ВикипедиЯ

Неравенство Маркова

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Нера́венство Ма́ркова в теории вероятностей даёт оценку вероятности, что неотрицательная случайная величина превзойдёт по модулю фиксированную положительную константу, в терминах её математического ожидания. Хотя получаемая оценка обычно груба, она позволяет получить определённое представление о распределении, когда последнее не известно явным образом.

Содержание

Формулировка

Пусть *неотрицательная* случайная величина $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, и её математическое ожидание $\mathbb{E}X$ конечно. Тогда

$$\mathbb{P}\left(X \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}X}{a},$$

где $a > 0$.

Примеры

1. Пусть $X \geqslant 0$ — неотрицательная случайная величина. Тогда, взяв $a = 2\mathbb{E}X$, получаем

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\mathbb{E}X) \leqslant \frac{1}{2}.$$

2. Пусть в среднем ученики опаздывают на 3 минуты, и нас интересует, какова вероятность того, что ученик опоздает на 15 и более минут. Чтобы получить грубую оценку сверху, можно воспользоваться неравенством Маркова:

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant 15) \leqslant \frac{3}{15} = 0{,}2.$$

Доказательство

Пусть неотрицательная случайная величина X имеет плотность распределения $p(x)$, тогда для $a > 0$

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty xp(x)dx \geqslant \int_a^\infty xp(x)dx \geqslant \int_a^\infty ap(x)dx = a\mathbb{P}\left(X \geqslant a\right).$$

Связь с другими неравенствами

Если в неравенство подставить вместо случайной величины X случайную величину $(Y - \mathbb{E}Y)^2$, то получим неравенство Чебышёва:

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq b) \leq \frac{\mathrm{Var}(Y)}{b^2}.$$

И наоборот, представив неотрицательную случайную величину X в виде квадрата другой случайной величины $X = Y^2$, такой что $\mathbb{E}Y = 0$, из неравенства Чебышева для Y получим неравенство Маркова для X. Распределение случайной величины Y определяется так: $\mathbb{P}(Y < -\sqrt{a}) = \mathbb{P}(Y > \sqrt{a}) = \mathbb{P}(X > a)/2, \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0)$.

Если $\phi(x)$ произвольная положительная неубывающая функция, то

$$\mathbb{P}\left(X \geqslant a\right) = \mathbb{P}\left(\phi(X) \geqslant \phi(a)\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[\phi(X)\right]}{\phi(a)}.$$

В частности при $\phi(x) = e^{xt}$, для любых $t \geqslant 0$

$$\mathbb{P}\left(X \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[e^{Xt}\right]}{e^{at}} = \frac{M_X(t)}{e^{at}},$$

где $M_X(t)$ — производящая функция моментов. Минимизируя правую часть по t, получим неравенство Чернова.

Неравенство Чернова дает лучшую оценку, чем неравенство Чебышёва, а неравенство Чебышёва — лучшую, чем неравенство Маркова. Это неудивительно, поскольку неравенство Маркова предполагает знание только первого момента случайной величины X, Чебышёва — первого и второго, Чернова — всех моментов.

См. также

- Неравенство Чебышёва
- Марков, Андрей Андреевич (старший)

Ссылки

- Видеолекция о случайных величинах, неравенствах Маркова и Чебышёва (https://web.archive.org/web/20130924095507/http://compscicenter.ru/program/lecture/6504)