ПАРОСОЧЕТАНИЯ

Работники: Иван, Денис, Петр, Максим

Работы: плотницкие работы, сварочные работы, электрика, сантехника

Известно:

Иван – сварщик
Денис – плотник, электрик, сантехник
Петр – плотник, сварщик, сантехник
Максим – сантехник

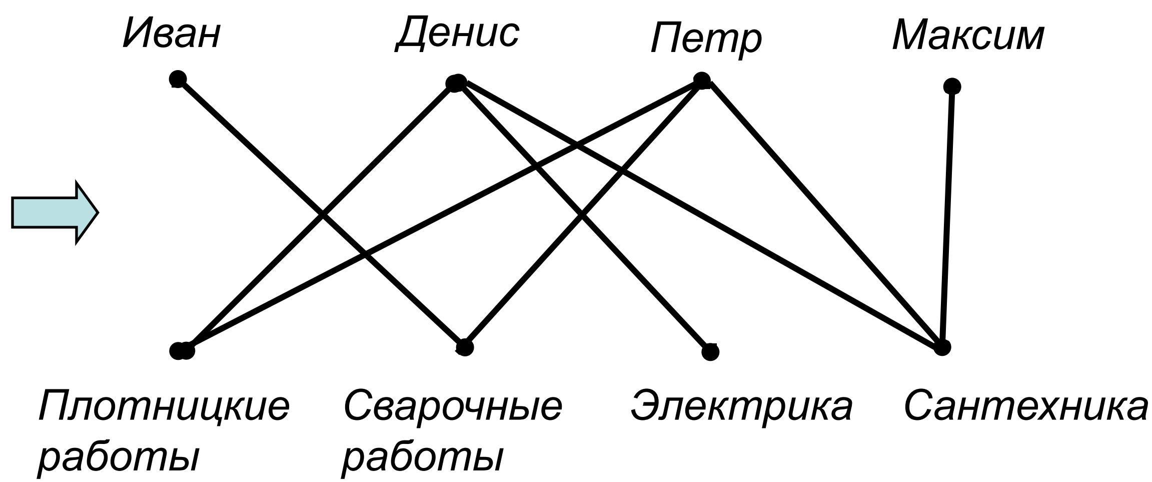
Юноши: Иван, Денис, Петр, Федор

Девушки: Анна, София, Мария, Надежда, Вера

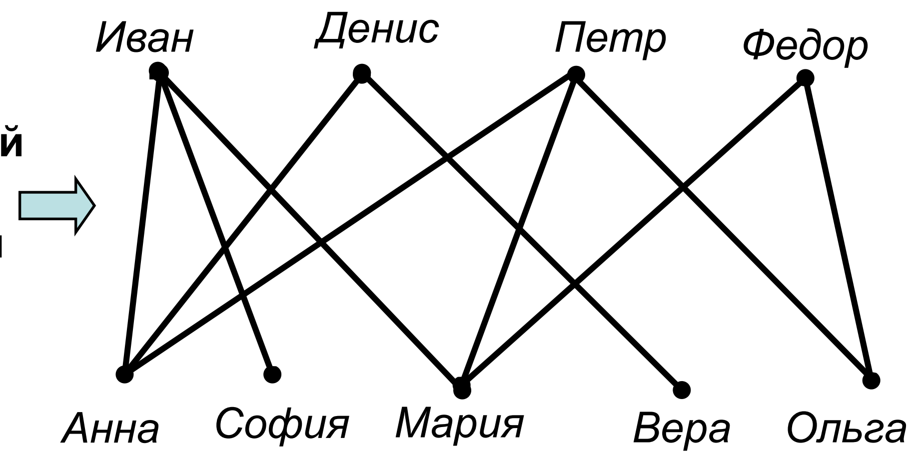
Известно:

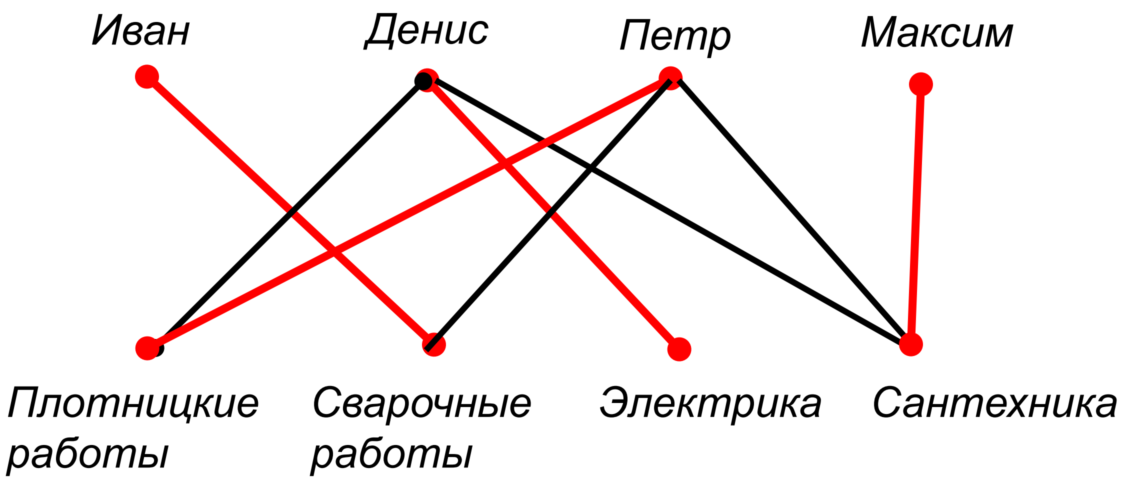
Иван – знаком с Анной,Софией и Марией
Денис – знаком с Анной и Верой
Петр – знаком с Марией и Анной
Федор - знаком с Марией и Надеждой

Иван – сварщик
Денис – плотник, электрик, сантехник
Петр – плотник, сварщик, сантехник
Максим – сантехник

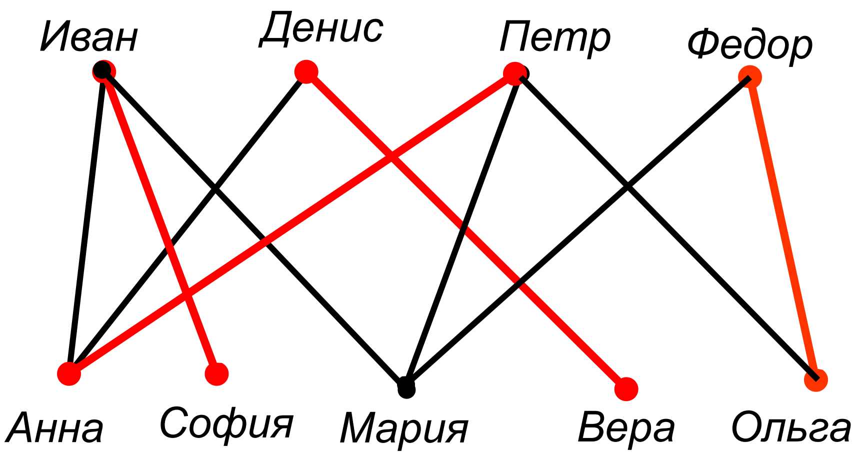


Иван – знаком с Анной, Софьей и Марией
Денис – знаком с Анной и Верой
Петр – знаком с Марией, Анной и Ольгой
Федор – знаком с Марией и Ольгой

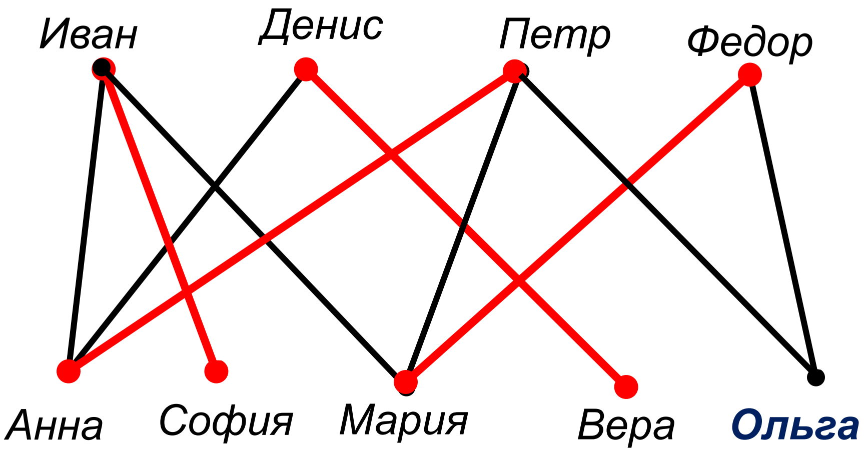




Иван выполнит сварочные работы,
Денис – электрику,
Петр – плотницкие работы
Максим - сантехнику



Иван танцует с Софией,
Денис – с Верой,
Петр – с Анной,
Федор – с Ольгой
Мария – осталась без партнера

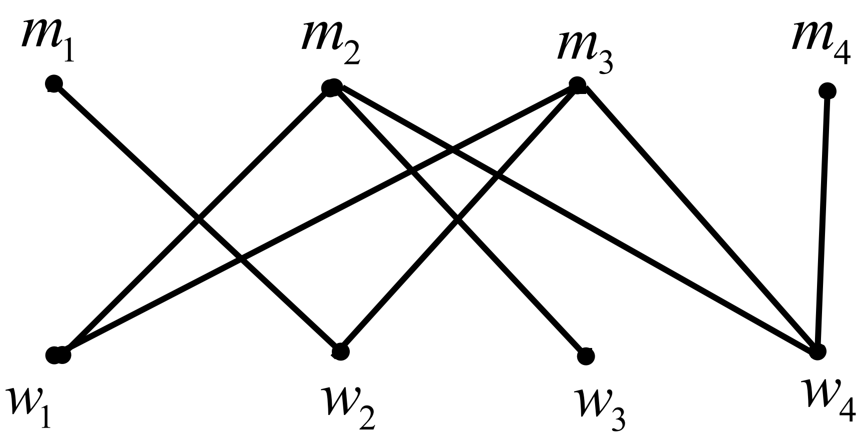


Иван танцует с Софией,
Денис – с Верой,
Петр – с Анной,
Федор – с Марией
Ольга – осталась без партнера

Петр знаком с Софией и Марией
Денис знаком с Софией
Федор знаком с Анной, Верой и Ольгой
Иван знаком с Софией и Марией

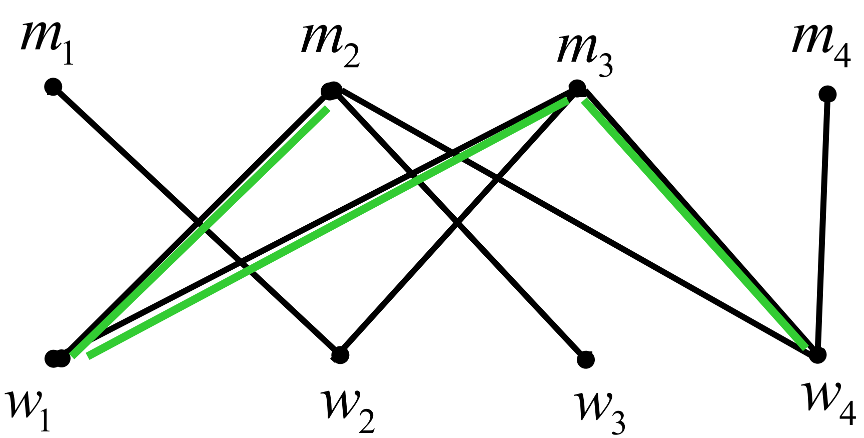
Можно ли образовать 4 танцующие пары?

Двудольный граф – **неориентированный граф, вершины которого можно разбить на два подмножества**



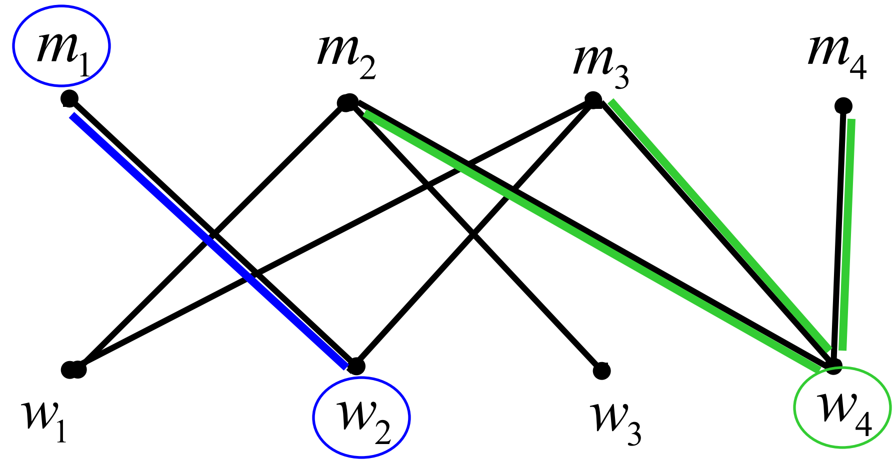
Множество вершин – мужчины $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ и женщины $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

Множество дуг - дуга (m_i, w_j) проводится, если m_i знаком с w_j



Пример цепи в двудольном графе:

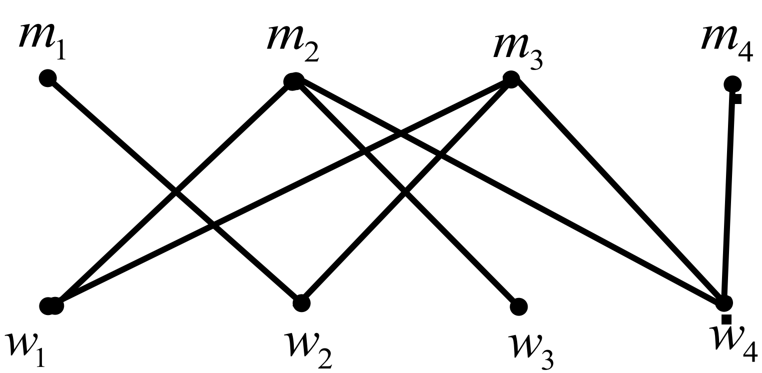
$$(m_2, \underline{w_1}), (\underline{w_1}, \underline{m_3}), (\underline{m_3}, w_4)$$



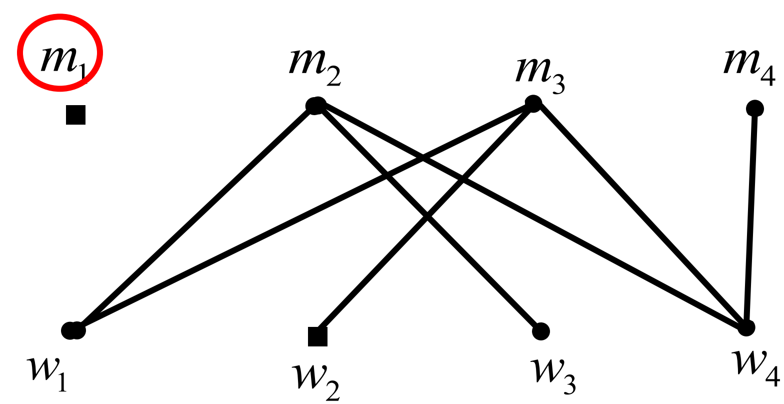
Дуга (m_1, w_2) <u>инцидентна</u> вершинам m_1 и w_2

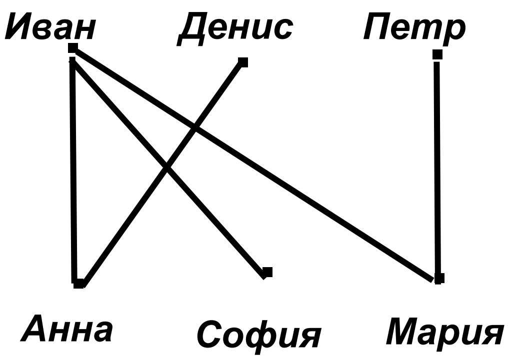
Вершина w_4 <u>инцидентна</u> дугам $(m_2, w_4), (m_3, w_4)$ и (m_4, w_4)

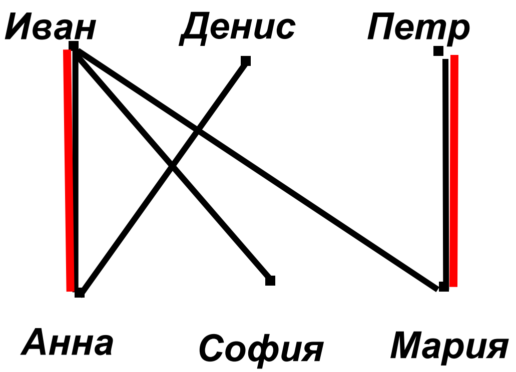
Двудольный граф без изолированных вершин

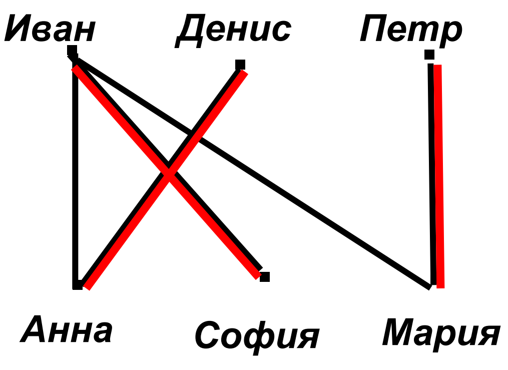


Двудольный граф с изолированной вершиной



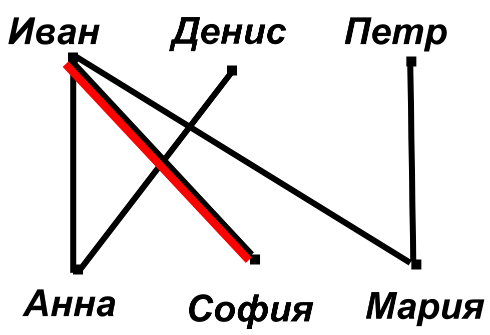

Иван
Денис
Петр
Анна
София
Мария

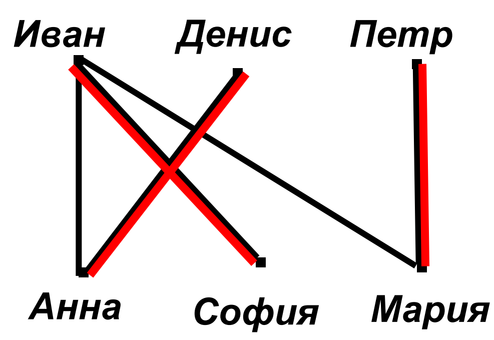

Иван
Денис
Петр
Анна
София
Мария

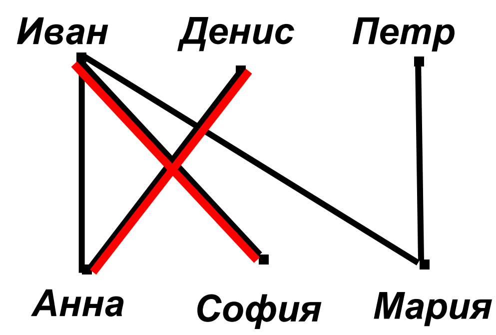

Иван
Денис
Петр
Анна
София
Мария

Паросочетанием в двудольном графе называется такое **подмножество дуг**, что никакие две дуги из этого подмножества не имеют общей вершины.

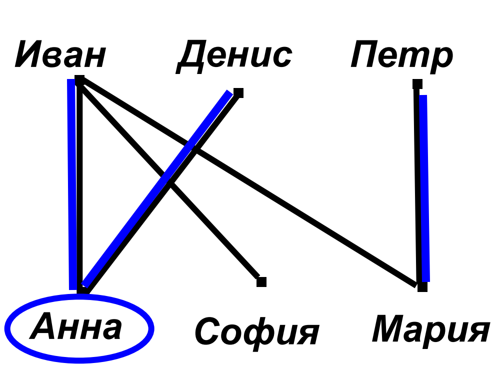
Примеры паросочетаний:

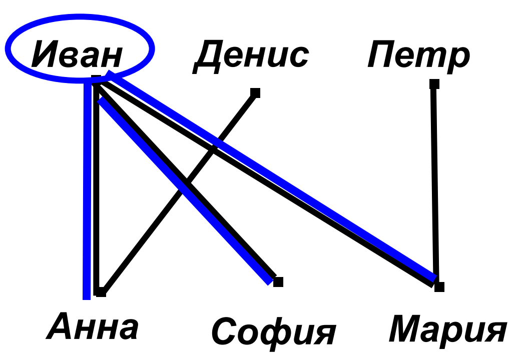


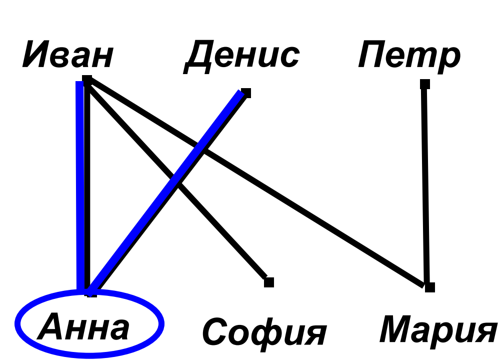




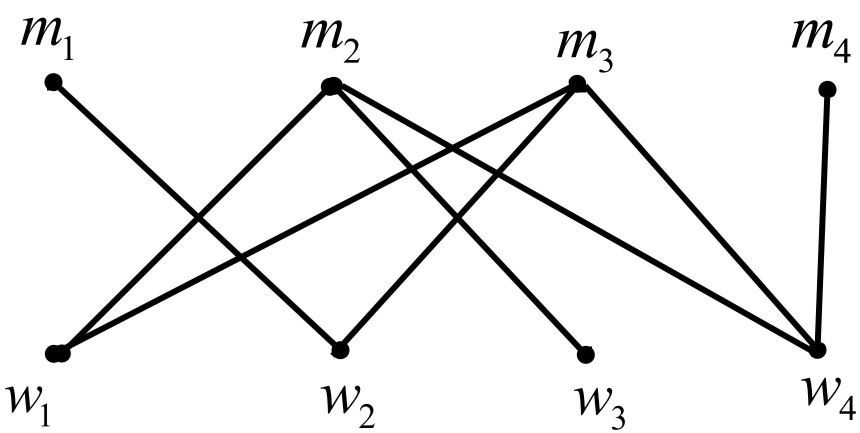
Примеры подмножеств дуг, которые не являются паросочетанием:



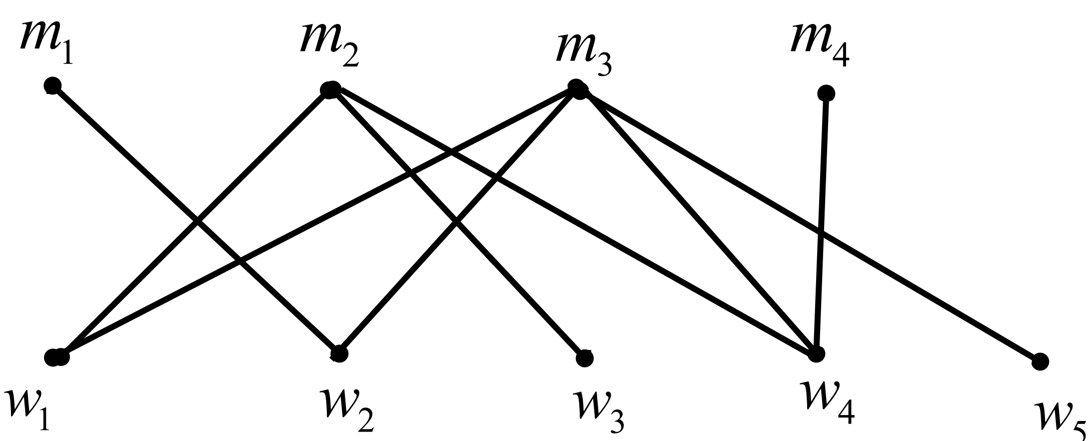




Будем считать, что <u>мощность множества мужчин меньше или равна мощности множества женщин</u>:



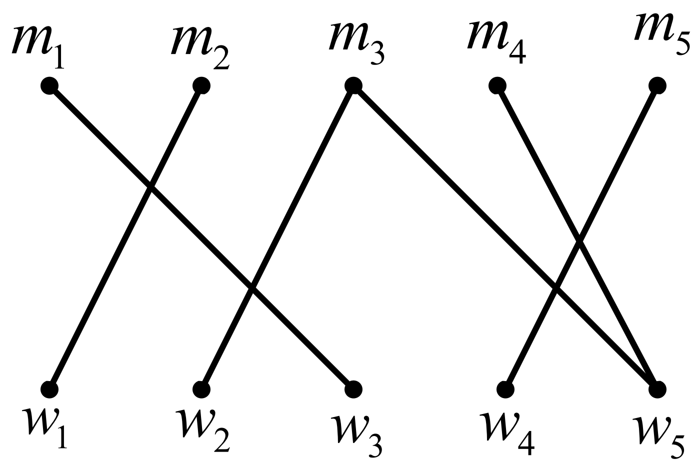
мужчин – 4;
женщин -4



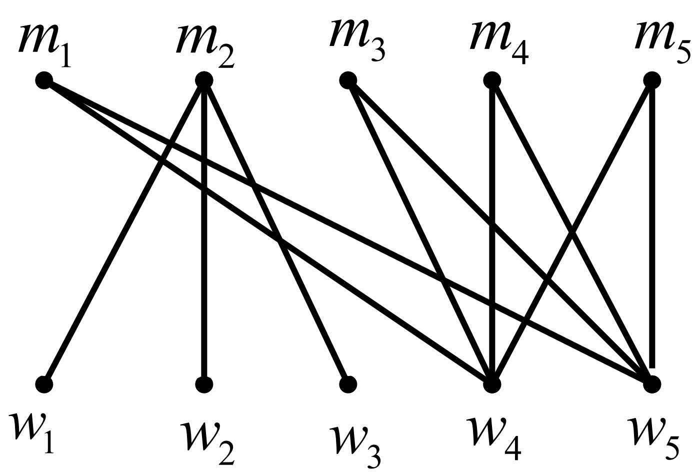
мужчин – 4;
женщин -5

Если мужчин больше, чем женщин, то граф просто «переворачивается».

Всегда ли можно организовать пары так, чтобы все танцевали? Зависит ли это напрямую от количества дуг?

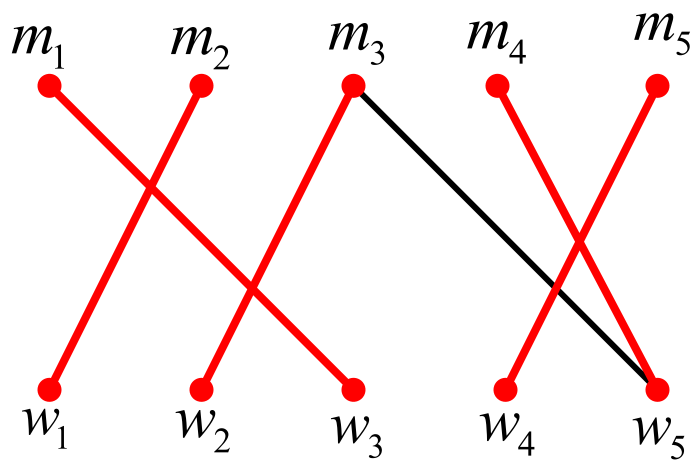


- 6 дуг

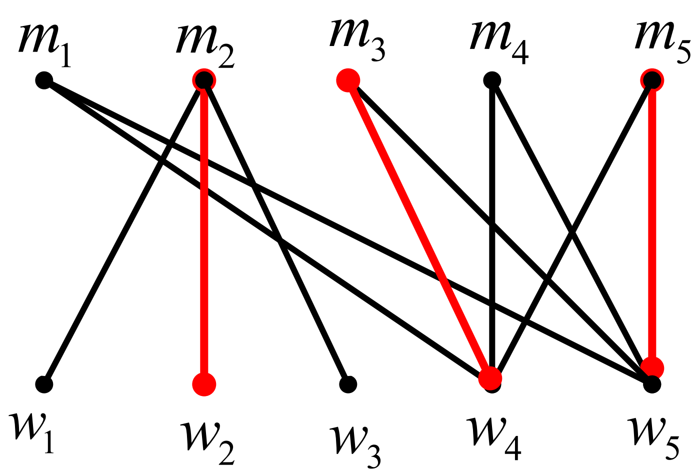


- 11 дуг

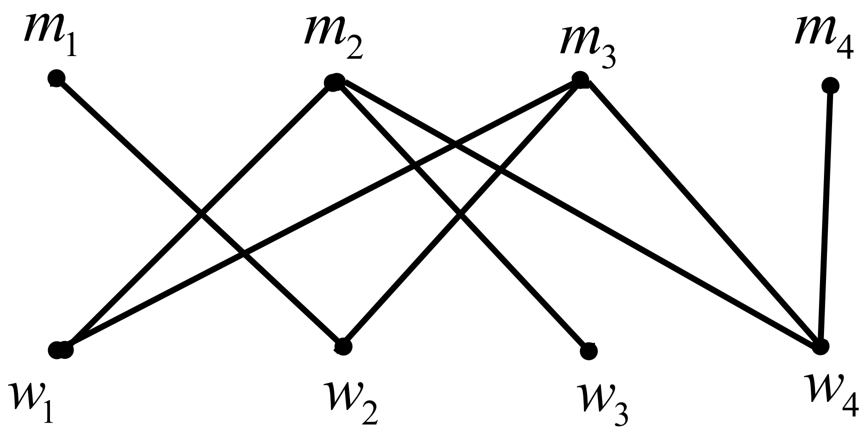
Всегда ли можно организовать пары так, чтобы все танцевали? Зависит ли это напрямую от количества дуг?



- 6 дуг
(танцуют все 5 пар)



- 11 дуг
(танцуют 3 пары)



$$X = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$$

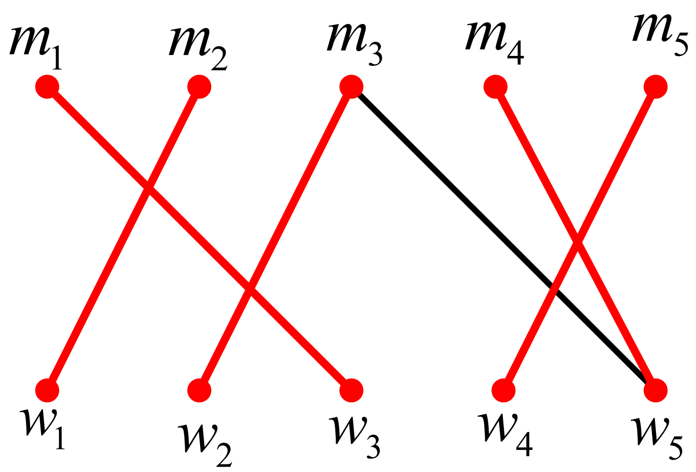
$$Y = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

$$\boxed{|X| \le |Y|}$$

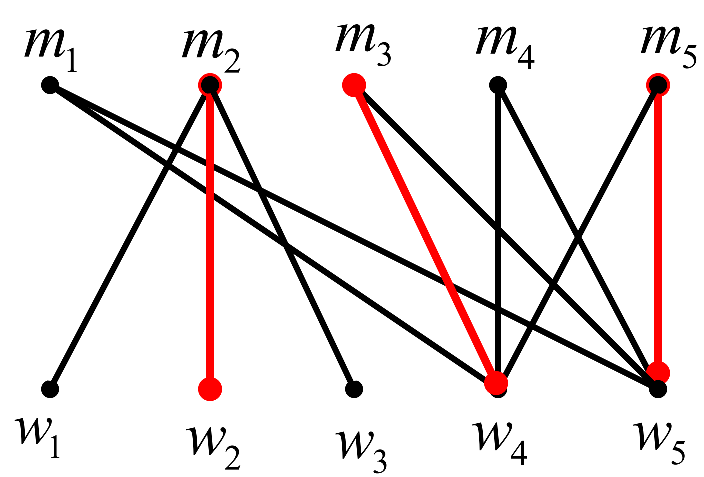
Паросочетание *M* называется максимальным, если в графе не существует паросочетания большей мощности.

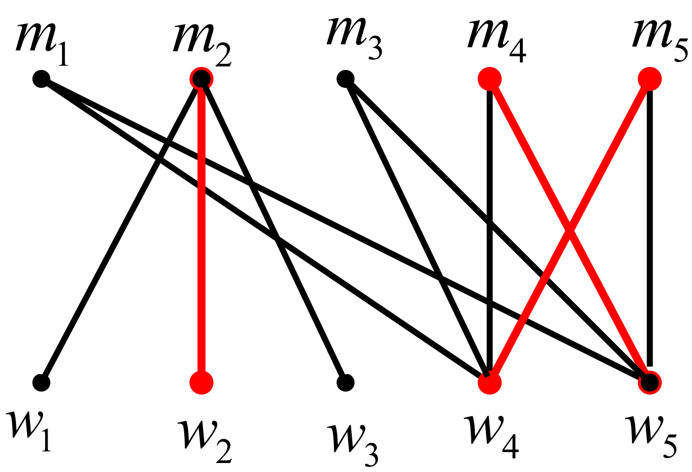
Паросочетание *M* называется совершенным, если $|M| = |X|$

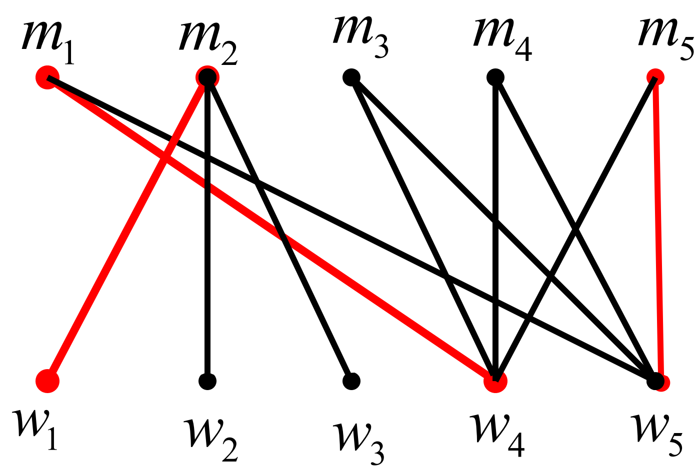
Совершенное паросочетание



Максимальное паросочетание

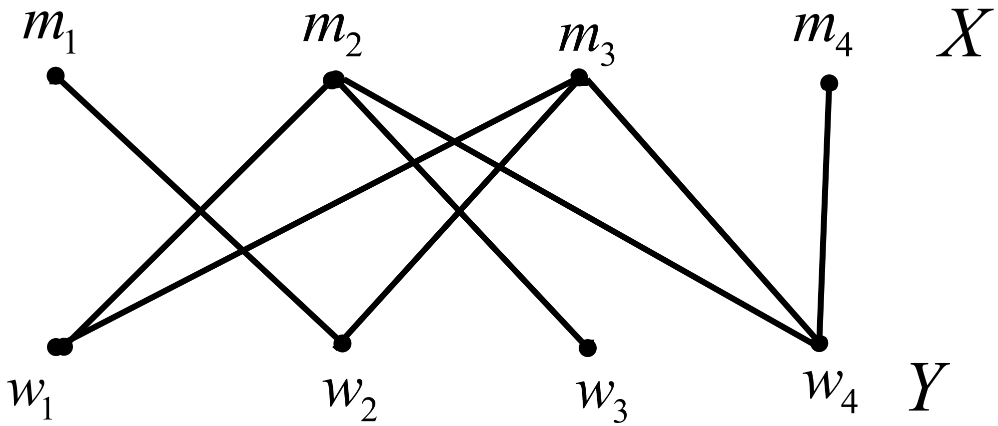






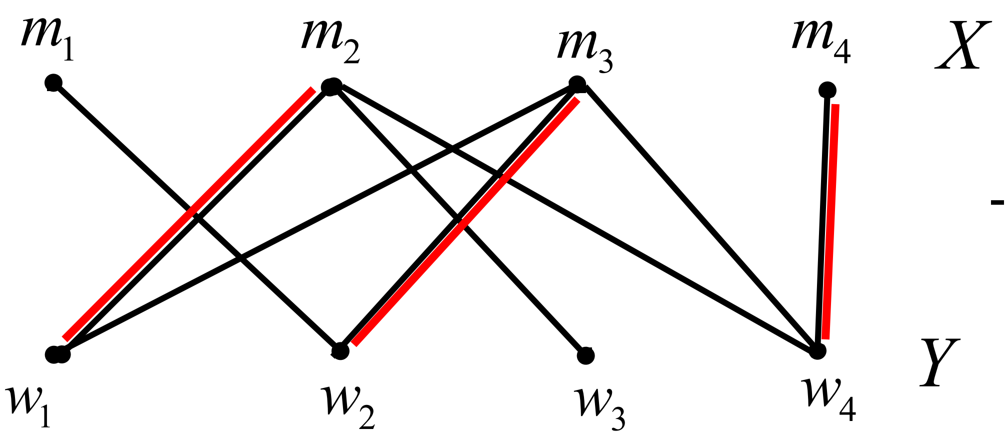
<u>**Максимальное паросочетание**</u>

(для этого двудольного графа оно не единственное)

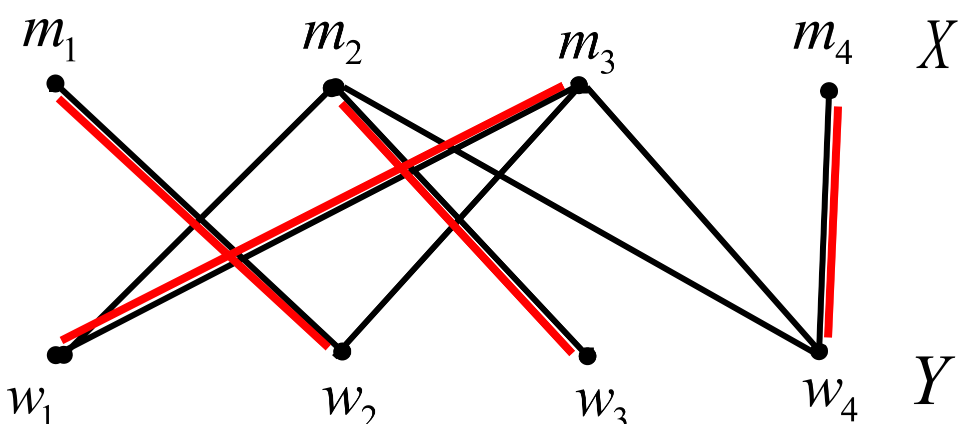


$$|X| \le |Y|$$

- двудольный граф



- паросочетание ***M*** не максимально

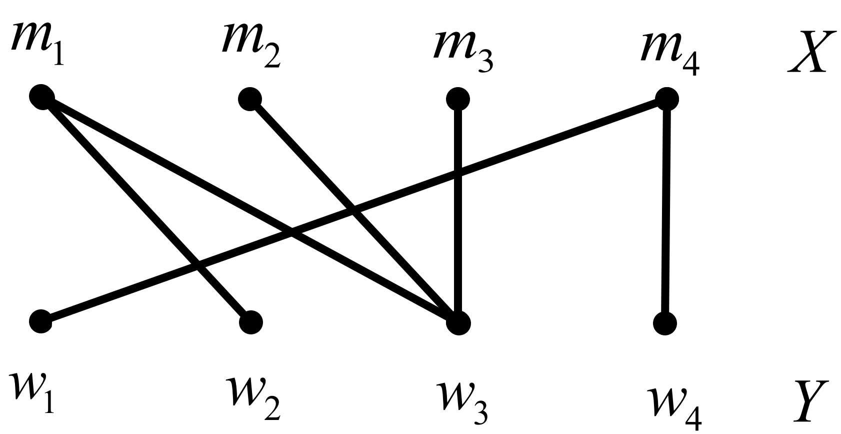


- паросочетание ***M*** максимально и совершенно

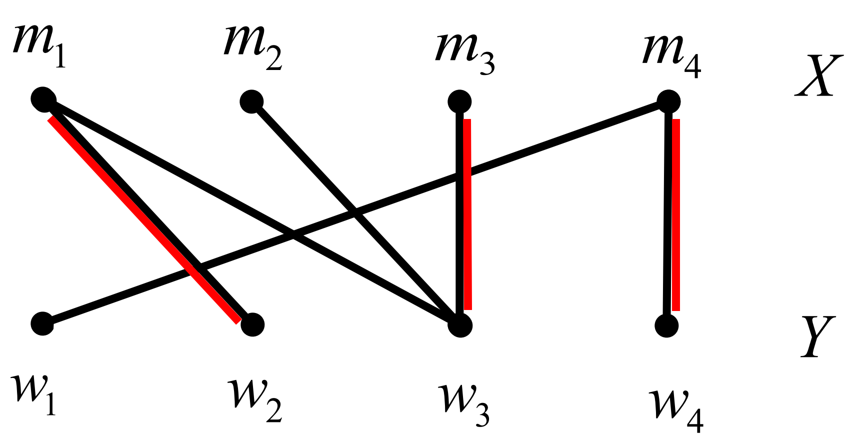
$$|M| = |X|$$

Совершенное паросочетание в двудольном графе существует не всегда.

<u>Пример № 1</u>.



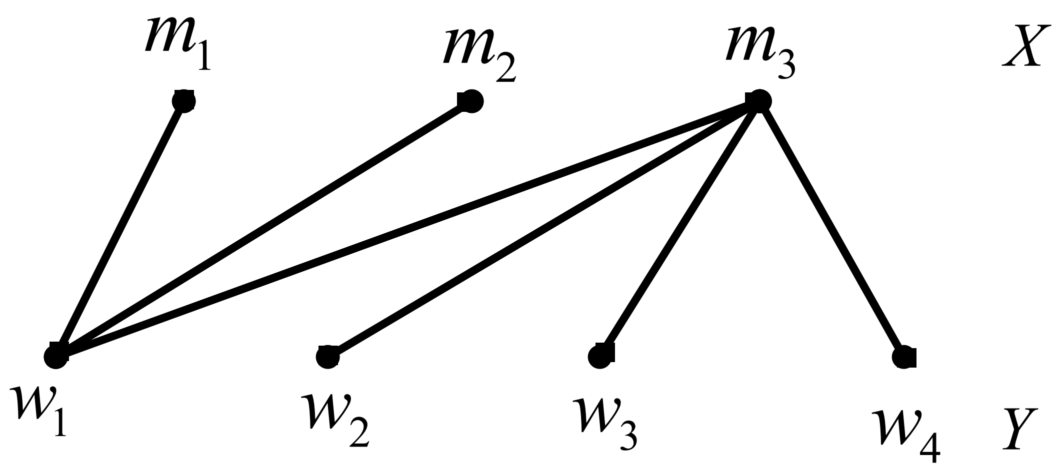
- двудольный граф



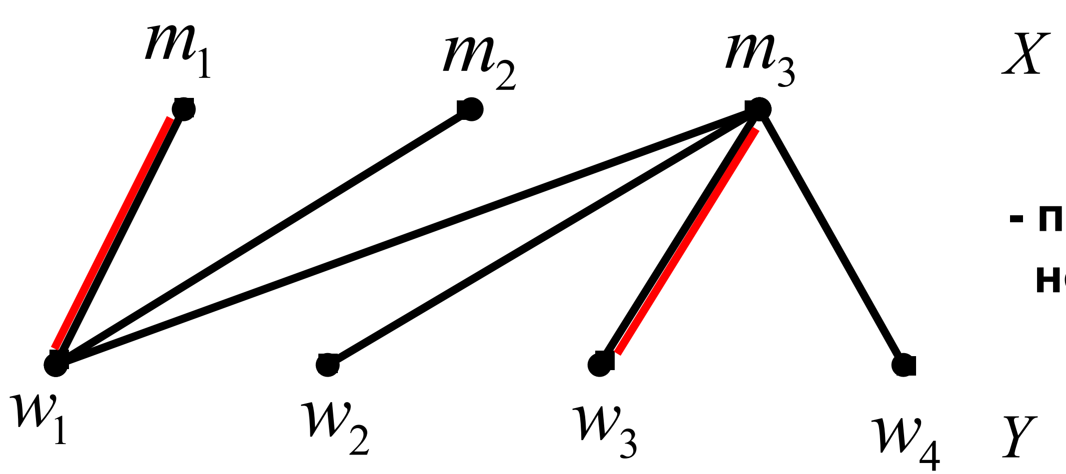
- паросочетание *M* максимально, но не совершенно

$$|X| = 4; \quad |M| = 3$$

Пример № 2.



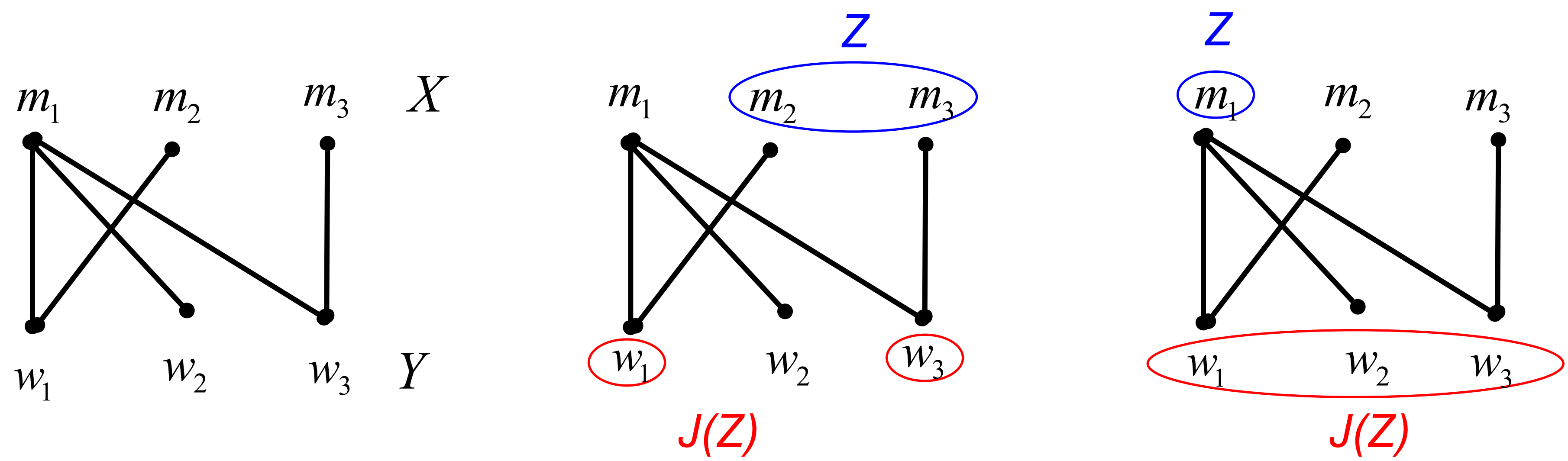
- двудольный граф



- паросочетание *M* максимально, но не совершенно

$$|X| = 3; \quad |M| = 2$$

Когда в двудольном графе существует совершенное паросочетание?



Z **- подмножество мужчин**

J(Z) **- подмножество потенциальных партнерш для мужчин из подмножества *Z* (потенциальное подмножество)**

<u>Теорема.</u> Двудольный граф имеет совершенное паросочетание, если и только если для каждого подмножества мужчин *Z* мощность соответствующего подмножества потенциальных партнерш *J(Z)* больше или равна мощности *Z*.

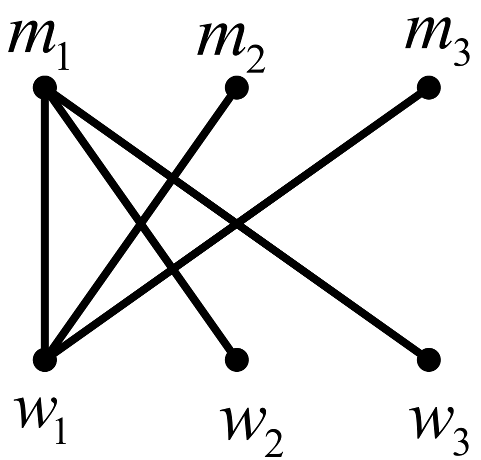
$$\boxed{\forall Z \subseteq X : \quad |J(Z)| \geq |Z|}$$

- условие Холла (1935 год)

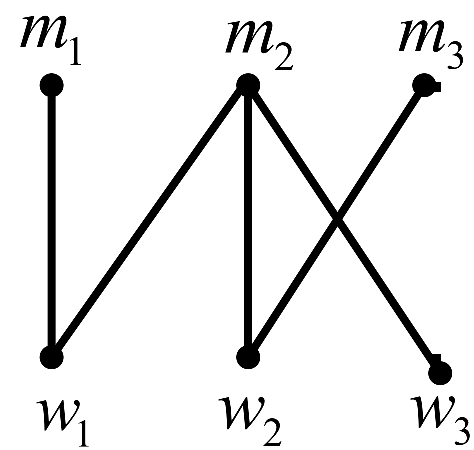
Phillip Hall (1904 – 1982) – английский математик

Пример.

Граф G_1



Граф G_2

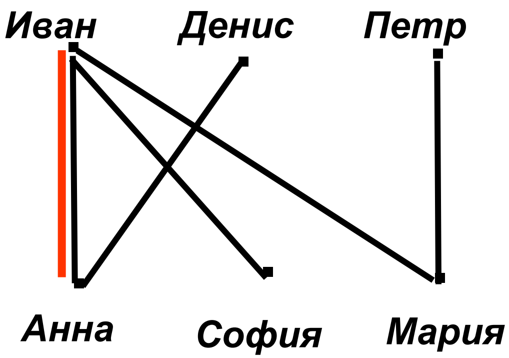


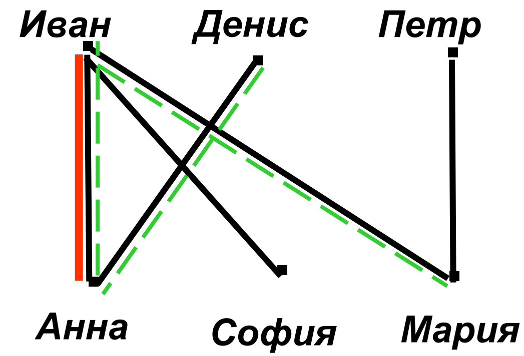
Z	$J_1(Z)$	$J_2(Z)$
$\{m_1, m_2, m_3\}$	$\{w_1, w_2, w_3\}$	$\{w_1, w_2, w_3\}$
$\{m_1, m_2\}$	$\{w_1, w_2, w_3\}$	$\{w_1, w_2, w_3\}$
$\{m_1, m_3\}$	$\{w_1, w_2, w_3\}$	$\{w_1, w_2\}$
$\{m_2, m_3\}$	$\{w_1\}$	$\{w_1, w_2, w_3\}$
$\{m_1\}$	$\{w_1, w_2, w_3\}$	$\{w_1\}$
$\{m_2\}$	$\{w_1\}$	$\{w_1, w_2, w_3\}$
$\{m_3\}$	$\{w_1\}$	$\{w_3\}$

условие Холла не выполняется

условие Холла выполняется

<u>Определение</u>. Цепь вида $(x_0y_1),(y_1x_1),(x_1y_2),(y_2x_2),\ldots,(x_{k-1}y_k)$ называется **чередующейся цепью** для паросочетания *M*, если дуги вида (y_ix_i) находятся в *M*, а дуги вида $(x_{i-1}y_i)$ паросочетанию *M* не принадлежат.

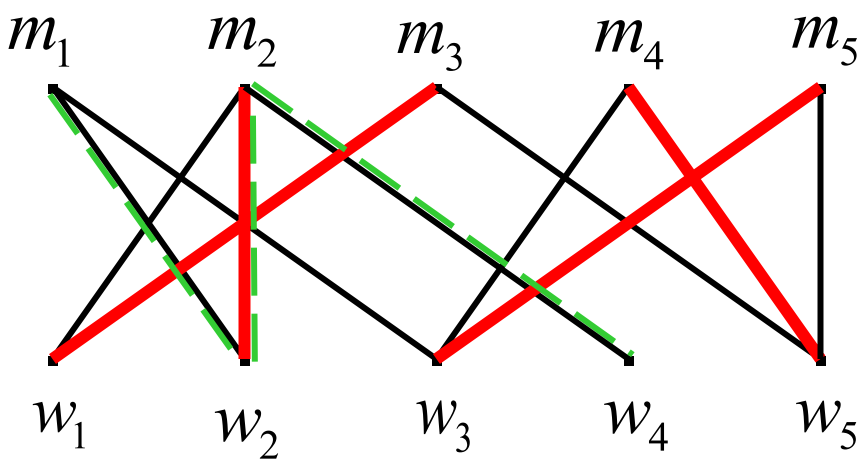




- паросочетание

-чередующаяся цепь

Примеры чередующейся цепи:

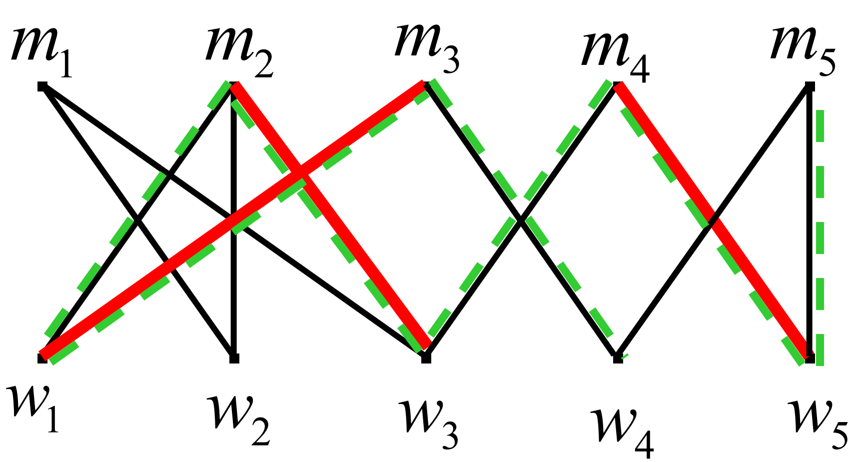


$$(m_1, w_2), (w_2, m_2), (m_2, w_4)$$

не принадлежит паросочетанию

принадлежит паросочетанию

не принадлежит паросочетанию



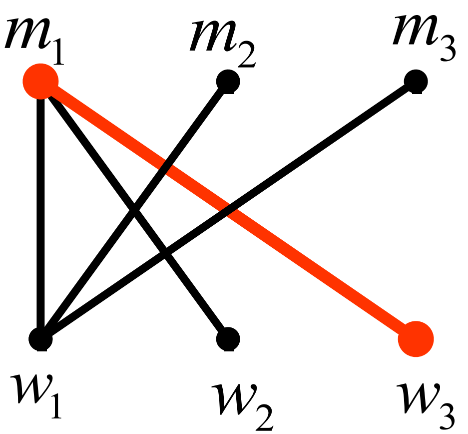
$$(m_5, w_5), (w_5, m_4), (m_4, w_3), (w_3, m_2),$$
$$(m_2, w_1), (w_1, m_3), (m_3, w_4)$$

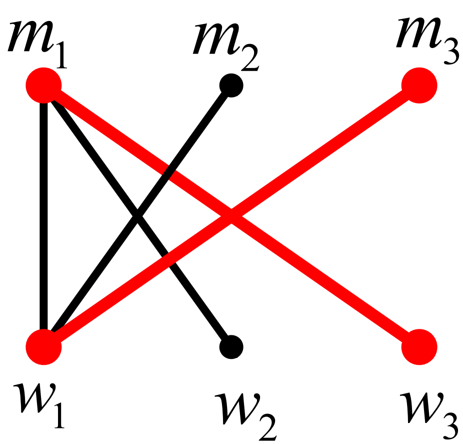
Теорема. Если в двудольном графе паросочетание *M* не максимально, то двудольный граф содержит чередующуюся цепь для *M.*

Алгоритм поиска максимального паросочетания

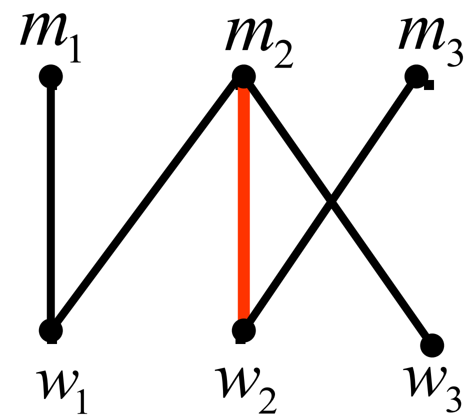
1. Взять любое паросочетание *M* (даже содержащее всего одну дугу).
2. Найти чередующуюся цепь для *M.*
3. Если такая цепь найдена, то построить паросочетание *M ‘*, содержащее на одну дугу больше, чем *M.*
4. Повторить пункт 2 для паросочетания *M ‘*.
5. Если чередующаяся цепь не найдена, то *M’* – максимальное паросочетание*.*

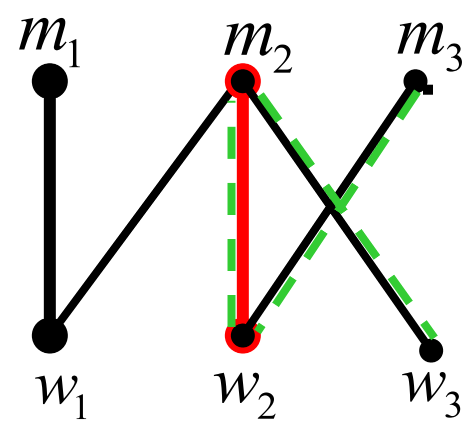
Граф G_1

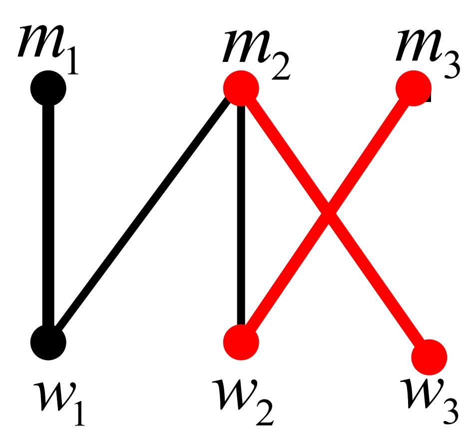




Граф G_2







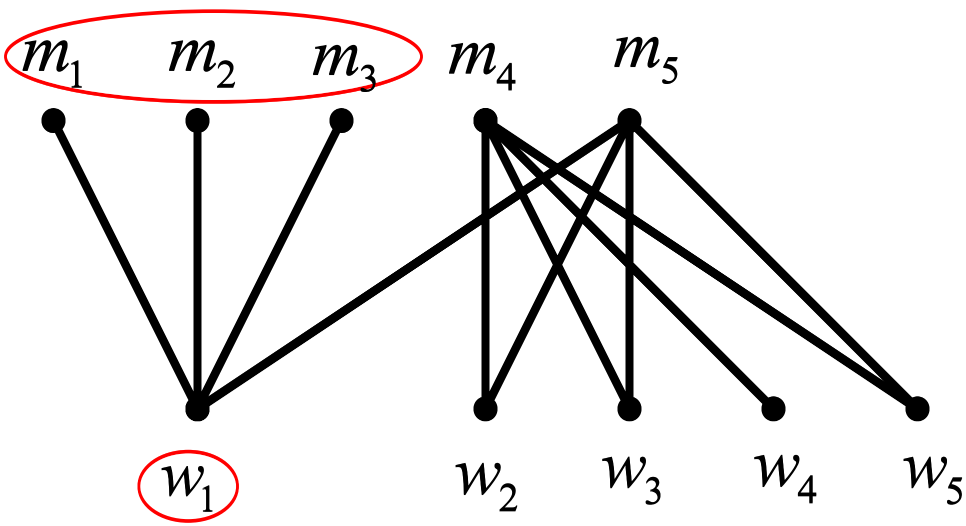
Определение. **Дефицитом двудольного графа называется величина**

$$d = \max_{Z \subseteq X}(|Z| - |J(Z)|)$$

Теорема. Совершенное паросочетание в двудольном графе существует тогда и только тогда, когда $d = 0$

Теорема. Мощность максимального паросочетания *M* в двудольном графе равна $|M| = |X| - d$

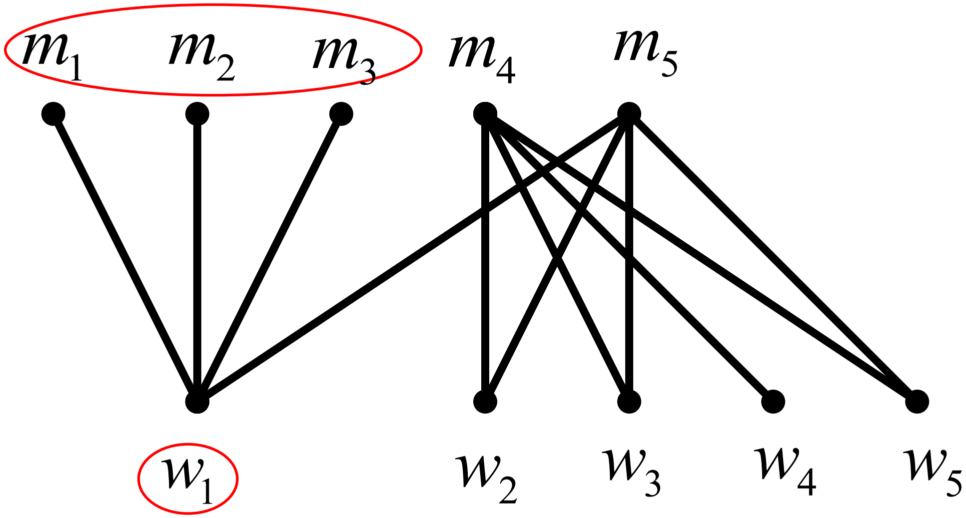
Пример.



$$|X| = |5|$$

$$d = \max_{Z \subseteq X}(|Z| - |J(Z)|) = 3 - 1 = 2$$

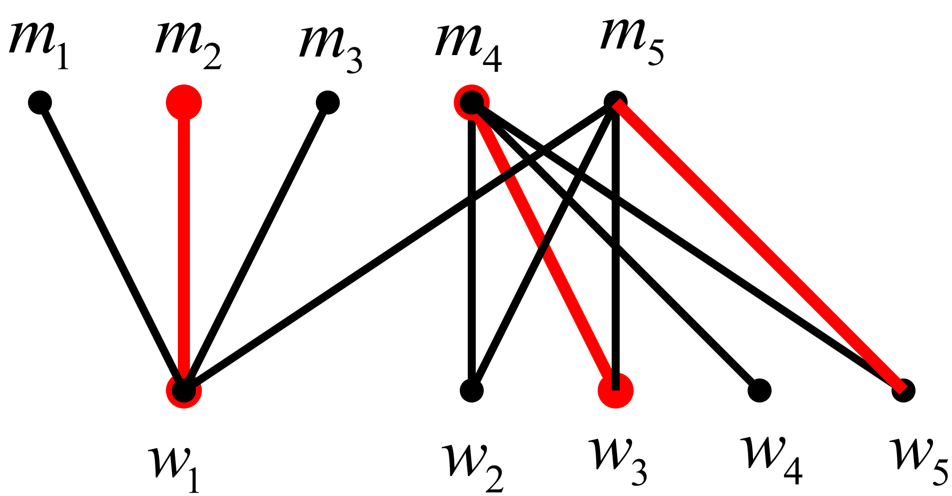
$$|M| = 5 - 2 = 3$$



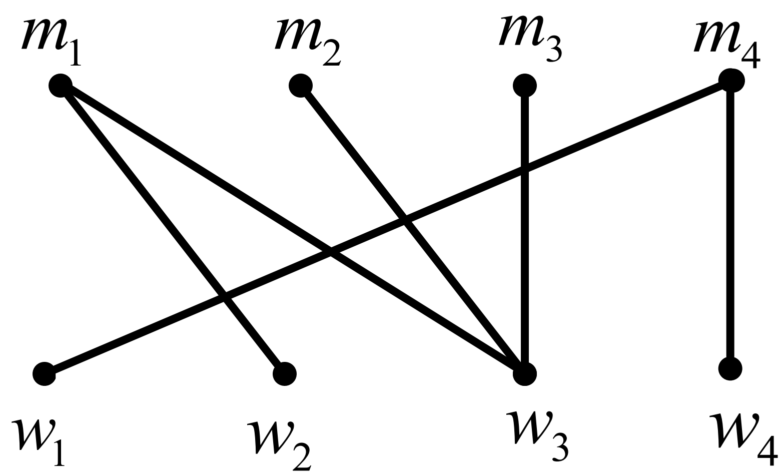
$$|X| = |5|$$

$$d = \max_{Z \subseteq X}(|Z| - |J(Z)|) = 3 - 1 = 2$$

$$|M| = 5 - 2 = 3$$



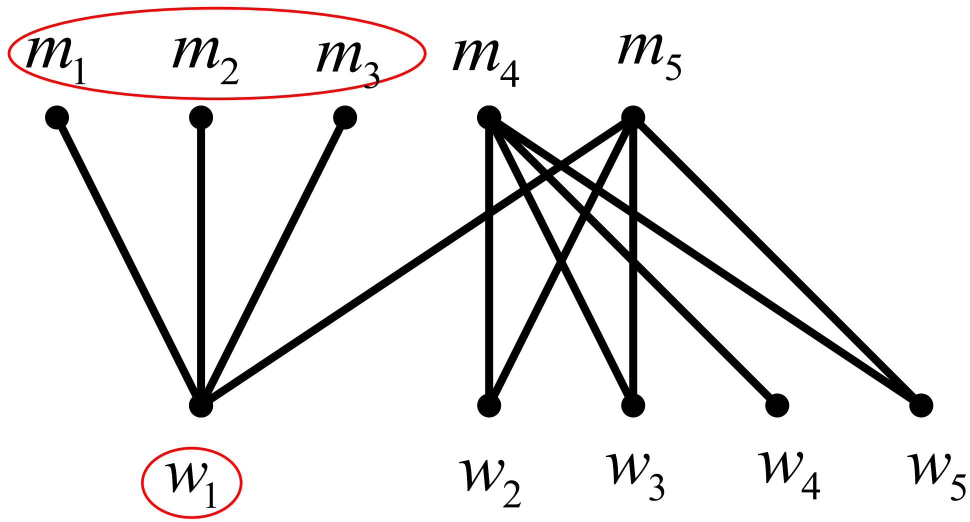
Вычисление дефицита графа



Z	$\lvert J(Z)\rvert$	$\lvert Z\rvert - \lvert J(Z)\rvert$
$\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	**0**
$\{m_1, m_2, m_3\}$	$\{w_2, w_3\}$	**1**
$\{m_1, m_2, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	**-1**
$\{m_1, m_3, m_4\}$	$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	**-1**
...	...	...
$\{m_3\}$	$\{w_3\}$	**0**
$\{m_4\}$	$\{w_1, w_4\}$	**-1**

Мощность максимального паросочетания:

$d = \max\limits_{A \subseteq X}(\lvert A\rvert - \lvert J(A)\rvert) = 1$ - дефицит графа $\Longrightarrow$ $\lvert M\rvert = \lvert X\rvert - d = 4 - 1 = 3$



$$d = \max_{A \subseteq X}\left(|A| - |J(A)|\right) = 3 - 1 = 2$$

Трансверсаль семейства множеств

Множество различных представителей семейства множеств называется трансверсалью семейства множеств

Семейство множеств: {Иван, Олег, Сергей} ; {Олег, Глеб} ; {Иван, Олег, Алексей}

Трансверсалью этого семейства множеств является множество {Иван, Олег, Алексей}

а также: { Сергей, Глеб, Иван}

а также: {Иван, Глеб, Алексей}

Семейство множеств: {Иван, Олег, Глеб} ; {Олег, Сергей} ; {Олег, Сергей} ; {Олег, Сергей}

не имеет трансверсали.

Трансверсаль семейства множеств

A, B, C, D, E, F - преподаватели

Комиссии:

Методическая комиссия: *A, B*
Финансовая комиссия: *A, C*
Научная комиссия: *A, B, C*
Студенческая комиссия: *D, E, F*

Ученый совет:

Методическая комиссия: ***B***
Финансовая комиссия: ***C***
Научная комиссия: ***A***
Студенческая комиссия: ***E***

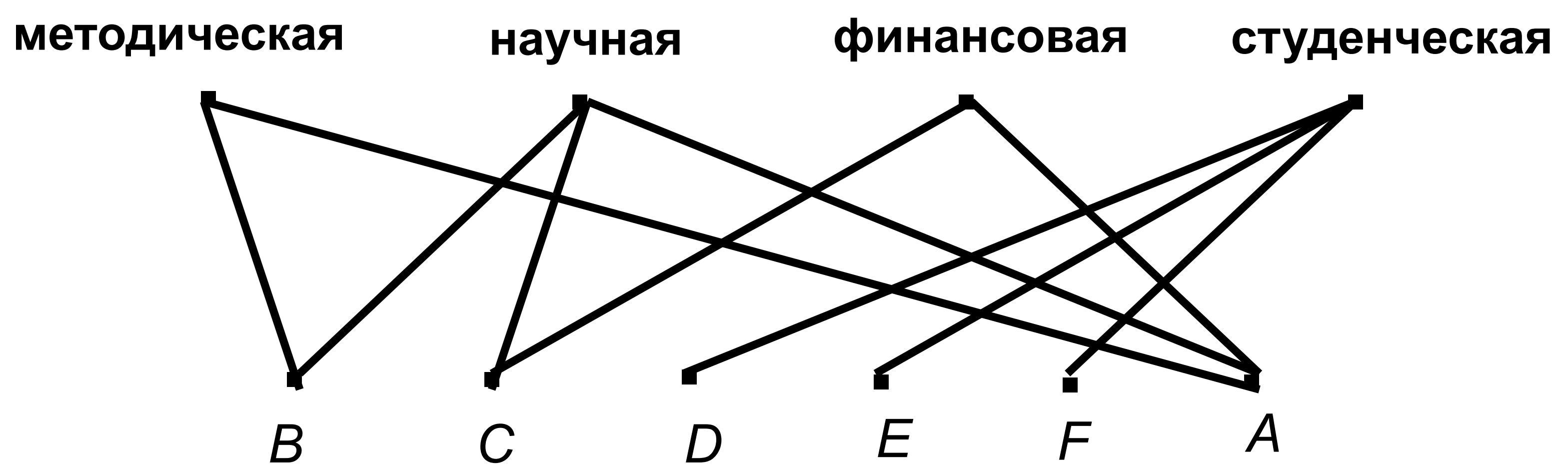
Множество различных представителей семейства множеств называется **трансверсалью** семейства множеств

Множество $\{A, B, C, E\}$ - трансверсаль семейства множеств

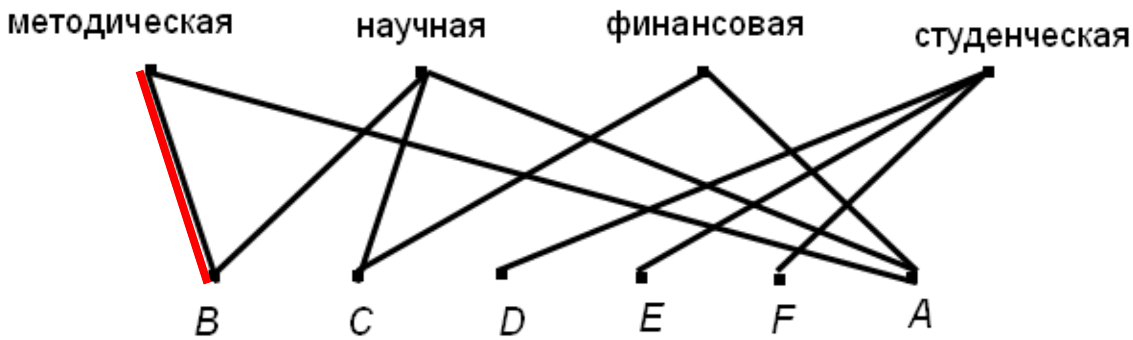
$$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, B, C\}, \{D, E, F\}$$

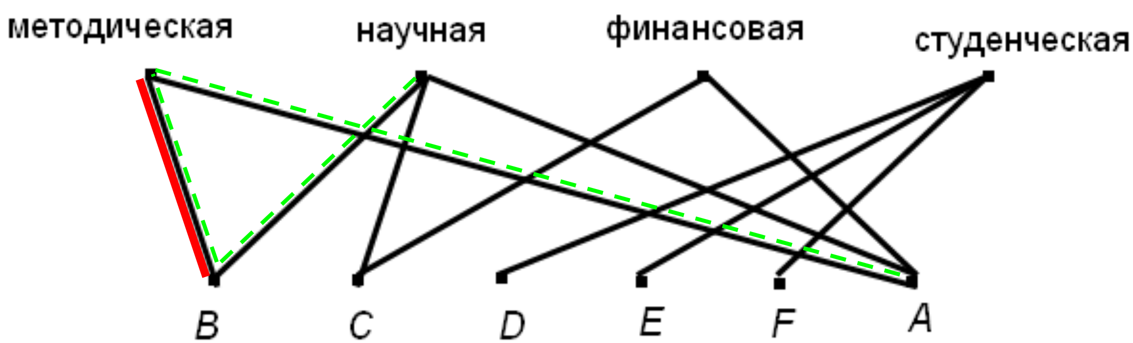
<u>Комиссии:</u>

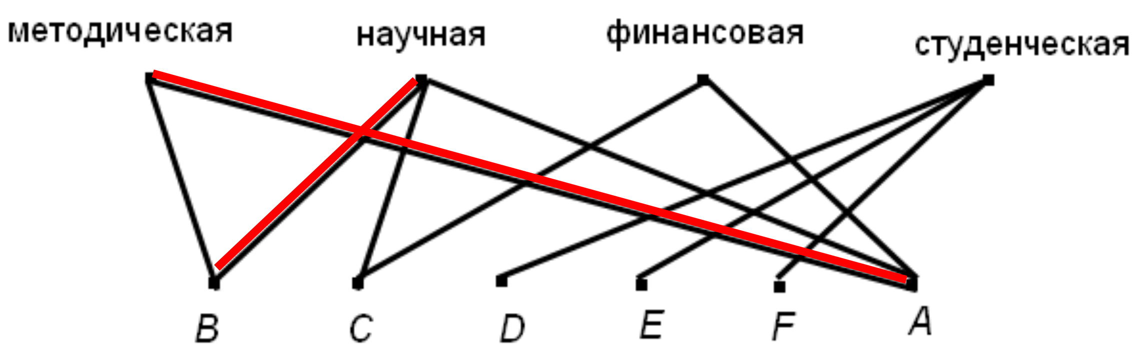
Методическая комиссия: *A, B*
Финансовая комиссия: *A, C*
Научная комиссия: *A, B, C*
Студенческая комиссия: *D, E, F*

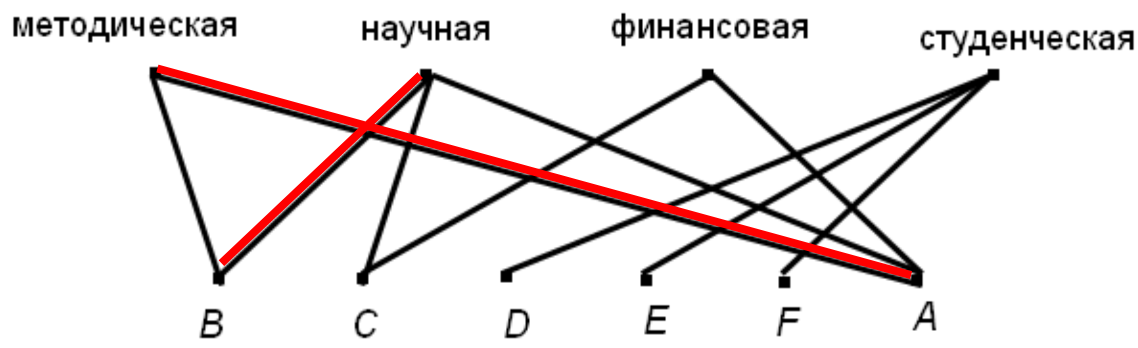


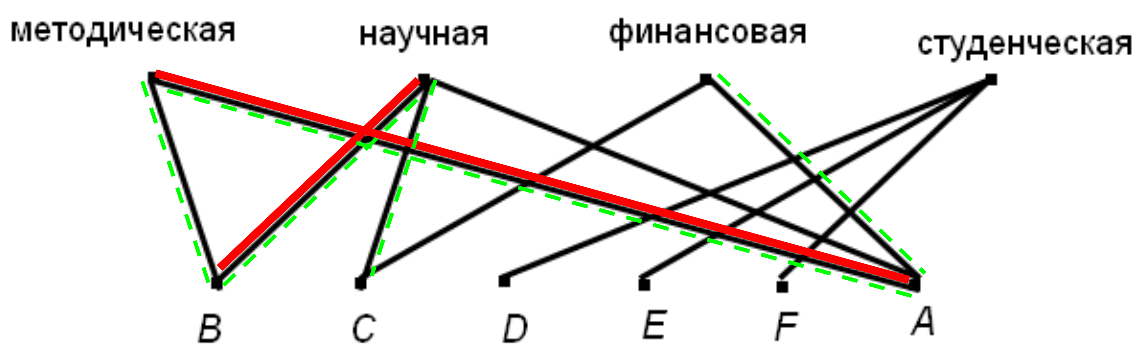
Трансверсаль семейства множеств существует, если существует совершенное паросочетание на этом двудольном графе.

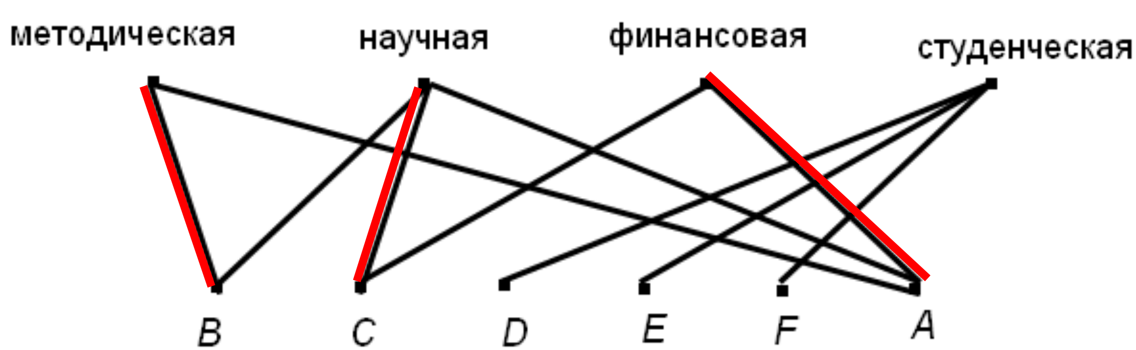

методическая
научная
финансовая
студенческая
B
C
D
E
F
A

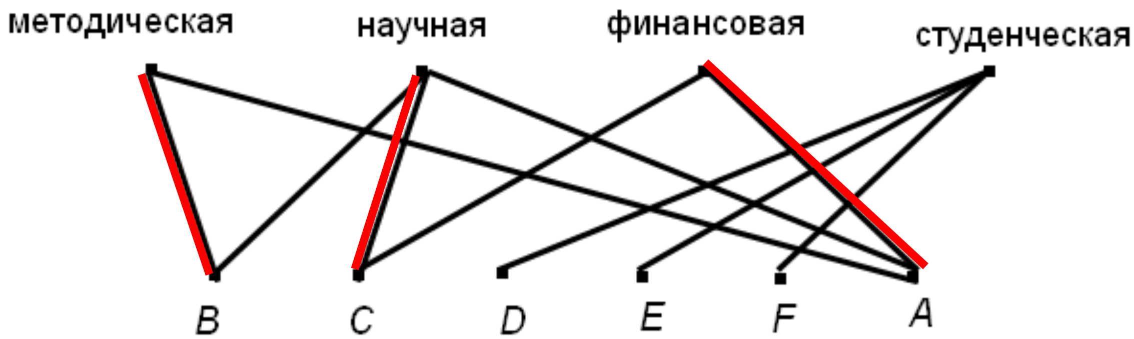

методическая
научная
финансовая
студенческая
B
C
D
E
F
A

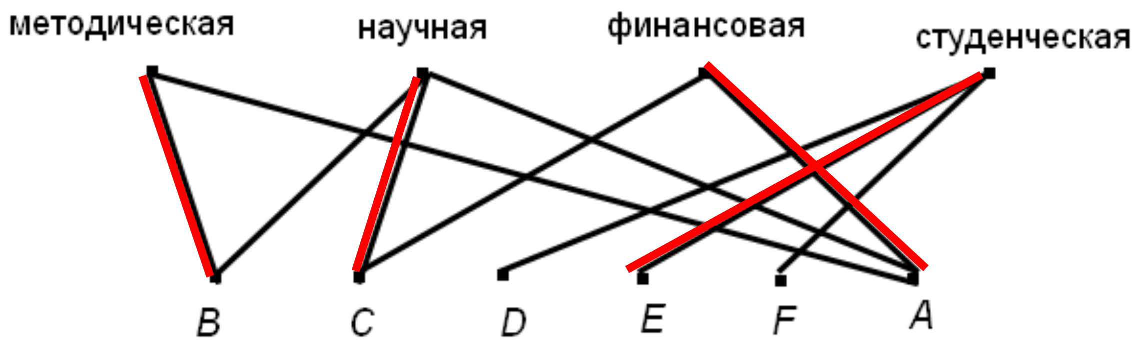

методическая
научная
финансовая
студенческая
B
C
D
E
F
A


методическая
научная
финансовая
студенческая
B
C
D
E
F
A


методическая
научная
финансовая
студенческая
B
C
D
E
F
A


методическая
научная
финансовая
студенческая
B
C
D
E
F
A

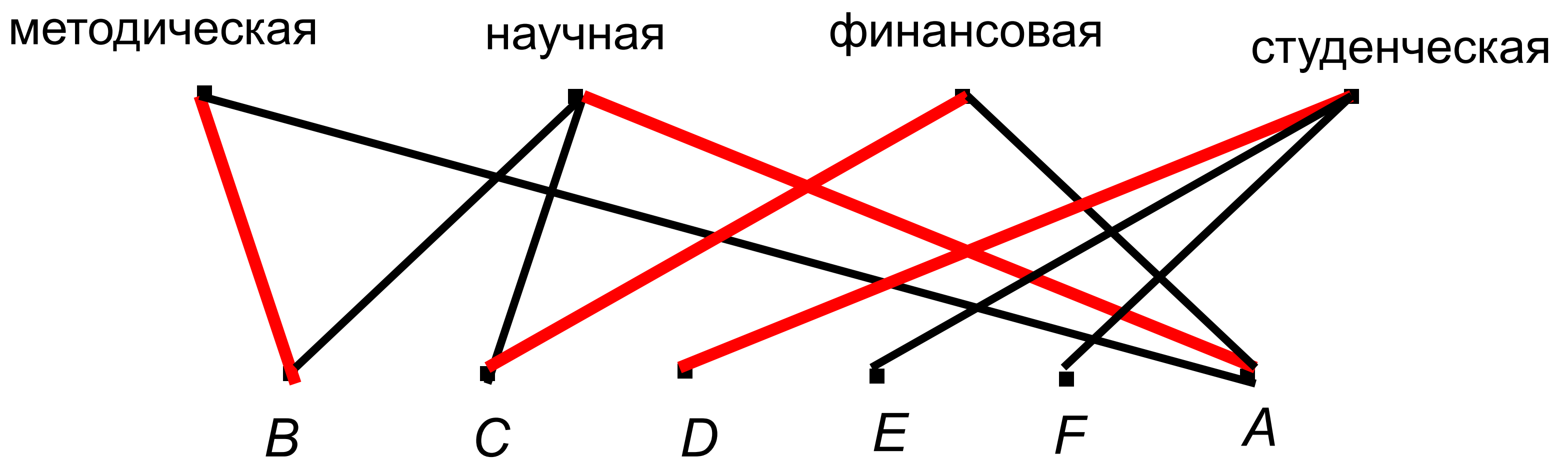




Множество $\{A, B, C, E\}$ - трансверсаль семейства множеств

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, B, C\}, \{D, E, F\}$

Комиссии



Условие Холла: $\forall Z \subseteq X \quad \left|J(Z)\right| \geq \left|Z\right|$

Семейство множеств (в данном случае множествами являются комиссии, а элементами множеств являются преподаватели) имеет трансверсаль если:

любые *K* комиссий должны иметь не менее *K* преподавателей.