем случае не позволяет заранее обеспечить выполнение некоторых требований относительно поведения траекторий случайных функций (например, непрерывность, монотонность, дифференцируемость и т. д.). Однако, если случайная функция регулярна или задана конструктивно некоторым соотношением, то мы можем определить вероятности достаточно сложных событий, связанных с поведением ее траекторий.

Пример 1.1.11. Предположим, что случайная функция задана соотношением $\xi(t) = X^2 + 2tY + t^2$, $t \geq 0$, где $X$, $Y$ — независимые случайные величины, имеющие гауссовское распределение $\mathcal{N}(0;1)$. Найти вероятности следующих событий:

1) $A_1 = \{\xi(t) \text{ монотонно не убывает}\}$;

2) $A_2 = \{\xi(t) \text{ неотрицательна}\}$;

3) $A_3 = \{\xi(t) = 0 \text{ хотя бы для одного } t \in D\}$, где $D \subset [0, \infty)$ — некоторое конечное или счетное подмножество;

4) $A_4 = \{\xi(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in [0, \infty)\}$.

Решение. 1. Поскольку все траектории $\xi(t)$ дифференцируемы по $t$, то условие их монотонности есть $\xi'(t) = 2Y + 2t \geq 0$, $\forall t \geq 0$. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы $Y$ была неотрицательной. Таким образом, $\mathbf{P}\{A_1\} = \mathbf{P}\{Y \geq 0\} = 1/2$.

2. Условие неотрицательности процесса $\xi(t)$, $\forall t \geq 0$ выполняется, если либо $Y > 0$, либо $Y \leq 0$, но $|Y| \leq |X|$. Таким образом, в силу независимости $X$, $Y$ и симметрии их законов распределения получаем

$$\mathbf{P}\{A_2\} = \mathbf{P}\{Y > 0\} + \mathbf{P}\{Y \leq 0,\, |Y| \leq |X|\} = 1/2 + 1/4 = 3/4.$$

3. $\mathbf{P}\{A_3\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup\limits_{t \in D} \{\xi(t) = 0\}\right\} \leq \sum\limits_{t \in D} \mathbf{P}\{\xi(t) = 0\}$. Для любого фиксированного $t$ имеет место

$$\{\xi(t) = 0\} = \{X^2 + 2tY + t^2 = 0\} = \{(X, Y) \in B\},$$

где множество $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2ty + t^2 = 0\}$ представляет собой параболу и поэтому имеет нулевую меру Лебега в $\mathbb{R}^2$. Теперь, учитывая, что совместное распределение случайных величин $X$, $Y$ имеет плотность $p(x, y)$, получаем

$$\mathbf{P}\{\xi(t) = 0\} = \mathbf{P}\{(X, Y) \in B\} = \int\limits_B p(x, y)\, dxdy = 0.$$

Далее, поскольку множество $D$ не более чем счетно, то $\mathbf{P}\{A_3\} = 0$.

4. Событие $A_4$ состоит в том, что функция $\xi(t)$ имеет на $[0, \infty)$ по крайней мере один корень, что выполняется, если одновременно $Y \leq 0$ и $|Y| \geq |X|$. Поэтому $\mathbf{P}\{A_4\} = \mathbf{P}\{Y \leq 0,\, |Y| \geq |X|\} = 1/4$. ■

### 1.1.4. Моментные характеристики случайного процесса

Моментные характеристики случайного процесса задают его простейшие свойства и вычисляются с помощью конечномерных распределений различных порядков. Пусть $\xi(t)$ — действительный (вещественный) скалярный процесс.

Определение 1.1.14. *Неслучайная функция $m_\xi(t)$, $t \in T$, определяемая соотношением*

$$m_\xi(t) = \mathbf{M}\{\xi(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, dF_\xi(x;\, t),$$