

**Нобелевская премия по экономике 2012
года досталась Элвину Роту и Ллойд
Шепли**



Элвин Рот и Ллойд Шепли

ОБОБЩЕННЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ

Компании: PriceWaterhouse, Microsoft, Raiffeisen

Претенденты: Иванов, Петров, Сидоров

Предпочтения компаний:

PriceWaterhouse

Петров

Иванов

Сидоров

Microsoft

Иванов

Сидоров

Петров

Raiffeisen

Сидоров

Иванов

Петров

Предпочтения претендентов:

Иванов

Microsoft

PriceWaterhouse

Raiffeisen

Петров

PriceWaterhouse

Microsoft

Raiffeisen

Сидоров

Raiffeisen

Microsoft

PriceWaterhouse

Пример обобщенного паросочетания - Распределение претендентов по компаниям:

PriceWaterhouse



Петров

Microsoft



Иванов

Raiffeisen



Сидоров

PriceWaterhouse

Иванов

Сидоров

Петров

Microsoft

Сидоров

Иванов

Петров

Raiffeisen

Иванов

Сидоров

Петров

Иванов

Microsoft

PriceWaterhouse

Raiffeisen

Петров

PriceWaterhouse

Raiffeisen

Microsoft

Сидоров

PriceWaterhouse

Microsoft

Raiffeisen

Обобщенное паросочетание:

PriceWaterhouse



Иванов

Microsoft



Петров

Raiffeisen



Сидоров

Для Сидорова и Microsoft более предпочтительно паросочетание:

PriceWaterhouse



Иванов

Raiffeisen



Петров

Microsoft



Сидоров

Для Иванова и Microsoft более предпочтительно паросочетание:

Microsoft



Иванов

PriceWaterhouse



Петров

Raiffeisen



Сидоров

Пара «Иванов» - «Microsoft» **блокирует** данное обобщенное паросочетание

Пара «Сидоров» - «Microsoft» **блокирует** данное обобщенное паросочетание

В данном обобщенном паросочетании две блокирующие пары:

«Иванов» - «Microsoft» и «Сидоров» - «Microsoft».

Если в паросочетании имеются блокирующие пары, то паросочетание называется **неустойчивым**.

PriceWaterhouse

Иванов

Сидоров

Петров

Microsoft

Сидоров

Иванов

Петров

Raiffeisen

Иванов

Сидоров

Петров

Иванов

Microsoft

PriceWaterhouse

Raiffeisen

Петров

PriceWaterhouse

Raiffeisen

Microsoft

Сидоров

PriceWaterhouse

Microsoft

Raiffeisen

PriceWaterhouse

Microsoft

Raiffeisen

Иванов

Сидоров

Петров

Это **устойчивое** паросочетание (нет блокирующих пар)

Теорема. При любых предпочтениях участников существует устойчивое паросочетание.

Правительство Москвы:

Заказчики:

Департамент образования (построить школу)
Департамент здравоохранения (построить больницу)
Департамент быт. обслуживания (построить магазин)

Подрядчики:

СМУ-14
СМУ-3
СМУ-8

Департамент образования

СМУ-3
СМУ-14
СМУ-8

Департамент здравоохранения

СМУ-14
СМУ-3
СМУ-8

Департамент быт. обслуживания

СМУ-14
СМУ-8
СМУ-3

СМУ-14

Школа (ДО)
Больница (ДЗ)
Магазин (ДБО)

СМУ-3

Магазин (ДБО)
Школа (ДО)
Больница (ДЗ)

СМУ-8

Магазин (ДБО)
Больница (ДЗ)
Школа (ДО)

Предпочтения компаний:

PriceWaterhouse

Иванов

Сидоров

Петров

Microsoft

Сидоров

Иванов

Петров

Raiffeisen

Иванов

Сидоров

Петров

Предпочтения претендентов:

Иванов

Microsoft

PriceWaterhouse

Raiffeisen

Петров

PriceWaterhouse

Raiffeisen

Microsoft

Сидоров

PriceWaterhouse

Microsoft

Raiffeisen

$M = \{m_1, m_2, m_3\}$ - (мужчины) (претенденты) (заказчики)

$W = \{w_1, w_2, w_3\}$ - (женщины) (компании) (подрядчики)

Предпочтения участников (мужчин и женщин) имеют вид:

<u>$P(m_1)$</u>	<u>$P(m_2)$</u>	<u>$P(m_3)$</u>	<u>$P(w_1)$</u>	<u>$P(w_2)$</u>	<u>$P(w_3)$</u>
w_2	w_1	w_1	m_1	m_3	m_1
w_1	w_3	w_2	m_3	m_1	m_3
w_3	w_2	w_3	m_2	m_2	m_2

<u>$P(m_1)$</u>	<u>$P(m_2)$</u>	<u>$P(m_3)$</u>	<u>$P(w_1)$</u>	<u>$P(w_2)$</u>	<u>$P(w_3)$</u>
w_2	w_1	w_1	m_1	m_3	m_1
w_1	w_3	w_2	m_3	m_1	m_3
w_3	w_2	w_3	m_2	m_2	m_2

Будем записывать предпочтения участников в такой форме:

$$P(m_1) = w_2, w_1, w_3$$

$$P(m_2) = w_1, w_3, w_2$$

$$P(m_3) = w_1, w_2, w_3$$

$$P(w_1) = m_1, m_3, m_2$$

$$P(w_2) = m_3, m_1, m_2$$

$$P(w_3) = m_1, m_3, m_2$$

$P(m_1) = w_2, w_1, (m_1), w_3$ - мужчина m_1 ни при каких условиях не согласен
жениться на женщине w_3

$P(w_2) = m_3, (w_2), m_1, m_2$ - женщина w_2 не выйдет замуж за мужчин m_1 и m_2

PriceWaterhouse

Иванов
(PriceWaterhouse)
Сидоров
Петров

Сидоров

PriceWaterhouse
Microsoft
(Сидоров)
Raiffeisen

Пример. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ и $W = \{w_1, w_2, w_3\}$.

$$P(m_1) = w_2, w_1, w_3$$

$$P(w_1) = m_1, m_3, m_2$$

$$P(m_2) = w_1, w_3, w_2$$

$$P(w_2) = m_3, m_1, m_2$$

$$P(m_3) = w_1, w_2, w_3$$

$$P(w_3) = m_1, m_3, m_2$$

Рассмотрим паросочетание

w_1	w_2	w_3
m_1	m_2	m_3

m_1 должен жениться (согласно на **w_1** ,
хотя для него лучше жениться на **w_2** ;

w_2 должна выходить замуж за **m_2** ,
хотя для нее лучше выйти за муж за **m_1**



пара (m_1, w_2) блокирует
паросочетание

Определение. Паросочетание μ называется устойчивым, если оно не блокируется
никакой парой (m, w) .

$$\mu' = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{array}$$

- устойчивое паросочетание

Пример. $M = \{m_1, \dots, m_5\}$, $W = \{w_1, \dots, w_4\}$

$$P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4$$

$$P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$$

$$P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1$$

$$P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5$$

$$P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2$$

$$P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3$$

$$P(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2$$

$$P(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3$$

$$P(m_5) = w_1, w_2, w_4, (m_5), w_3$$

-
1. Каждому мужчине приписывается первая в его предпочтении женщина:

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_4 & m_5 & m_2 & m_3 \end{array}$$

-
2. Если женщине приписывается больше одного мужчины, то остается тот, который стоит выше в ее предпочтении:

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ (m_1) & m_4 & m_5 & (m_2) & m_3 \end{array}$$

$$P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4$$

$$P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1$$

$$P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2$$

$$P(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2$$

$$P(m_5) = w_1, w_2, w_4, (m_5), w_3$$

$$P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$$

$$P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5$$

$$P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3$$

$$P(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3$$

-
- 3.** Отвергнутому на предыдущем шаге мужчине приписывается следующая по предпочтительности после отвергнувшей его женщина:

w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	m_5	m_3	m_2 m_4

-
- 4.** Если женщине приписывается больше одного мужчины, то остается тот, который стоит выше в ее предпочтении:

w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	m_5	m_3	m_2 (m_4)

$$P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4$$

$$P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1$$

$$P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2$$

$$P(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2$$

$$P(m_5) = w_1, w_2, w_4, (m_5), w_3$$

$$P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$$

$$P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5$$

$$P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3$$

$$P(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3$$

-
5. Отвергнутому на предыдущем шаге мужчине приписывается следующая по предпочтительности после отвергнувшей его женщина:

 w_1 w_2 w_3 w_4 m_1 m_2 m_5 m_3 m_4

6. Если женщине приписывается больше одного мужчины, то остается тот, который стоит выше в ее предпочтении:

 w_1 w_2 w_3 w_4 m_1 m_2 m_5 m_3 m_4

$$P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4$$

$$P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1$$

$$P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2$$

$$P(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2$$

$$P(m_5) = w_1, w_2, w_4, (m_5), w_3$$

$$P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$$

$$P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5$$

$$P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3$$

$$P(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3$$

7. Отвергнутому на предыдущем шаге мужчине приписывается следующая по предпочтительности после отвергнувшей его женщина:

w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	m_2	m_3	(m_4) m_5

8. Если женщине приписывается больше одного мужчины, то остается тот, который стоит выше в ее предпочтении:

$$\mu_M = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

$$P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4$$

$$P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1$$

$$P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2$$

$$P(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2$$

$$P(m_5) = w_1, w_2, w_4, (m_5), w_3$$

$$P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$$

$$P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5$$

$$P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3$$

$$P(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3$$

Дамы выбирают кавалеров

1.

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
w_4	w_1	w_2		w_3

2.

$\mu_W =$	m_1	m_2	m_3	m_4	(m_5)
	w_4	w_1	w_2	w_3	m_5

$$\mu_M = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}$$

$$\mu_W = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_1 & m_5 \end{matrix}$$

Мужчины выбирают первыми

$\mu_M :$

$m_1 - 1$ $m_2 - 2$ $m_3 - 2$ $m_4 - 2$ $m_5 - \text{НИКОГО}$

$w_1 - 3$ $w_2 - 3$ $w_3 - 5$ $w_4 - 2$

Женщины выбирают первыми

$\mu_W :$

$m_1 - 4$ $m_2 - 4$ $m_3 - 4$ $m_4 - 3$ $m_5 - \text{НИКОГО}$

$w_1 - 1$ $w_2 - 1$ $w_3 - 2$ $w_4 - 1$