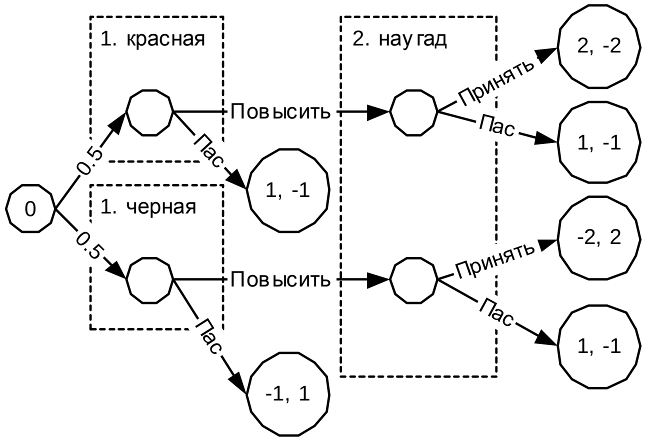
Игры в развернутой форме

Развернутая форма – естественный способ представления *салонных игр*, вроде шахмат или преферанса. Однако и другие игры (по крайней мере, дискретные), обычно сначала рассматриваются в развернутой форме.



Для описания игры n лиц в развернутой форме необходимо определить:

1) Дерево, ребрам и вершинам которого присвоены следующие метки:

2) Каждой терминальной вершине F_i ставится в соответствие метка-«вектор выигрышей», то есть числовой вектор $f(F_i)=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ (размерности n) выигрышей (полезностей) игроков.

3) Каждой нетерминальной вершине ставится в соответствие метка контроля – номер игрока $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$, контролирующего вершину. Если данную вершину контролирует природа (внешние обстоятельства, случай и т.д.), то эта метка равна нулю.

4) Каждой нетерминальной вершине ставится в соответствие метка информационного состояния игрока (обычно она отделяется от номера игрока точкой).

5) Каждое ребро помечено возможными альтернативами, доступными для выбора игрока, контролирующего вершину, из которой выходит данное ребро. Если вершину контролирует природа, метки должны обозначать вероятности реализации данной альтернативы, причем сумма вероятностей должна равняться единице.

6) Набор исходящих ребер множества вершин с одним информационным состоянием имеет одинаковый набор маркировок.

Определение: Игрой в развернутой форме называется система 1-6.

Игры в нормальной форме

В отличие от довольно сложной постановки игры, рассмотренной выше, постановка игры в нормальной форме сравнительно проста. Предполагается, что игроки имеют возможность лишь один раз выбрать альтернативу (действие) из *множества возможных действий*. Также предполагается, что выбор действия игроки производят одновременно и независимо друг от друга, не зная выбора противников. После выбора всех действий реализуется определенный исход. Каждому исходу соответствуют значения полезности игроков, их выигрыши.

Всем игрокам известны как зависимость их выигрышей от исхода игры, так и выигрыши противников. То есть в таком виде определение игры в нормальной форме подходит только для игр с полной информированностью.

В соответствии с введенной выше классификацией, среди игр в нормальной форме можно выделить *антагонистические игры*, в которых сумма выигрышей игроков при любом исходе равна нулю, и *игры с непротивоположными интересами*, в которых сумма выигрышей может быть различной для разных ситуаций.

Определение: *Игрой в нормальной форме* n лиц с произвольной суммой называется система $\Gamma = (X_i, K_i, i \in N)$, где X_i – непустые множества действий, K_i – функции выигрыша игроков, K_i: $X_1 \times \ldots \times X_n \to \Re^1$.

Обычно множества действий считаются *компактами*, то есть *ограниченными и замкнутыми множествами*. Определения замкнутости и ограниченности подразумевают, что на множестве действий определено понятие сходимости, то есть задана, как минимум, топология. Часто в доказательствах необходимо наличие метрики на множестве действий. На практике множества действий игроков обычно представляют собой подмножества векторного пространства, для которых можно использовать евклидову метрику.

Пример «Семейный спор».

Муж и жена решают, куда им пойти – на футбольный матч или в театр. Если они не договариваются, то остаются дома. Первое действие каждого из игроков соответствует поездке на футбольный матч, второе – в театр. Биматрица игры записывается так (первое число пары соответствует выигрышу мужа, второе – выигрышу жены): $A = \begin{bmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{bmatrix}$.

Переход от игры в развернутой форме к игре в нормальной форме

Постановка игры в нормальной форме гораздо проще для изучения и формализации, чем игра в развернутой форме, поэтому ниже будут рассматриваться только решения игр в нормальной форме. Для игр же в развернутой форме построим формальную процедуру перехода от них к играм в нормальной форме.

Определение: *Стратегией* игрока для игры в развернутой форме называется функция, отображающая множество информационных состояний игрока на множество его ходов таким образом, что каждому информационному состоянию ставится в соответствие один из возможных в данном состоянии ходов.

Множество стратегий каждого игрока будем обозначать X_i. Элементы x декартова произведения множеств стратегий всех игроков будем называть профилями стратегий, а само декартово произведение будем обозначать X.

Для каждой вершины Q графа игры в развернутой форме и каждого профиля стратегий $x \in X$ определим вероятность $P(Q|x)$ реализации данного состояния Q при использовании игроками стратегий x с помощью рекуррентной процедуры, а именно:

- если Q – корневая вершина, то, для произвольных x, $P(Q|x) = 1$;
- если вершина R предшествует вершине Q в графе игры, переход из R в Q определяется природой и происходит с вероятностью p, то $P(Q|x) = P(R|x)\, p$;
- если вершина R предшествует Q в графе игры и переход из R в Q определяется одним из игроков, то $P(Q|x) = P(R|x)$ в случае, если данный переход содержится в профиле стратегий игроков, в противном случае $P(Q|x) = 0$.

Таким способом для каждой терминальной вершины F_i можно определить соответствующие вероятности $P(F_i|x)$ попадания в них при условии использования игроками профиля стратегий x.

Ожидаемые значения выигрышей игроков при использовании ими профиля x по формуле

$$K_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{F_j} f_i(F_j) P(F_j|x),$$

Можно определить игру в нормальной форме, которая соответствует исходной игре в развернутой форме. Множество игроков новой игры совпадает с множеством игроков исходной игры, множествами действий будут определенные выше множества стратегий X_i, а функция выигрыша определяется формулой. Эта игра вполне эквивалентна в исследовании исходной игре в развернутой форме и, если определить, что для нормальной формы игры целесообразными является набор действий $x \in X$, тем самым полностью определяется и поведение игроков в исходной игре.

Поскольку выше было дано описание лишь дискретных игр в развернутой форме, то и получающиеся с помощью рассмотренной процедуры игры в нормальной форме также будут дискретными.

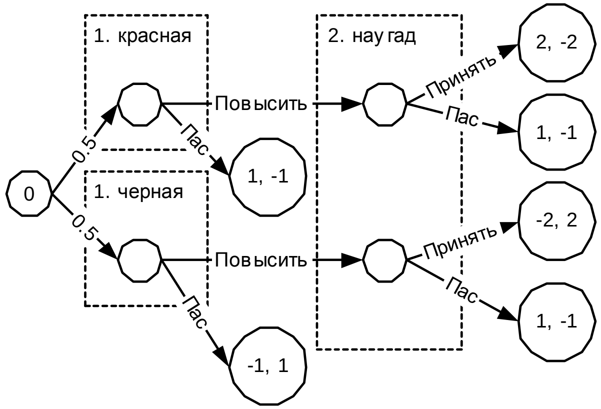
Пример: построение игры в нормальной форме для игры в развернутой форме «Минипокер».

Игрок 1 имеет два информационных состояния: он знает, каков цвет выбранной карты. Его стратегиями будут: {(повысить, повысить), (повысить, пасовать), (пасовать, повысить), (пасовать, пасовать)}. В этих парах первый элемент означает действие игрока в случае выпадения красной, второй – в случае выпадения черной карты.

Второй игрок имеет одно информационное состояние и две возможных стратегии {(Принять), (Пасовать)}.

Нормальная форма игры, построенная с учетом усреднения полезности по состояниям природы (цвета выбранной карты) тогда будет следующей:

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cc} \quad\textit{Принять} & \textit{Пасовать} \end{array} \\
\begin{array}{r} \textit{Повысить, повысить} \\ \textit{Повысить, пасовать} \\ \textit{Пасовать, повысить} \\ \textit{Пасовать, пасовать} \end{array} &
\begin{pmatrix} (0,0) & (1,-1) \\ (0.5,-0.5) & (0,0) \\ (-0.5,0.5) & (1,-1) \\ (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}
\end{array}$$



Смешанные стратегии

При построении нормальной формы игры по ее развернутой форме, множества стратегий развернутой игры превращаются во множества действий игры в нормальной форме. Зачастую действие игрока в игре в нормальной форме также называют *стратегией*. Это не совсем верно. Обычно термин «стратегия» имеет более широкий смысл и используется для обозначения плана, который каждый игрок составляет до начала игры. Этот план описывает все действия, которые игрок будет предпринимать во всех возможных игровых состояниях. Стратегия игроков даже в игре в нормальной форме может быть более сложной, чем просто выбор одного из элементов множества действий X_i (стратегия, состоящая в выборе действия из множества X_i, называется *чистой стратегией*).

В играх в развернутой форме для тех ходов, которые делала природа, указывалась вероятность того или иного ее «хода».

Аналогично и игроки могут не выбирать в каждой ситуации некоторое единственное действие, а выбирать одно из действий с некоторой вероятностью. Тогда выбор игрока будет описываться вероятностным распределением на множестве возможных в данной игровой ситуации действий, которое называется *смешанной стратегией*. Возможность использования игроками смешанных стратегий играет немалую роль в доказательстве существования решения теоретико-игровых задач.

Определение: *Смешанной стратегией* χ_i i-го игрока ($i \in N$) для игры в нормальной форме называется распределение вероятности на множестве действий X_i с плотностью $\chi_i(x_i)$, где $x_i \in X_i$.

Определение: Вектор действий $x_{-i} = (x_1,...,x_{i-1}, x_{i+1},...,x_n)$ всех игроков, кроме i-го, называется *обстановкой игры для i-го игрока* ($i \in N$).

Определение: Распределение вероятности (с плотностью $\chi_{-i}(x_{-i}) = \prod_{j \neq i} \chi_j(x_j)$) появления заданной обстановки при использовании игроками смешанных стратегий χ_j называется *обстановкой в смешанных стратегиях для i-го игрока*, $i \in N$.

Ожидаемый выигрыш игроков при использовании ими смешанных стратегий будет вычисляться как математическое ожидание их функции выигрыша. Для дискретных игр

$$\tilde{K}_i(\chi) = \sum_{x_i \in X_i} \sum_{x_{-i} \in X_{-i}} K_i(x_i, x_{-i}) \chi_i(x_i) \chi_{-i}(x_{-i}), \; i \in N .$$

Смешанная стратегия для непрерывных игр представляет собой вероятностную меру на множестве чистых стратегий игрока. Ожидаемая полезность игроков при использовании ими смешанных стратегий будет интегралом функции полезности по декартову произведению этих вероятностных мер.

Дискретную игру, в которой игроки используют смешанные стратегии, можно привести к непрерывной игре, в которой игроки используют только чистые стратегии:

множества чистых стратегий игрока заменяются на множество его смешанных стратегий

функции выигрыша заменяется на ее математическим ожиданием

Лемма. Ожидаемая полезность дискретной игры – непрерывная функция смешанных стратегий.

Теорема

Для произвольной обстановки в смешанных стратегиях найдется чистая стратегия, являющаяся «наилучшим ответом» на данную обстановку, то есть

$$\forall \chi_{-i} \quad \max_{\chi_i} K(\chi_i, \chi_{-i}) = \max_{x_i \in X_i} K(x_i, \chi_{-i}).$$

Более того, любая смешанная стратегия χ_i, которая содержит с ненулевой вероятностью чистую стратегию, не являющуюся лучшим ответом на обстановку χ_{-i}, не будет и сама лучшим ответом на обстановку χ_{-i}.

Доказательство.

Множество смешанных стратегий – это компакт, в котором содержатся и чистые стратегии. Для игрока i зафиксируем обстановку в смешанных стратегиях χ_{-i}.

Ожидаемый выигрыш игрока i будет функцией только его смешанной стратегии χ_i. Очевидно, существует смешанная стратегия χ_i^*, при использовании которой ожидаемый выигрыш достигает максимума (значком $\sum_{x_i \in X_i}$ обозначается суммирование по всем элементам множества X_i).

Для стратегии χ_i^* ожидаемый выигрыш есть

$$K_i(\chi_i^*, \chi_{-i}) = \sum_{x_i \in X_i} \chi_i^*(x_i) \sum_{x_{-i} \in X_{-i}} K_i(x_i, x_{-i}) \chi_{-i}(x_{-i}).$$

Так как $\sum_{x_i \in X_i} \chi_i^*(x_i) = 1$, то $K_i(\chi_i^*, \chi_{-i})$ представляет собой взвешенную с весами $\chi_i^*(.)$ сумму величин

$$\tilde{K}_i(x_i) = \sum_{x_{-i} \in X_{-i}} K_i(x_i, x_{-i}) \chi_{-i}(x_{-i}).$$

Взвешенная сумма не может превышать своего максимального слагаемого

Существует чистая стратегия x_i^{**}, для которой $\tilde{K}_i(x_i^{**}) \geq K_i(\chi_i^*, \chi_{-i})$.

Различные концепции решения игр

Решением игры в самом общем смысле можно назвать любое описание того, каким образом должны вести себя игроки в той или иной игровой ситуации. Это не обязательно должен быть набор рекомендуемых для каждого игрока действий. Решением, например, может быть набор исходов игры. Такое решение можно интерпретировать как набор ситуаций, рациональных относительно некоторых предположений о поведении игроков. То есть при рациональном поведении игроков должны реализовываться только ситуации, принадлежащие решению. Решением игры может быть и набор смешанных стратегий, если одних только чистых стратегий недостаточно.

Формулировка концепции решения:

Шаг 1. Определить аксиомы, фиксирующие некоторое представление о рациональном поведении.

Шаг 2. Проверить, что аксиомы не противоречат друг другу.

Шаг 3. Убедиться, что аксиомы позволяют сузить множество рассматриваемых игроками альтернатив.

Шаг 4. На основе введенных аксиом построить механизм нахождения решения игры.

Шаг 5. Исследовать свойства решений: их существование для всех (или некоторых) классов игр, единственность решения и т.д.

Шаг 6. Разработать алгоритмы вычисления решения.

Известные на сегодняшний день концепции решения обладают одним из двух недостатков: либо решение существует не для всех игр, либо существуют игры, для которых это решение противоречит здравому смыслу. Трудности с поиском приемлемой общей концепции решения привели к появлению многочисленных частных концепций, удовлетворяющих требованиям здравого смысла, но существующих только для ограниченного класса игр.

Удаление доминируемых стратегий

Для вектора стратегий (x_1, x_2, …, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, …, x_n) используется обозначение ($y_i|x_{-i}$).

Определение: Стратегия $x_i \in X_i$ называется *строго доминируемой* стратегией игрока *i*, если существует стратегия $y_i \in X_i$ такая, что для произвольной обстановки x_{-i}, выполняется неравенство $K_i(y_i, x_{-i}) > K_i(x_i, x_{-i})$.

Определение: Стратегия $x_i \in X_i$ называется *строго недоминируемой* стратегией игрока *i*, если для произвольной стратегии $y_i \in X_i$ найдется обстановка x_{-i} такая, что $K_i(y_i, x_{-i}) \le K_i(x_i, x_{-i})$.

Для любой дискретной игры множество строго недоминируемых стратегий для каждого игрока не пусто. Действительно, поскольку отношение доминирования транзитивно, а стратегий конечное число, всегда найдется недоминируемая стратегия.

Множество недоминируемых стратегий непусто и в случае бесконечных компактных множеств стратегий и функций выигрыша, непрерывных по всем переменным.

Точно так же, как для чистых стратегий, можно определить и доминирование смешанных стратегий. Одна смешанная стратегия доминируется другой, если для произвольного профиля смешанных стратегий остальных игроков ожидаемая полезность от использования первой смешанной стратегии ниже, чем от использования второй стратегии.

Во многих практически интересных играх все стратегии строго недоминируемы.

Применение к анализу игры оправданно на первоначальном этапе, когда, за счет исключения из рассмотрения доминируемых стратегий, исследование игры упрощается.

Равновесие в доминантных стратегиях

Определение: Стратегия x_i^* называется *доминантной стратегией игрока i*, если для любой обстановки $x_{-i} \in X_{-i}$ и для любых $x_i \in X_i$ справедливо неравенство $K_i(x_i^* \mid x_{-i}) \geq K_i(x_i | x_{-i})$

Определение: Если для каждого игрока *i* существует доминантная стратегия x_i^*, то исход $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$ называется *равновесием в доминантных стратегиях* (*РДС*).

Равновесие в доминантных стратегиях существует далеко не для всех игр. Приведем несколько лемм, определяющих некоторые классы игр, в которых существует равновесие в доминантных стратегиях.

Лемма. Если в игре *n* лиц $x_i \in [a_i, b_i]$, функции выигрыша непрерывны по совокупности стратегий и для каждого игрока частная производная $\frac{\partial K_i}{\partial x_i}(x_i, x_{-i})$ существует и везде знакопостоянна, то существует РДС. При этом доминантной стратегия x_i^* *i*-го игрока будет стратегия

$$x_i^* = \begin{cases} a_i, \dfrac{\partial K_i}{\partial x_i} < 0 \\ b_i, \dfrac{\partial K_i}{\partial x_i} > 0 \end{cases}, \ i \in N.$$

Лемма. Если в игре *n* лиц $x_i = [a_i, b_i]$, а функция выигрыша произвольного игрока *i* *сепарабельна* по стратегии этого игрока, то есть

$$K_i(x_i, x_{-i}) = K_i^0(x_i) + K_i^1(x_{-i}), \ i \in N,$$

и $K_i^0(.)$ имеет единственный максимум на множестве действий X_i, то существует РДС, причем для игрока *i* его доминантная стратегия:

$$x_i^* = \arg\max_{x_i} K_i^0(x_i), \ i \in N.$$

Оптимальность по Парето

«Равновесие» Парето можно назвать, наверное, самым общим принципом рациональности.

Принцип В. Парето утверждает, что, если для ситуации x существует такая ситуация y, что выигрыш каждого из игроков при реализации ситуации y не меньше, чем при реализации ситуации x, и по крайней мере один игрок получает выигрыш, строго больший, то игроки предпочтут ситуацию y ситуации x.

<u>Определение:</u> Ситуация x^* в бескоалиционной игре Γ называется *оптимальной по Парето*, если для любой ситуации $x \neq x^*$, найдется игрок i, такой, что $K_i(x) < K_i(x^*)$.

Этот принцип представляется в некотором смысле полярным, противоположным к равновесию в доминантных стратегиях.

Если РДС представляет собой верх индивидуалистического поведения игроков, то равновесие Парето является критерием сотрудничества.

Как и удаление доминируемых стратегий, равновесие Парето обычно выделяет достаточно широкое множество ситуаций, в которых одновременно не может быть увеличен выигрыш всех игроков.

Тем не менее, очевидная рациональность оптимальных по Парето исходов приводит к мысли, что хорошая теоретико-игровая концепция решения должна считать рациональными только оптимальные по Парето исходы.

<u>Пример. «Сравнение оптимальности по Парето и РДС».</u>

Рассмотрим игру, в которой участвуют $n > 2$ игроков со стратегиями $x_i \in [0; 1]$. Функции выигрыша игроков: $K_i = x_i - \sum_{j \neq i} x_j$.

Так как целевые функции сепарабельны, доминантными стратегиями всех игроков являются стратегии $x_i = 1$

Выигрыши игроков при этом будут равны $K_i = 2 - n < 0$.

Равновесие в доминантных стратегиях не оптимально по Парето, поскольку при выборе, скажем, $x_i = 0$ все игроки получают нулевой выигрыш вместо отрицательного выигрыша в РДС.

Этот пример показывает, что стремление к общему благу может вступать в противоречие с индивидуальными интересами. Используя доминантные стратегии, все игроки обеспечивают себе меньший выигрыш, чем при использовании строго доминируемой стратегии $x_i = 0$.

Сравнение концепций решения