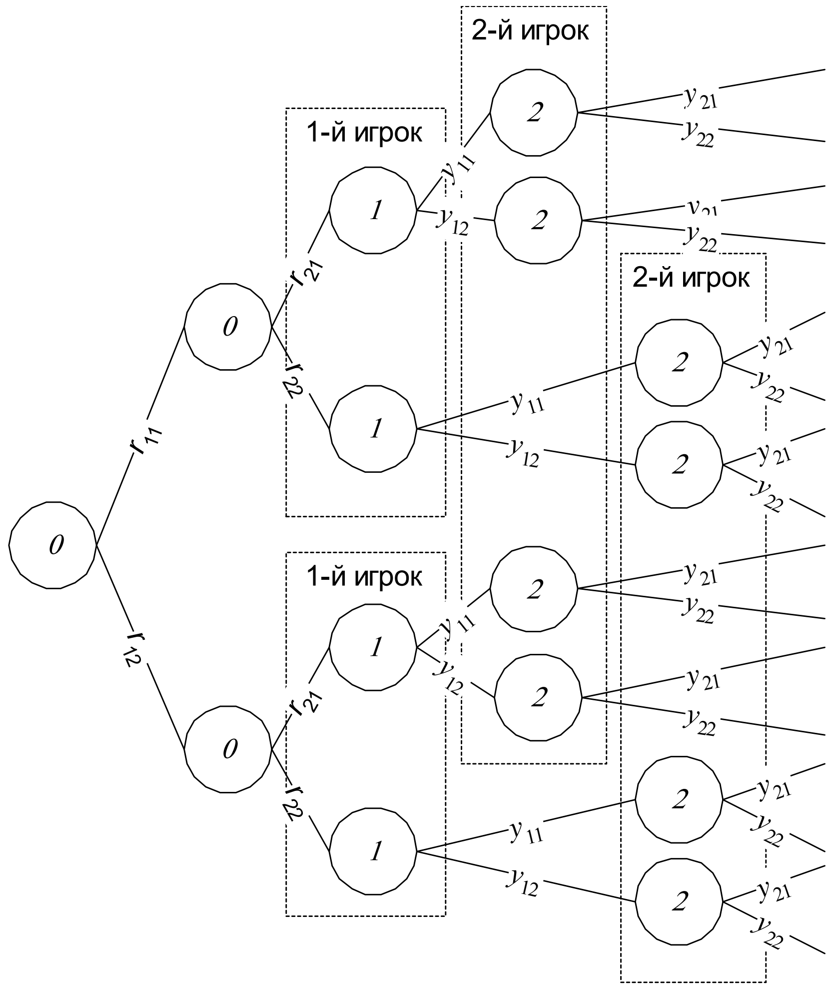
ИГРЫ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТЬЮ



Принцип максимального гарантированного результата

Принцип максимального гарантированного результата (МГР) – это один из самых общих принципов принятия решений в условиях интервальной неопределенности. В соответствии с принципом МГР неопределенность устраняется введением предположения, что неопределенные параметры принимают наихудшие для ЛПР значения.

Пусть игровая ситуация с точки зрения i-го игрока определяется вектором

$$z = (y_i,\ \theta,\ r),\ y_i \in A_i,\ \theta \in \Theta,\ r \in \Omega,$$

и его выигрыш $K_i = K_i(z)$ зависит от ситуации.

Пусть $y_i \in A_i$ – действие i-го игрока, и на момент принятия игроком решения о выборе стратегии ему известны значения параметров $\theta \in \Theta$. Об остальных параметрах информации не ожидается.

Тогда принцип МГР предлагает использование, так называемой, *гарантирующей стратегии*.

Определение 1: Гарантирующая стратегия i-го игрока – это стратегия, определяемая по формуле:

$$y_i^*(\theta) \in Arg \max_{y_i \in A_i} [\min_{r \in \Omega} K_i(y_i, \theta, r)].$$

Для того, чтобы найти гарантирующую стратегию i-го игрока, необходимо при фиксированных известных параметрах θ найти минимум функции выигрыша по неизвестным параметрам $r \in \Omega$, а затем максимизировать результат минимизации выбором действия y_i. Стратегия $y_i^*(\theta)$, на которой достигается максимум, и будет гарантирующей.

Вектор $(y_i^*(\theta))_{i \in N}$ гарантирующих стратегий игроков называется *максиминным равновесием*.

Неизвестные параметры могут иметь очень широкое содержательное наполнение: от информации о действиях других игроков, о виде их целевых функций, до информации о правилах игры.

Игра с неполной информацией.

Пусть на момент принятия решения каждому игроку известен его тип $r_i \in \Omega_i$, неизвестны типы других игроков $r_j \in \Omega_j$ $(j \neq i)$ и их стратегии. Если $K_i(y_1, \ldots, y_n, r_1, \ldots, r_n)$ – функция выигрыша i-го игрока, то его гарантирующей стратегией будет стратегия

$$y_i^*(r_i) \in Arg \max_{y_i \in A_i} [\min_{y_{-i} \in A_{-i},\, r_{-i} \in \Omega_{-i}} K_i(y_1,..., y_n, r_1,..., r_n)],\ i \in N.$$

Приведенное определение подходит и для игр с полной информированностью – гарантирующей стратегией i-го игрока в игре с полной информированностью будет стратегия

$$y_i^* = Arg \max_{y_i \in A_i} [\min_{y_{-i} \in A_{-i}} K_i(y_1,..., y_n)].$$

Для существования гарантирующей стратегии достаточно ограниченности функции выигрыша игрока и компактности множеств стратегий A_i и множеств типов игроков Ω_i, поэтому можно говорить, что гарантирующие стратегии существуют «почти всегда».

Еще одним преимуществом МГР является то, что для вычисления гарантирующей стратегии игрока i достаточно знать только функцию его выигрыша, и не нужно знание функций выигрыша других игроков.

Байесовы игры

Игра в форме Байеса (*или байесовой игре*).

Каждый игрок знает, помимо знания множества возможных типов противников, вероятность реализации того или иного профиля их типов,

Формально определяется следующим образом .

Пусть имеется n игроков.

Игрок i имеет тип $r_i \in \Omega_i$, принадлежащий множеству возможных типов Ω_i данного игрока.

Каждый игрок знает все множества $\{\Omega_i\}$, а также функцию

$$p_i(r_{-i}|r_i),$$

которая представляет собой плотность условной вероятности появления некоторого сочетания (профиля) типов других игроков в зависимости от типа игрока i.

Функции выигрыша $K_i = K_i(y_1,...y_n, r_1,...,r_n)$ зависят как от действий $y_i \in A_i$ всех игроков, так и от их типов $r_i \in \Omega_i$, и известны всем игрокам.

Определение : Игра в форме Байеса задается следующей системой:

$$\{N; \Omega_1,...,\Omega_n; p_1(.),..., p_n(.); K_1(.),...,K_n(.)\}.$$

Равновесие Байеса

Стратегия игрока i в данной игре - распределение

$$\eta_i = \eta_i(y_i \mid r_i)$$

условной вероятности выбора действия y_i при условии, что тип игрока равен r_i. Равновесие Байеса - такой набор стратегий

$$(\eta_1^B(.), \eta_2^B(.), ..., \eta_n^B(.)),$$

что для любого игрока i и любого его типа $r_i \in \Omega_i$ стратегия $\eta_i^B(.)$ максимизирует по $\eta_i(.)$ функционал

$$\int\limits_{\Omega_{-i}} \int\limits_{X} K_i(y_i, y_{-i}, r_i, r_{-i})\, p_i(r_{-i}|r_i)\, \eta_i(y_i|r_i) \prod_{j \neq i} \eta_j^B(y_j|r_i)\, dy\, dr_{-i},$$

представляющий собой ожидаемый выигрыш игрока i с учетом его субъективного представления о типах других игроков.

В этом определении решением считается, по сути, набор смешанных стратегий.

Можно переопределить равновесие Байеса для чистых стратегий.

Тогда стратегией будем считать функцию $y_i = \eta_i(r_i)$, которая предписывает игроку действие y_i в зависимости от его типа $r_i \in \Omega_i$. В этом случае равновесие Байеса определяется набором стратегий $(\eta_1^B(.), \eta_2^B(.), ..., \eta_n^B(.))$, таким, что для любого игрока i и любого его типа $r_i \in \Omega_i$ стратегия η_i^B максимизирует по η_i функционал

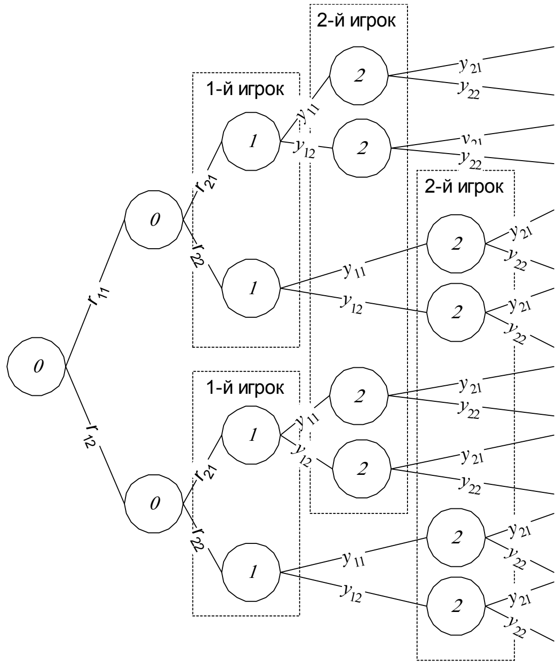
$$\int_{\Omega_{-i}} K_i(r_{-i}, r_i, \eta_{-i}^B(r_{-i}), \eta_i(r_i)) p_i(r_{-i} \mid r_i) dr_{-i} .$$

Равновесие Байеса является обобщением равновесия Нэша в смешанных стратегиях на случай байесовых игр.

На самом деле, оно представляет собой равновесие Нэша игры, в которой неполная информация о целевых функциях игроков заменена на неполную информацию о ходе природы.

Д. Харшаньи предложил считать, что в начале байесовой игры природа (или другие внешние обстоятельства) определяет типы игроков. После этого игроки должны, зная свой тип, но не зная типов противников, выбрать стратегию.

- Для нахождения равновесий байесовой игры необходимо построить игру в развернутой форме.
- Далее, эту игру необходимо привести к нормальной форме.
- Для игры в нормальной форме, найти множество равновесий Нэша в смешанных стратегиях.



2-й игрок
1-й игрок
2-й игрок
1-й игрок

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Базовые модели иерархических игр

Для иерархических игр характерно использование максимального гарантированного результата (МГР) в качестве базовой концепции решения игры. При этом взятие минимума по множеству неопределенных параметров в МГР компенсируется возможностью передачи информации между игроками, что, очевидно, снижает неопределенность при принятии решения.

Критерии эффективности (целевые функции) первого и второго игроков

$$w_1 = f_1(x_1, x_2) \text{ и } w_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Выигрыши игроков зависят от их действий x_1 и x_2 из множеств действий X_1^0, X_2^0.

Во всех моделях иерархических игр считается, что *первый игрок* (*центр*) имеет право первого хода. Его ход состоит в выборе стратегии $\tilde{x}_1$. Понятие стратегии существенно отличается от понятия действия и тесно связано с информированностью первого игрока о поведении *второго игрока – агента*. Под стратегией игрока здесь и далее понимается правило его поведения, то есть правило выбора конкретного действия в зависимости от содержания и конкретного значения той информации, которую он получит в процессе игры. Выбирать же собственно действие центр может и после выбора действия агентом.

Самая простая стратегия центра состоит в выборе непосредственно действия x_1 (если поступления дополнительной информации о действии агента в процессе игры не ожидается), более сложная – в выборе функции $\tilde{x}_1(x_2)$ (если в процессе игры ожидается информация о действии агента). Также стратегия центра может состоять в сообщении агенту некоторой информации, например, информации о планах своего поведения в зависимости от выбора агентом действия. При этом агент должен быть уверен, что первый игрок может реализовать эту стратегию, то есть что первый игрок будет точно знать реализацию действия x_2 на момент выбора своего действия x_1.

Игра Γ_1

Стратегия центра состоит из выбора некоторого действия x_1^*. Стратегия агента состоит в выборе $x_2 = \tilde{x}_2(x_1^*)$ (он делает ход вторым, уже зная действие центра).

Игра Γ_2

Стратегия центра состоит в сообщении им агенту функции (условного действия) $\tilde{x}_1(x_2)$.

Такое сообщение может рассматриваться, как обещание выбрать действие $x_1 = \tilde{x}_1(x_2)$ при выборе агентом действия x_2.

Тогда стратегия агента состоит в выборе действия в зависимости от сообщения центра, $x_2 = \tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1(.))$. Если при этом агент доверяет сообщению центра, он должен выбрать действие x_2^*, реализующее

$$\max_{x_2 \in X_2^0} f_2(\tilde{x}_1(x_2), x_2) .$$

Концепции решения игры Γ_1.

<u>Определение:</u> Пара действий (x_1^*, x_2^*) в игре Γ_1 называется равновесием Штакельберга, если

$$x_1^* \in \underset{x_1 \in X_1^0, x_2 \in R_2(x_1)}{Arg\max} f_1(x_1, x_2),$$

$$x_2^* \in R_2(x_1^*) = Arg \max_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^*, x_2),$$

то есть $R_2(x_1)$ – функция наилучшего ответа агента на действие центра.

Равновесие в игре Γ_1 отличается от равновесия Штакельберга тем, что при определении оптимальной стратегии первого игрока вычисляется минимум по множеству $R_2(x_1)$: $x_1^* \in Arg \max_{x_1 \in X_1^0} \min_{x_2 \in R_2(x_1)} f_1(x_1, x_2)$ [21].

Будем считать множество равновесий Штакельберга решением игры Γ_1.

<u>Теорема.</u> Если в игре Γ_1 множества действий X_1^0, X_2^0 компактны, функции выигрыша f_1, f_2 непрерывны, то в этой игре существует по крайней мере одно равновесие Штакельберга.

Пример. «Невыгодное для центра равновесие Штакельберга».

В антагонистической игре «чет-нечет» с матрицей

$$\begin{bmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{bmatrix}$$

имеются два равновесия Штакельберга: (1, 2) и (2, 1). Оба они дают центру, делающему ход первым, выигрыш –1. Однако в этой игре есть равновесие Нэша в смешанных стратегиях, дающее обоим игрокам нулевой выигрыш.

Использование центром смешанных стратегий в игре Γ_1 не может увеличить его выигрыш, так как в момент выбора действия агент все равно будет знать конкретную реализацию действия центра. Таким образом, игроки в этой игре (как и в любой игре, в которой нет равновесия Нэша в чистых стратегиях) не заинтересованы в том, чтобы противник наблюдал их действие. •

Борьба за первый ход

Игре двух лиц в нормальной форме можно поставить в соответствие две игры Γ_1 (игры первого порядка), отличающиеся последовательностью ходов. Тогда борьба за лидерство (первый ход) определяется выгодностью перехода от исходной игры к какой-либо из иерархических игр первого порядка.

Определение : В игре двух лиц имеет место *борьба за первый ход*, если не существует ситуации (x_1^*, x_2^*), для которой

$$\max_{\substack{x_i \in X_i^0, \\ x_j \in R_j(x_i)}} f_i(x_1, x_2) \le f_i(x_1^*, x_2^*), \ \forall \ i \in \{1, 2\}, \ j \ne i .$$

Теорема. Если в игре двух лиц имеются хотя бы два оптимальных по Парето равновесия Нэша, в которых вектора выигрышей отличаются, то в этой игре имеет место борьба за первый ход.

Для игры «Семейный спор» условия теоремы выполнены, поэтому в этой игре каждый игрок заинтересован в том, чтобы выбирать действие первым.