РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ И ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Чхартишвили Александр Гедеванович
(ИПУ РАН)

Информационное управление – управление посредством сообщения информации

•Мотивационное управление

•Институциональное управление

•**Информационное управление**

•…

Рефлексивные игры – модель интерактивного взаимодействия (игры) со сложной взаимной информированностью участников

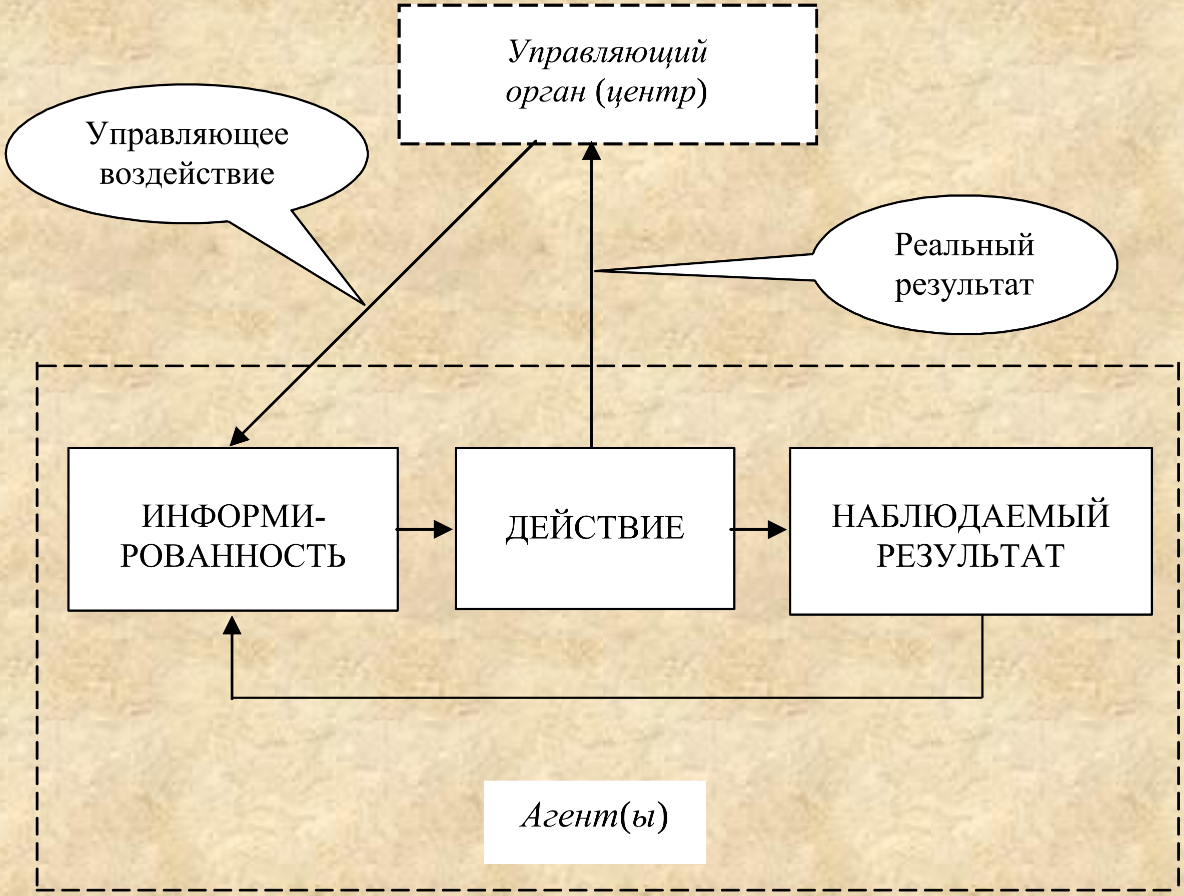
•Байесовы игры

•Кооперативные игры

•**Рефлексивные игры**

•…

Модель информационного управления



Содержание лекции

Точечные структуры информированности

Рефлексивные игры

Типы информационных равновесий

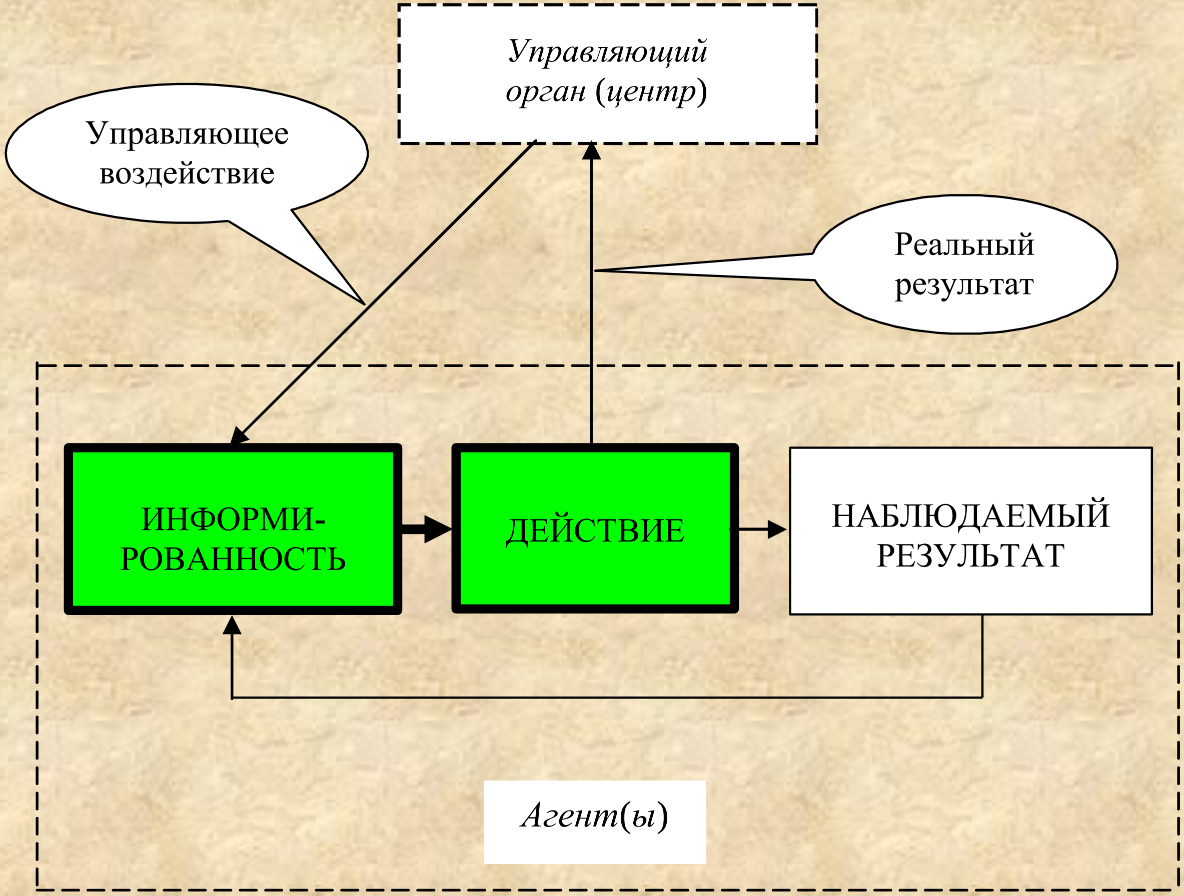
Информационные воздействия

Информационное управление

Множественные структуры информированности

Согласованное информационное управление

Рефлексивные игры



Игры с полной информированностью. Общее знание

Игра в нормальной форме:

$\Gamma = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}\}$

N – множество игроков (агентов)

$(X_i)_{i \in N}$ – множества допустимых действий

$(f_i(\cdot))_{i \in N}$, f_i: $X' \to \Re^1$ – целевые функции

Общее знание (common knowledge) – D. Lewis (1969), R. Aumann (1976) –

факт, удовлетворяющий следующим требованиям:

i) о нем известно всем агентам;

ii) всем агентам известно i);

iii) всем агентам известно ii)

и т.д. до бесконечности.

Рефлексивные игры

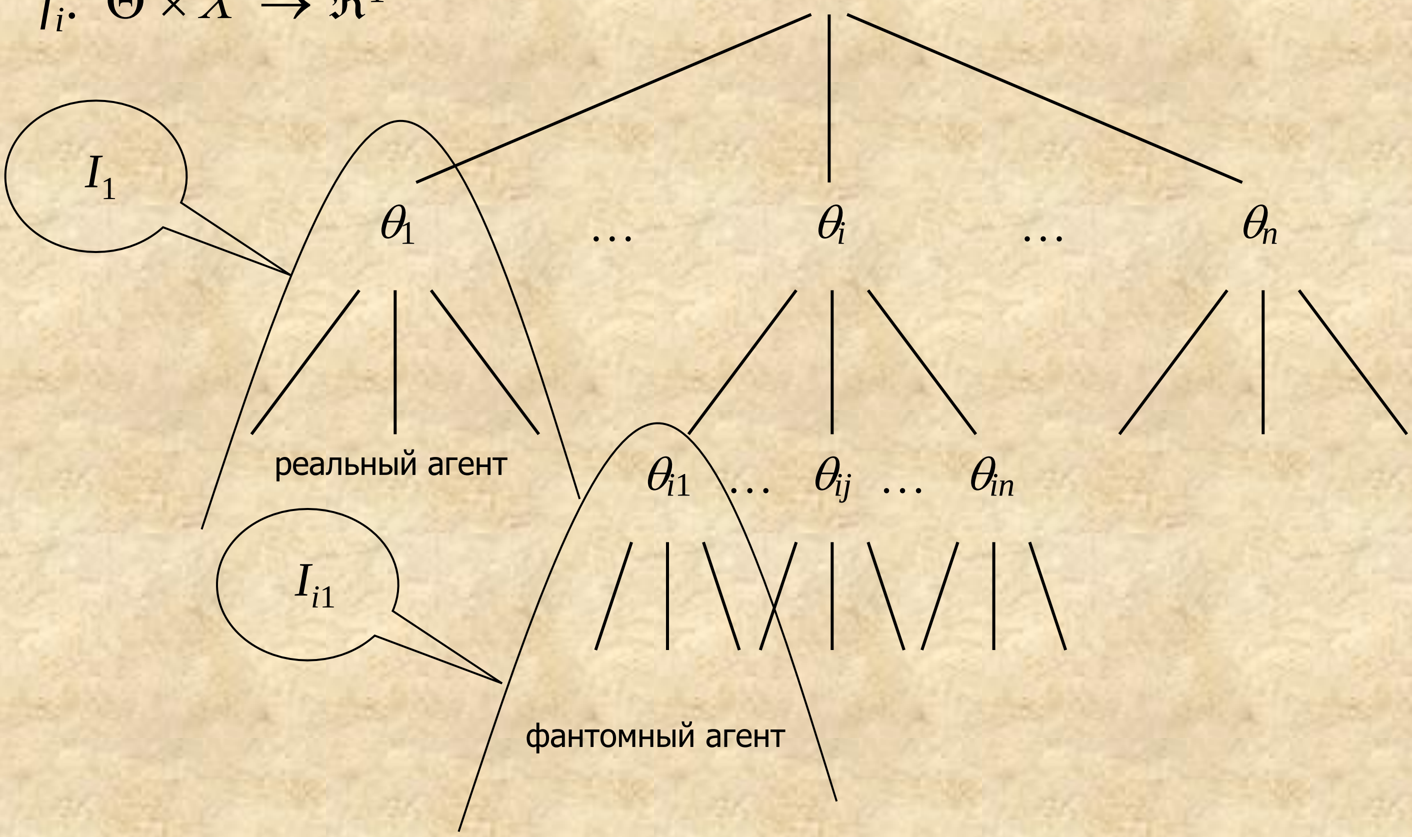
Структура информированности

$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, \Theta, I\}$ – рефлексивная игра

Θ – множество возможных состояний природы

I – структура информированности

f_i: $\Theta \times X' \to \mathfrak{R}^1$



I_i - реальный агент

I_{ij}

I_{ijk}

…

$\left.\begin{matrix} I_{ij} \\ I_{ijk} \\ \dots \end{matrix}\right\}$ фантомные агенты

I_σ , $\sigma \in \Sigma_+$

Σ_+ – конечная последовательность индексов из N

Σ – в том числе пустая последовательность

ν – *сложность* I (количество попарно различных агентов)

Игры и информированность

Глубина	1	Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн (1944)	
		Дж. Нэш (1951)	
	2	Дж. Харшаньи (1968-69)	Рефлексивные игры
	3	J. Sacovics (2001)	
	…………………………………………		
	∝	J.-F. Mertens, S. Zamir (1985)	

Информационное равновесие

Набор действий $x_\tau{}^*$, $\tau \in \Sigma_+$, назовем ***информационным равновесием***, если выполнены следующие условия:

1. структура информированности I имеет конечную сложность ν ;

2. $\forall i \in N, \forall \lambda, \mu \in \Sigma \quad I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}{}^* = x_{\mu i}{}^*$;

3. $\forall i \in N, \forall \sigma \in \Sigma$

(1) $$x_{\sigma i}^* \in \operatorname*{Arg\,max}_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \ldots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i, x_{\sigma i, i+1}^*, \ldots, x_{\sigma i, n}^*).$$

Существование информационного равновесия

Утверждение 1. Если информационное равновесие x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, существует, то оно состоит из не более чем ν попарно различных действий, а в системе (1) содержится не более чем ν попарно различных уравнений.

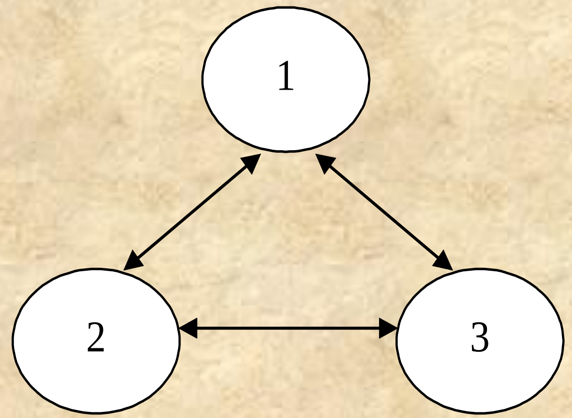
Утверждение 2. Пусть в рефлексивной игре со структурой информированности конечной сложности множества действий X_i – выпуклые компактные подмножества $\Re^n$, для каждого агента целевая функция $f_i(\theta, x_1, \ldots, x_n)$ при любом $\theta \in \Theta$ непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной x_i. Тогда в этой игре существует информационное равновесие.

Граф рефлексивной игры
Пример 1

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2}, x_i \geq 0, i \in N = \{1, 2, 3\}; \theta \in \Theta = \{1, 2\}$$

.

Пусть первые два агента – оптимисты, а третий – пессимист, причем все трое одинаково информированы.



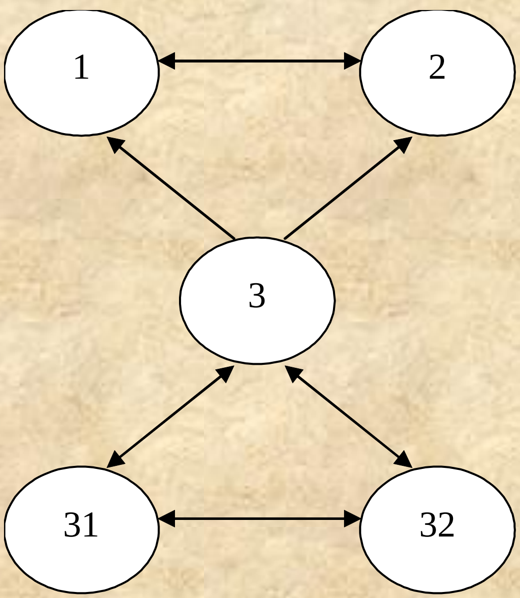
$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_1^* - x_2^*}{3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_2^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_3^* = 0. \end{cases}$$

Граф рефлексивной игры
Пример 2

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2},\ x_i \geq 0, i \in N = \{1, 2, 3\};\ \theta \in \Theta = \{1, 2\}$$

.

Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, который считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами. Первые два агента одинаково информированы, причем оба они адекватно информированы о третьем агенте.

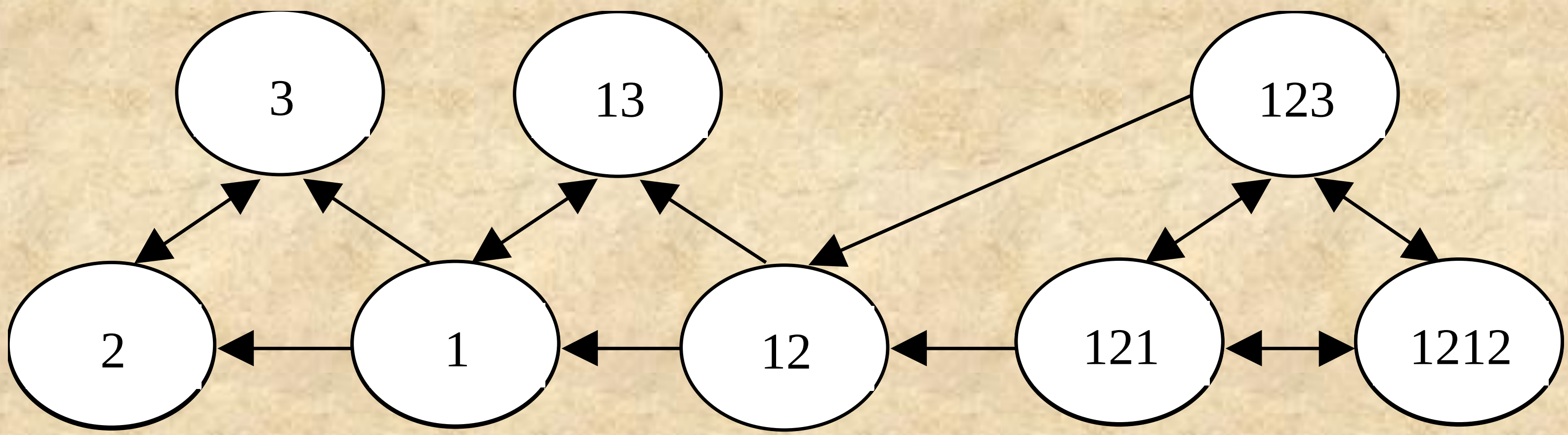


$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{32}^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{32}^* - x_3^*}{3}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_3^*}{3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_2^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_3^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

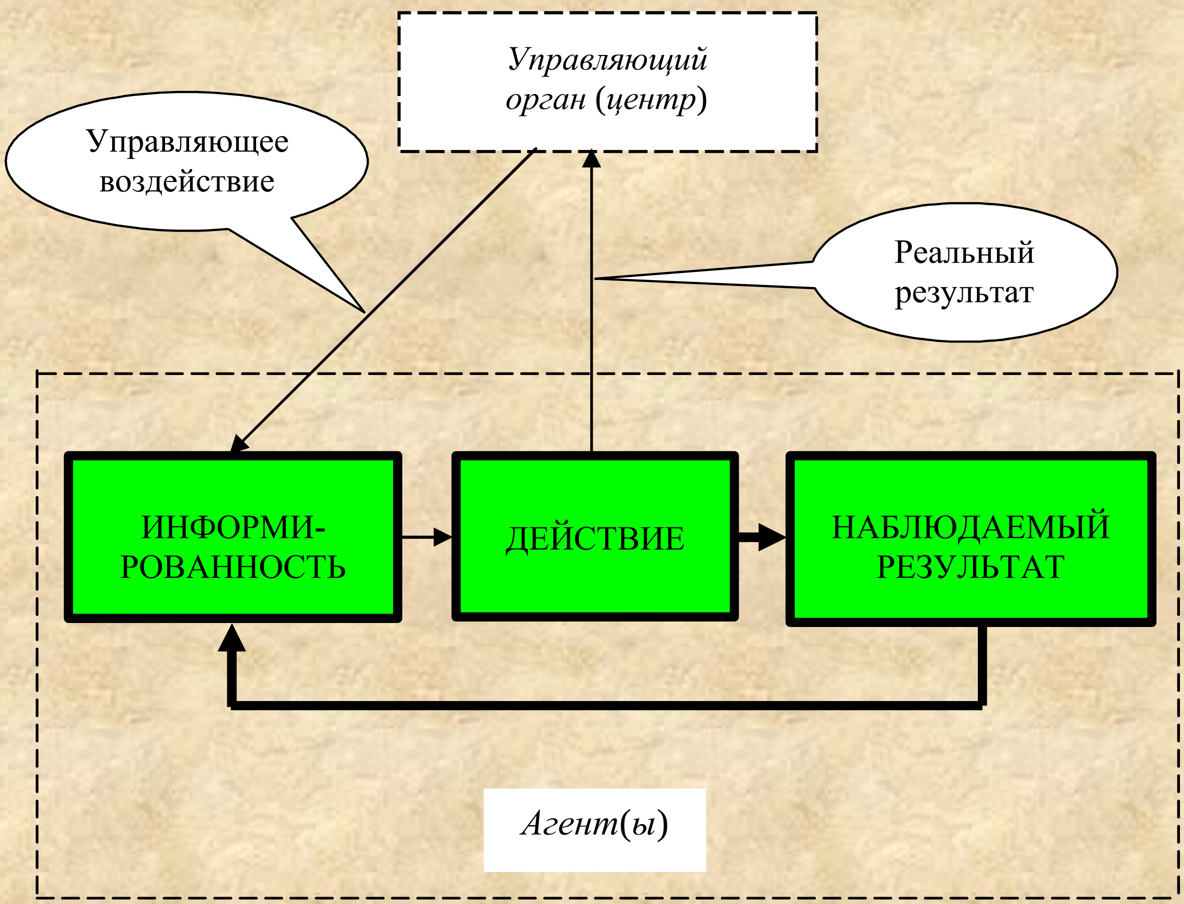
Граф рефлексивной игры
Пример 3

Кинофильм “Император и убийца” (1999, режиссер – Чен Кайге)
Убийцу посылают к императору под видом посла соседнего государства. Император, между тем, осведомлен о том, что посол на самом деле является убийцей. Однако убийца знает о том, что император знает, что он собирается убить его.

1 – император; 2 – убийца; 3 – жена императора; 12 – убийца, который считает императора неосведомленным; 121 – император, который считает пришедшего к нему человека послом соседнего государства; 1212 – посол соседнего государства.



Типы информационных равновесий



Стабильное информационное равновесие

$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, \Theta, I\}$ – рефлексивная игра

$w_i(\cdot): \Theta \times X' \to W_i,\ i \in N$

$w_i(\cdot)$ – *функция наблюдения* i-го агента

Информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, будем называть *стабильным* при заданной структуре информированности I , если для любого $\tau i \in \Sigma_+$ выполняется

(2) $w_i(\theta_{\tau i}, x_{\tau i1}, \ldots, x_{\tau i,i\text{-}1}, x_{\tau i}, x_{\tau i,i+1}, \ldots, x_{\tau in}) =$

$= w_i(\theta_{\tau}, x_{\tau 1}, \ldots, x_{\tau,i\text{-}1}, x_{\tau i}, x_{\tau,i+1}, \ldots, x_{\tau n}).$

Стабильное информационное равновесие

$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, \Theta, I\}$ – рефлексивная игра
$w_i(\cdot)$: $\Theta \times X' \to W_i$, $i \in N$
$w_i(\cdot)$ – *функция наблюдения* i-го агента

Утверждение 5. Пусть структура информированности I имеет сложность ν и существует информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$. Тогда система соотношений (2) содержит не более чем ν попарно различных условий.

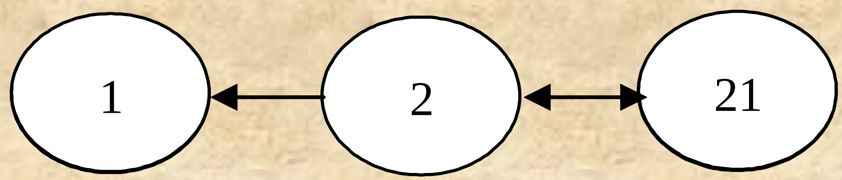
Стабильность информационного равновесия
Пример 4

$\theta = 1$

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (2,0) \end{pmatrix}$$

$\theta = 2$

$$\begin{pmatrix} (0,1) & (1,2) \\ (1,1) & (2,2) \end{pmatrix}$$



$\Theta = \{1, 2\}$,
$X_1 = X_2 = \{1; 2\}$

$\theta = \theta_1 = 1$,
$\theta_2 = \theta_{21} = 2$

Информационное равновесие:

$x_1 = x_2 = x_{21} = 2$.

Равновесие нестабильно

Истинные и ложные равновесия

Пусть набор действий $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, является стабильным информационным равновесием. Будем называть его *истинным* равновесием, если набор $(x_1, \ldots, x_n)$ является равновесием в условиях общего знания о состоянии природы θ.

Стабильное информационное равновесие, не являющееся истинным, назовем *ложным*.

Ложное равновесие
Пример 5

$$\theta = 1 \qquad\qquad \theta = 2$$

$$\begin{pmatrix} (2,2) & (4,1) \\ (1,4) & (3,3) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (2,2) & (0,3) \\ (3,0) & (1,1) \end{pmatrix}$$

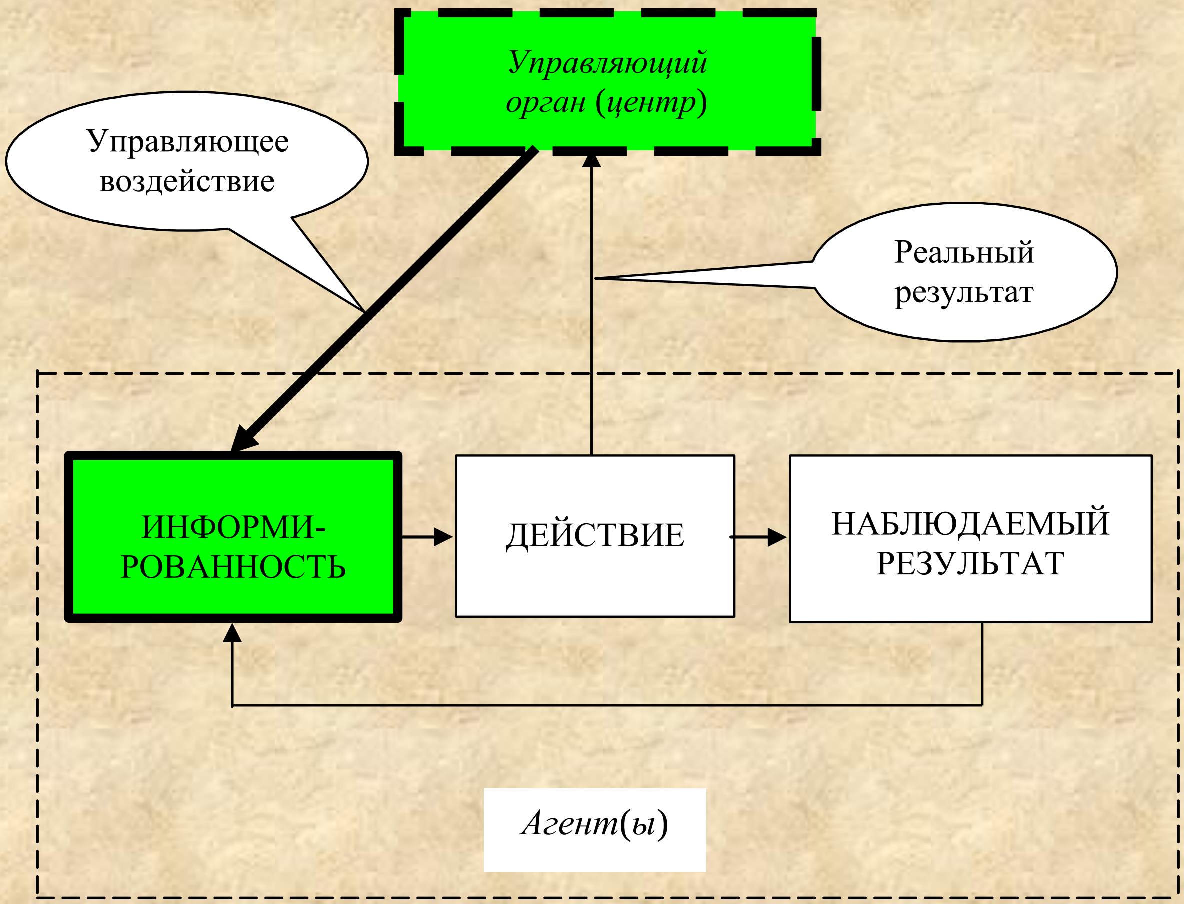
$\Theta = \{1, 2\}, X_1 = X_2 = \{1; 2\}$

$\theta = 2$, $\theta_1 = \theta_2 = 1$

Информационное равновесие: $x_1 = x_2 = 1$.

Равновесие ложное, поскольку в случае общего знания равновесие было бы другим: $x_1 = x_2 = 2$.

Информационные воздействия



Информационное регулирование и рефлексивное управление

Вид информационного воздействия	**Сообщение центра**	**Сформированная структура**
Однородное информационное регулирование	Всем агентам сообщается величина θ'	$\forall \sigma \in \Sigma_+$ $\theta_\sigma = \theta'$
Неоднородное информационное регулирование	i-му агенту ($i \in N$) сообщается свое значение θ_i	$\forall i \in N \ \forall \sigma \in \Sigma$ $\theta_{i\sigma} = \theta_i$
Рефлексивное управление	i-му агенту ($i \in N$) сообщается θ_i и набор значений θ_{ij}, $j \in N \backslash \{i\}$	$\forall i \in N$, $j \in N \backslash \{i\}$ $\forall \sigma \in \Sigma$ $\theta_{ij\sigma} = \theta_{ij}$

Активный прогноз

Активный прогноз – сообщение информации о будущих значениях параметров, зависящих от состояния природы и действий агентов.

$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, \Theta, I\}$ – рефлексивная игра

$z(\cdot)\colon \Theta \times X' \to Z,\ i \in N$

Z – множество прогнозов

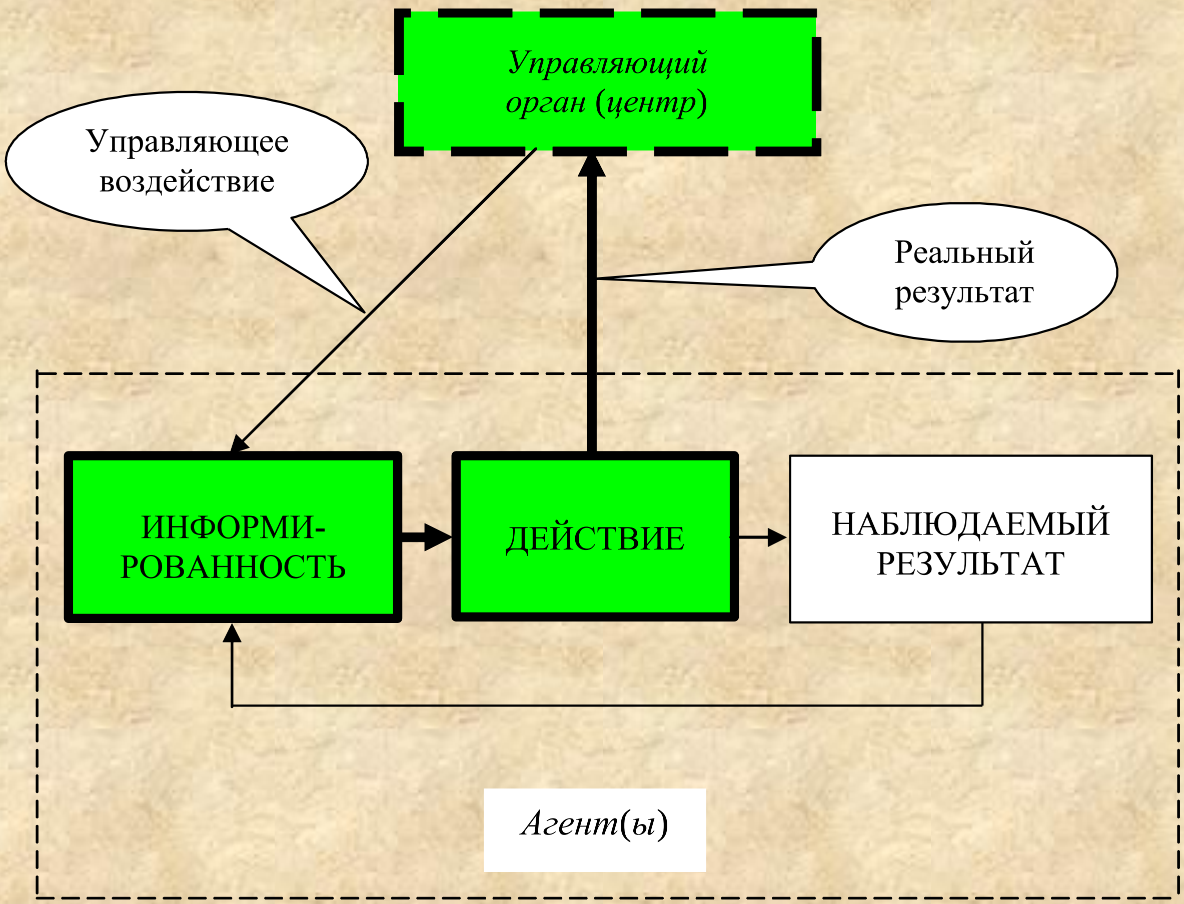
Центр сообщает агентам прогноз $z \in Z$.

Агенты решают систему соотношений

$x_i \in BR_i(\theta, x_{-i}),\ i \in N,$

$z(\theta, x) = z$.

Информационное управление



Классификация задач информационного управления

$\Psi_X(I) \subseteq X'$ – множество векторов действий реальных агентов, являющихся равновесными при структуре информированности I

$\Psi_I(x)$ – множество структур информированности, при которых вектор действий реальных агентов x является равновесным (решение обратной задачи)

$\Phi(x, I)$ – целевая функция центра

$\Im$ – множество структур информированности, которые могут быть сформированы центром и для которых существует хотя бы одно информационное равновесие

Задача ИУ в форме целевой функции:

$$\min_{x \in \Psi_X(I)} \Phi(x, I) \xrightarrow[I \in \Im]{} \max .$$

Задача ИУ в форме множества достижимости:

найти множество векторов $x \in X'$, для которых множество структур $\Psi_I(x) \cap \Im$ непусто

Пример 6. Аккордная оплата труда

n агентов осуществляют совместную деятельность

$x_i \geq 0$ – действие i-го агента

θ– суммарное действие агентов, за которое центр выплачивает вознаграждение (иначе не выплачивает ничего)

σ_i– вознаграждение i-го агента

$c_i(x_i)$ – затраты агентов (возрастающая функция, $c_i(0) = 0$)

$x_i^+ = \max \{ x_i \geq 0 \mid c_i(x_i) \leq \sigma_i \}$

В результате игры общим знанием среди агентов становится факт выплаты или невыплаты вознаграждения.

Утверждение 4. Любой набор действий

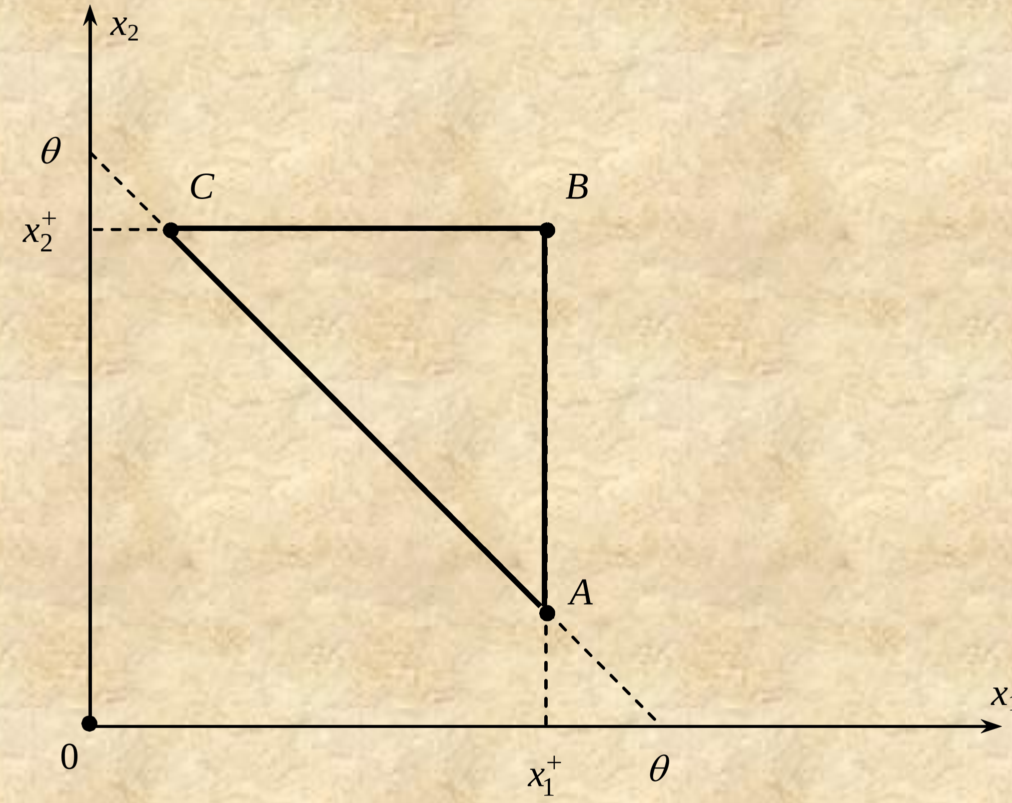
$$x^* \in \prod_{i \in N} (0; x_i^+), \quad \sum_{i \in N} x_i^* \geq \theta,$$

можно сделать стабильным (и притом единственным) информационным равновесием в рамках некоторой структуры информированности.

Пример 6. Аккордная оплата труда
Множество равновесий

Отрезок AC – множество равновесий Нэша

Область ABC – множество стабильных информационных равновесий



Пример 7. «Принцип дефицита»

Чалдини Р. Психология влияния. – СПб.: Питер, 2001.

Три типа клиентов (закупщиков импортной говядины для супермаркетов):

1. услышали предложение, сделанное в стандартной форме;
2. дополнительно была предоставлена информация о том, что поставки импортной говядины будут сокращены;
3. те же сведения, что и вторая группа, а также информацию о том, что мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок.

Результат информационного управления:

клиенты типа 2 заказали в 2 раза больше, чем клиенты типа 1;

клиенты типа 3 заказали в 6 раза больше, чем клиенты типа 1.

Пример 7. «Принцип дефицита»
Модель взаимодействия агентов

n агентов (клиентов) с целевыми функциями

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) = (Q - \sum_{j \in N} x_j)\, x_i - c x_i,$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$, $c \geq 0$.

x_i – объем продаж агента за период времени

$(Q - \sum_{j \in N} x_j)$ – цена, которая при этом устанавливается на рынке

c – оптовая цена, по которой агенты закупают товар

$x_i = \dfrac{Q-c}{n+1}$ – действие агентов типа 1 (равновесие в обычных условиях)

$2x_i$ – действие агентов типа 2, считающих прекращение поставок общим знанием

$6x_i$ – действие агентов типа 3, считающих себя инсайдерами (а долю инсайдеров равной пятой части от общего числа агентов)

Пример 8. Биполярный выбор

Агенты из бесконечно большой «популяции» осуществляют выбор между двумя альтернативами (позитивным и негативным полюсами).

- Кандидат на выборах (голосовать «за» или «против»)
- Товар или услуга (покупать или нет)
- Этический выбор и пр.

Предположения:
1. Существует n различных типов агентов.
2. Доля агентов i-го типа составляет α_i, $0 \le \alpha_i \le 1$.
3. Действие агента i-го типа задается *функцией реакции на ожидание*

$$\pi_i(p),\ \pi_i : [0, 1] \to [0, 1],$$

где p – ожидаемая агентами вероятность выбора позитивного полюса произвольным агентом из «популяции». Иными словами, если агент ожидает, что доля выбравших позитивный полюс составляет p, то его действие $x_i \in [0, 1]$ определяется как $x_i = \pi_i(p)$.

Равновесие биполярного выбора:

$$x_i = \pi_i(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j), \quad i \in N.$$

Пример 8. Биполярный выбор

$n=3$: сторонники, колеблющиеся, противники

Агенты из бесконечно большой «популяции» выбирают между позитивным и негативным полюсами.

Сторонники (их доля в популяции α_1): $x_1 = 1$.

Противники (их доля в популяции α_3): $x_3 = 0$.

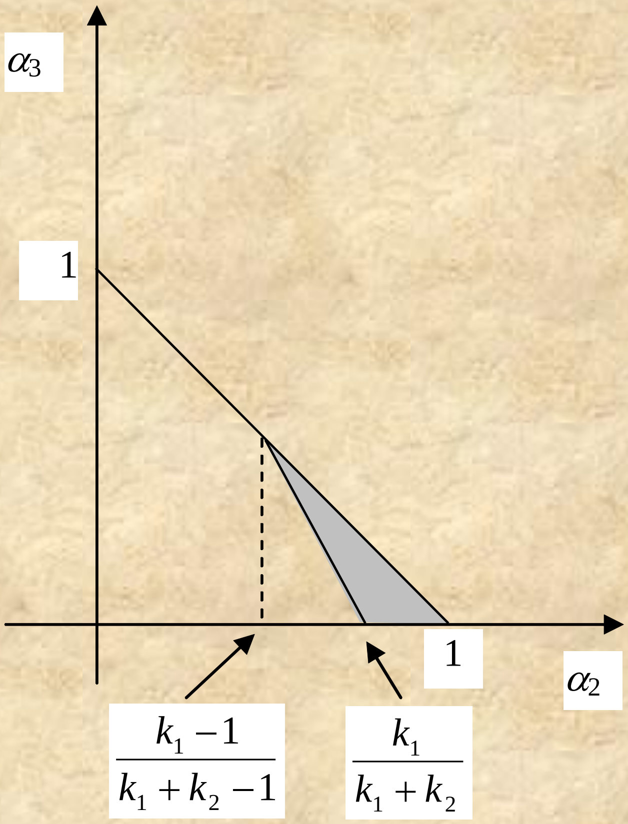
Колеблющиеся (их доля в популяции α_2) поступают так, как ожидают от «среднестатистического» члена популяции: $x_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$.

Центр стремится максимизировать вероятность позитивного выбора. Он может

1. повлиять на третью группу, переведя долю y ее членов во вторую и затратив ресурс $C_2 y$;
2. повлиять на вторую группу, изменив представления ее членов об α_3 и затратив ресурс $C_1 x$.

Совокупный ресурс (бюджет) центра составляет C.

На рисунке затемнена область, где оптимально весь ресурс направить на изменение представлений агентов второй группы.



$k_i = C_i / C > 1$, $i=1, 2$

Содержание лекции

Точечные структуры информированности

Рефлексивные игры

Информационное равновесие

Граф рефлексивной игры

Информационные воздействия

Множественные структуры информированности

Согласованное информационное управление

Формулировка примера 9

В игре участвуют два игрока.

Ведущий задумывает два числа от 1 до 9, сообщает первому игроку сумму чисел, второму игроку – произведение.

Ведущий: «Какие числа задуманы?»

Оба игрока отвечают: «Не знаю».

Ведущий повторяет вопрос, и получает тот же ответ…

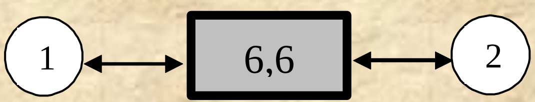
Формулировка примера 9

Так повторяется 7 раз.

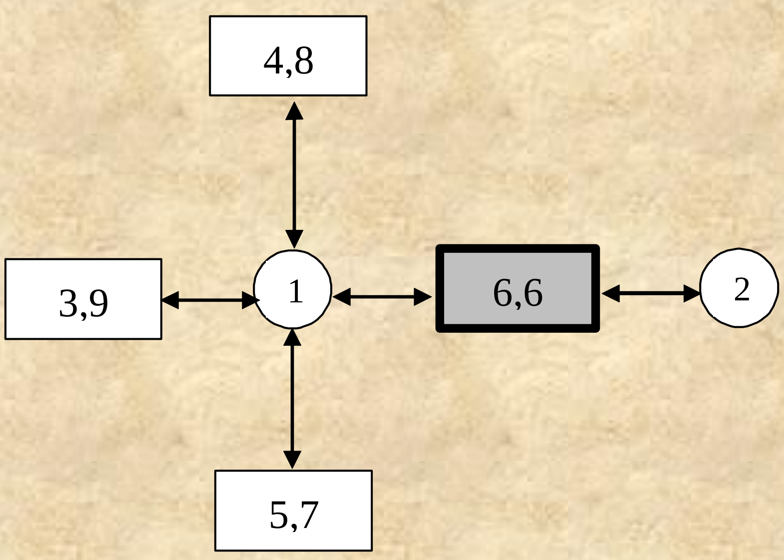
На восьмой вопрос ведущего один из игроков называет задуманные числа.

Какие числа были задуманы?

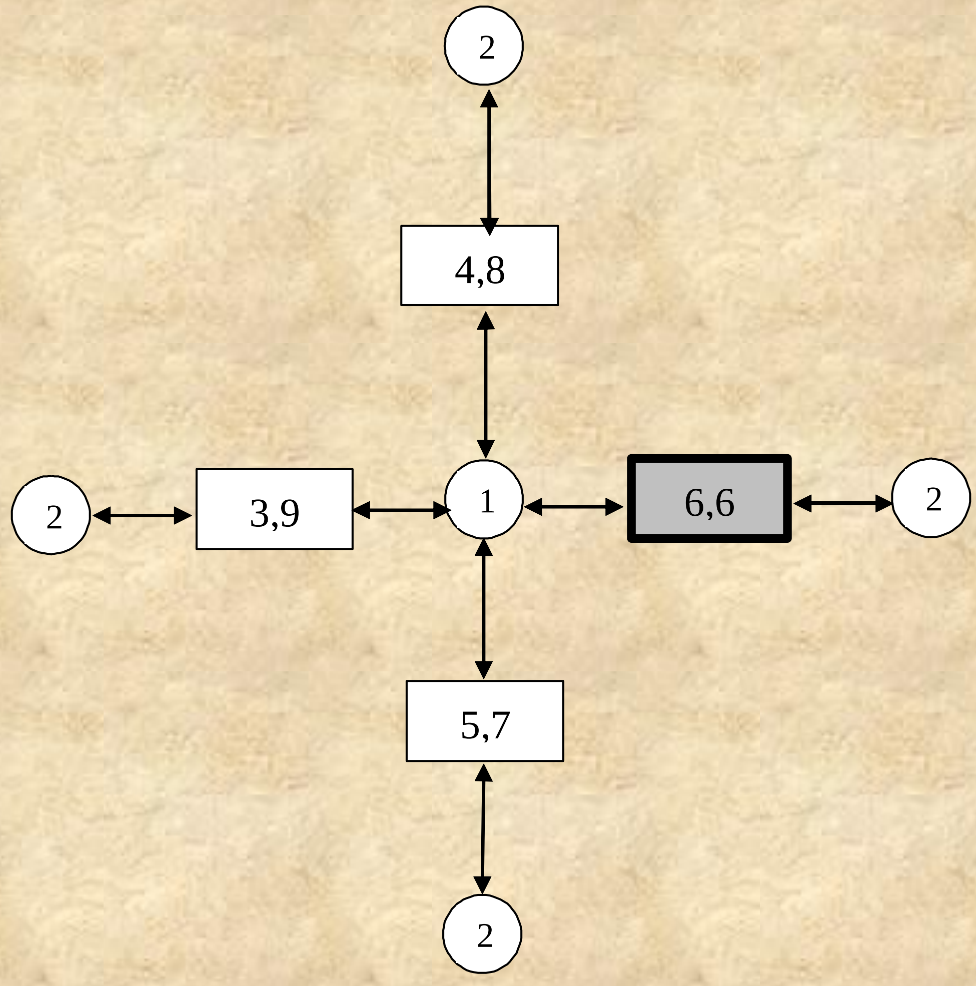
Структура информированности в примере 9 (если была задумана пара (6,6))



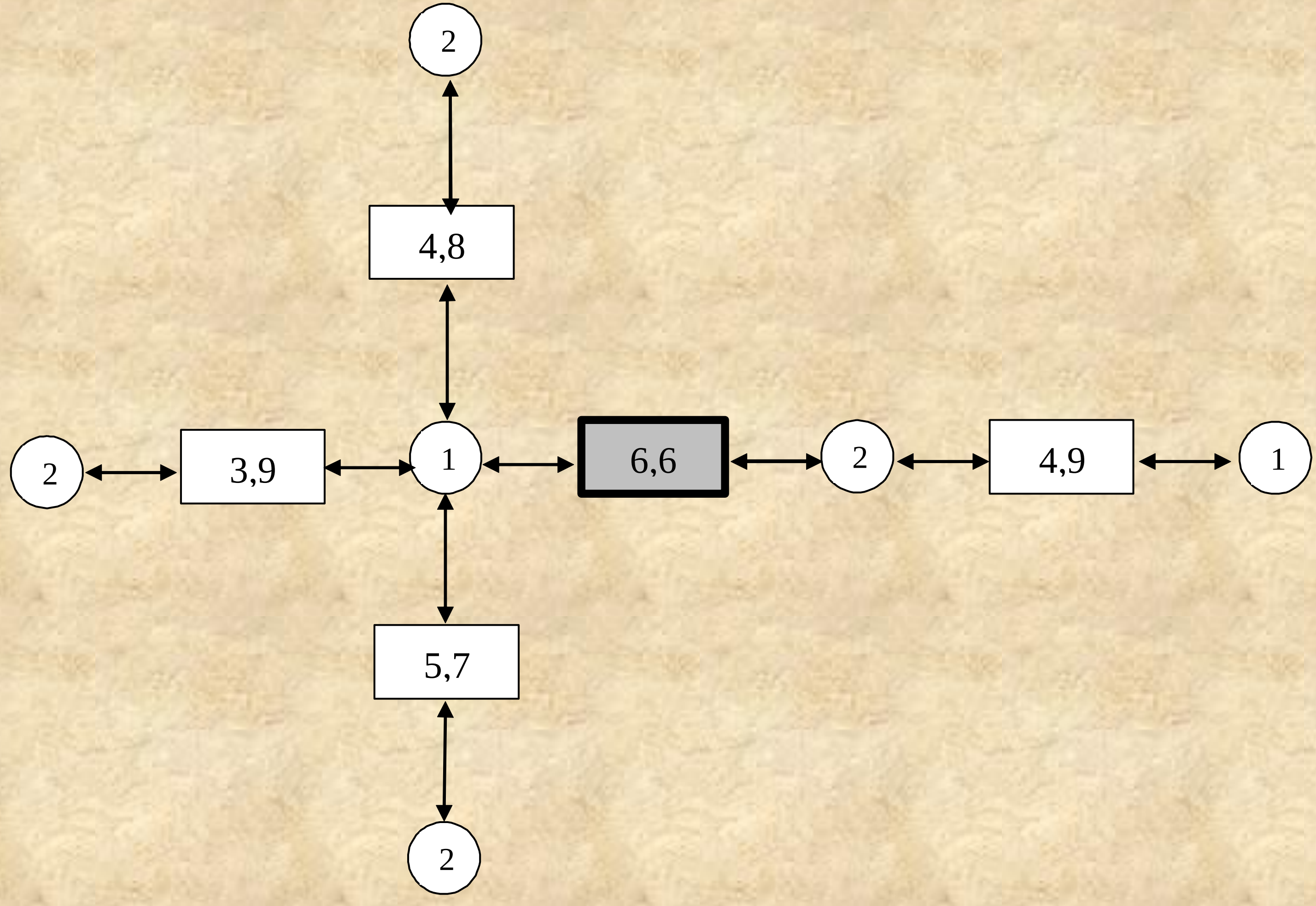
Структура информированности в примере 9



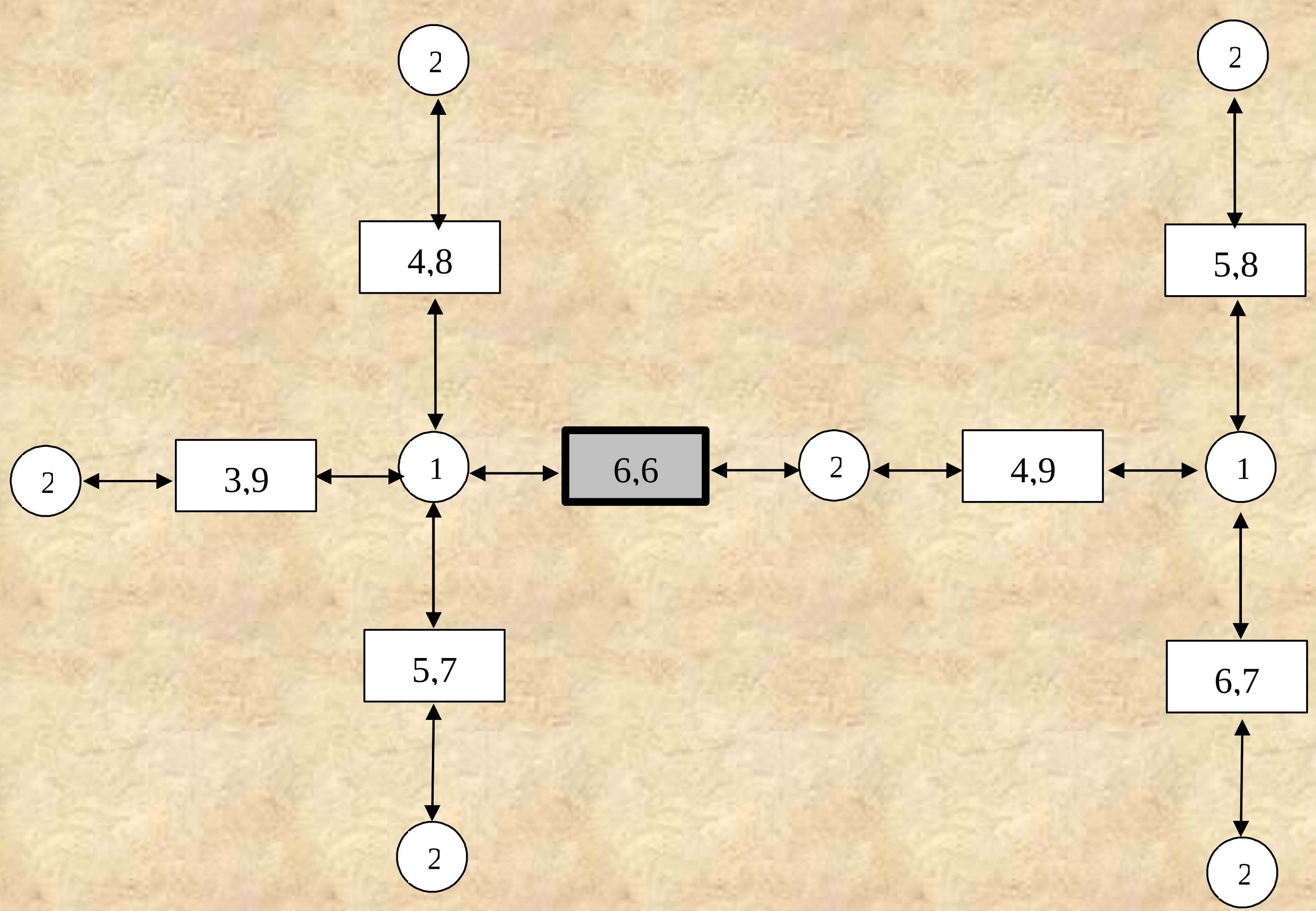
Структура информированности в примере 9



Структура информированности в примере 9



Структура информированности в примере 9



Множественная структура информированности

$N = \{1, \ldots, n\}$ – множество реальных участников игры (реальных агентов)

Θ – множество состояний природы

A_i – множество возможных экземпляров i-го агента

$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ – множество всех агентов (реальных и фантомных)

$\Omega \subset \Theta \times A_1 \times \ldots \times A_n$ – множество возможных миров

В каждом возможном мире $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ имеет место определенное состояние природы $\omega_0 \in \Theta$ и определенные экземпляры $\omega_i \in A_i$ каждого агента

η – функция информированности агента, которая каждому агенту $a \in A$ ставит в соответствие множество миров $\eta(a) \subset \Omega$, которые агент считает возможными

ω^* – реальный мир

Множественная структура информированности

Условие 1 (идентичности агента):

каждый агент входит во все миры, которые он считает возможными

$\forall i \in N, \forall a_i \in A_i, \forall \omega \in \eta(a_i)$ имеет место $\omega_i = a_i$

Множественная структура информированности

Будем говорить, что мир ω' *связан* с миром ω^1, если существуют конечные последовательности миров $\omega^2, \ldots, \omega^m$ и агентов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ такие, что

$$\omega^{k+1} \in \eta(a_{i_k}), \quad k = 1, \ldots, m-1, \quad \omega' \in \eta(a_{i_m})$$

$$a_{i_k} = \omega^k_{i_k}, \quad k = 1, \ldots, m$$

Агент *связан* с миром ω', если он входит в мир, связанный с ω'.

Структура информированности в общем случае

Условие 2 (единства мира):

каждый мир и каждый агент связан с реальным миром.

Структура информированности в общем случае

Назовем *структурой информированности* набор

$$(\Theta, A_1, \ldots, A_n, \Omega, \omega^*, \eta(\cdot)),$$

удовлетворяющий условиям идентичности агента и единства мира.

Назовем структуру информированности *правильной*, если для любого агента существует хотя бы один мир, который агент считает возможным: $\forall a \in A \quad \eta(a) \neq \varnothing$.

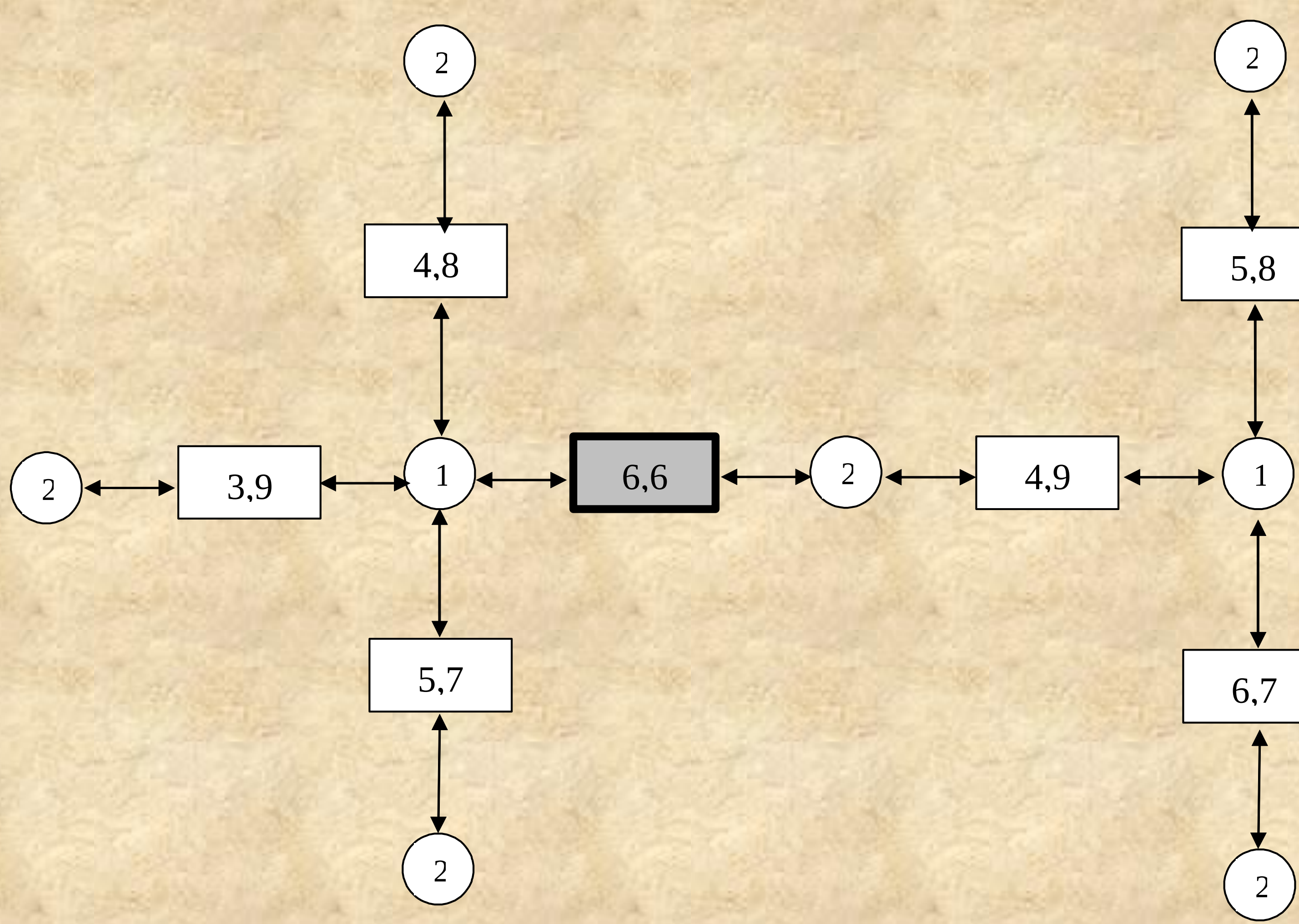
Стратегии и целевые функции в примере 9

$$X_1 = X_2 = \Theta \cup \{-\}$$

$$\Theta = \{(a,b) \mid a \in \{1,\ldots,9\},\ b \in \{1,\ldots,9\}\}$$

$$f_i(\theta, x_1, x_2) = \begin{cases} 1,\ \text{если}\ (x_1 = x_2 = \theta)\ \text{или}\ (x_1 = \theta,\ x_2 = \{-\})\ \text{или}\ (x_1 = \{-\},\ x_2 = \theta); \\ 0,\ \text{если}\ x_1 = x_2 = \{-\}; \\ -1,\ \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Информационное равновесие в примере 9



Информационное равновесие в общем случае

$f_i(\theta, x_1, ..., x_n)$ – целевые функции агентов

$\theta \in \Theta$ – состояние природы

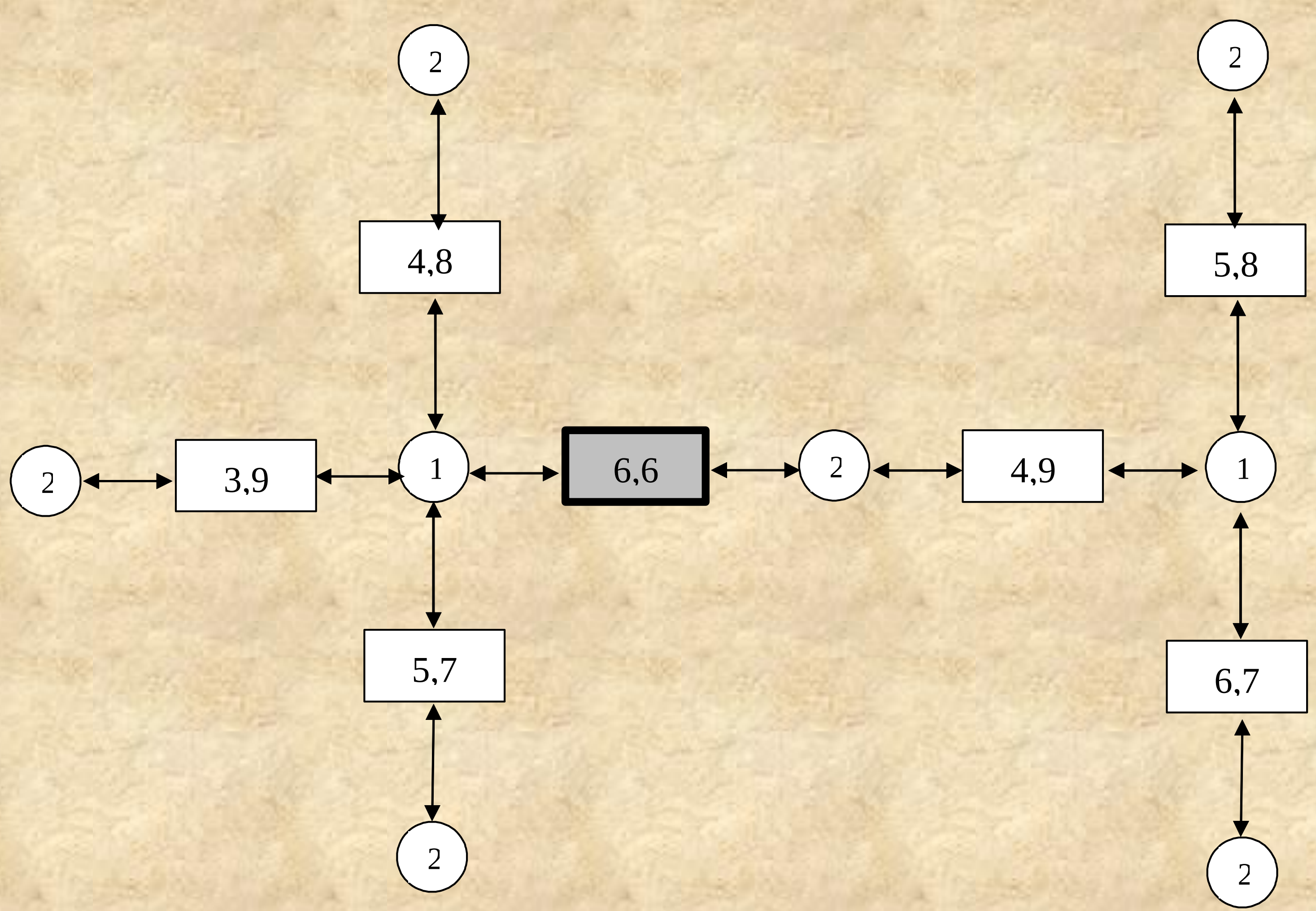
$x_i \in X_i$ – действие, выбираемое i-м агентом

Структура информированности правильная

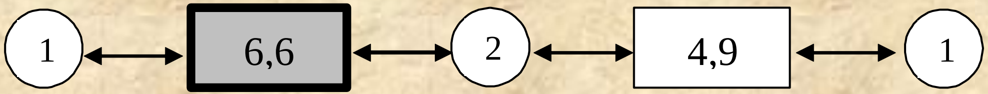
Назовем *информационным равновесием* набор функций $\chi_i : A_i \to X_i$ таких, что

$$\chi_i(a_i) \in \operatorname{Arg}\max_{x \in X_i} \min_{\omega \in \eta(a_i)} f_i(\omega_0, \chi_1(\omega_1), ..., \chi_{i-1}(\omega_{i-1}), x, \chi_{i+1}(\omega_{i+1}) ..., \chi_i(\omega_n))$$

Трансформация структуры информированности в примере 9



Трансформация структуры информированности в примере 9



Трансформация структуры информированности в общем случае

$w_i = w_i(\theta, x_1, \ldots, x_n)$ – *функция наблюдения* i-го агента

Будем считать, что существует единственное информационное равновесие χ,
в результате которого функция наблюдения каждого агента принимает определенное
значение в каждом мире $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$:

$$w_i = w_i(\omega_0, \chi_1(\omega_1), \ldots, \chi_n(\omega_n)) = w_i(\omega)$$

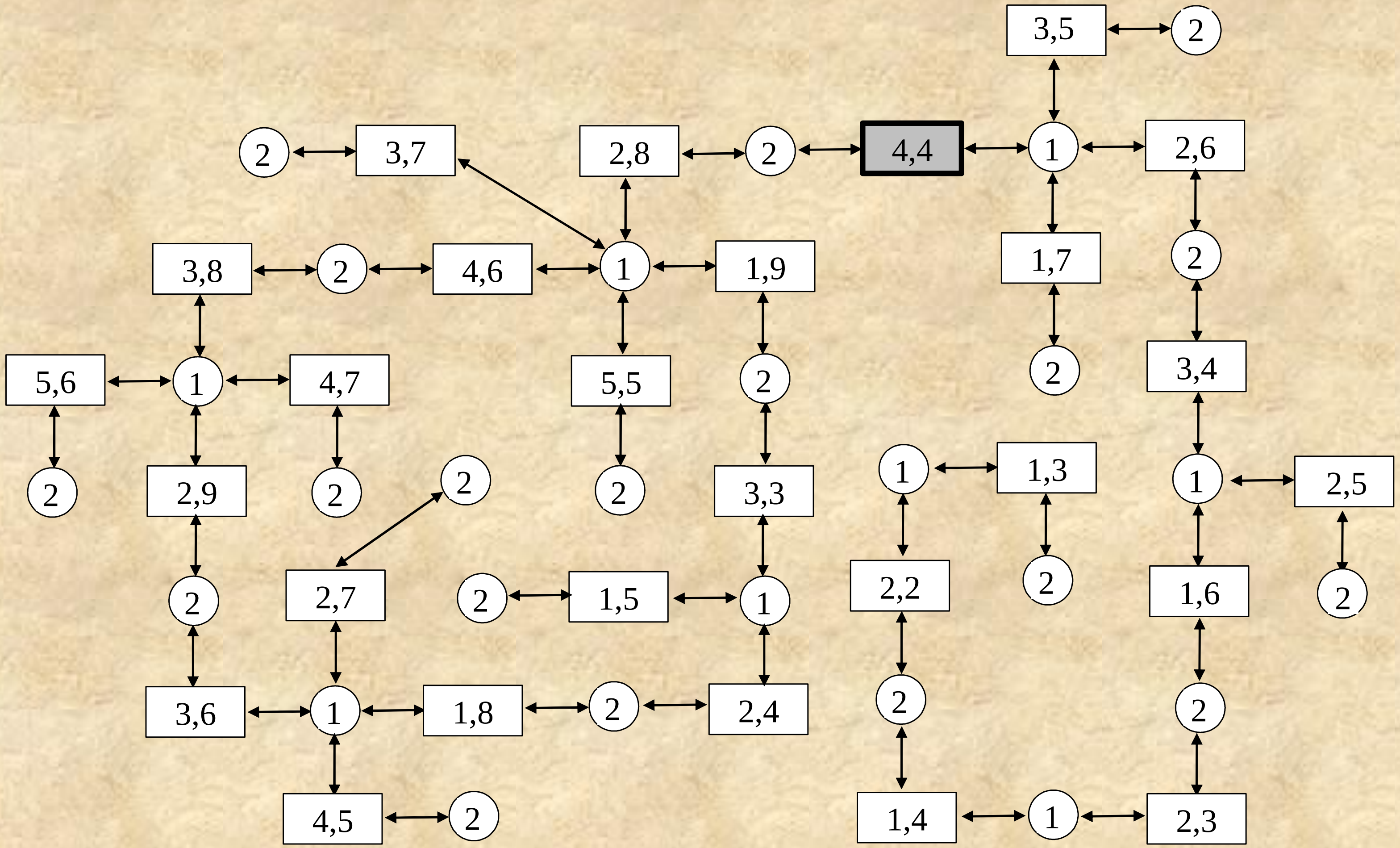
Трансформация структуры информированности в общем случае

Для каждого агента $a_i \in A_i$ модифицируется множество миров $\eta(a_i)$, которые он считает возможным, а именно исключаются те миры, в которых значение функции наблюдения w_i принимает значение, отличное от наблюдаемого агентом.

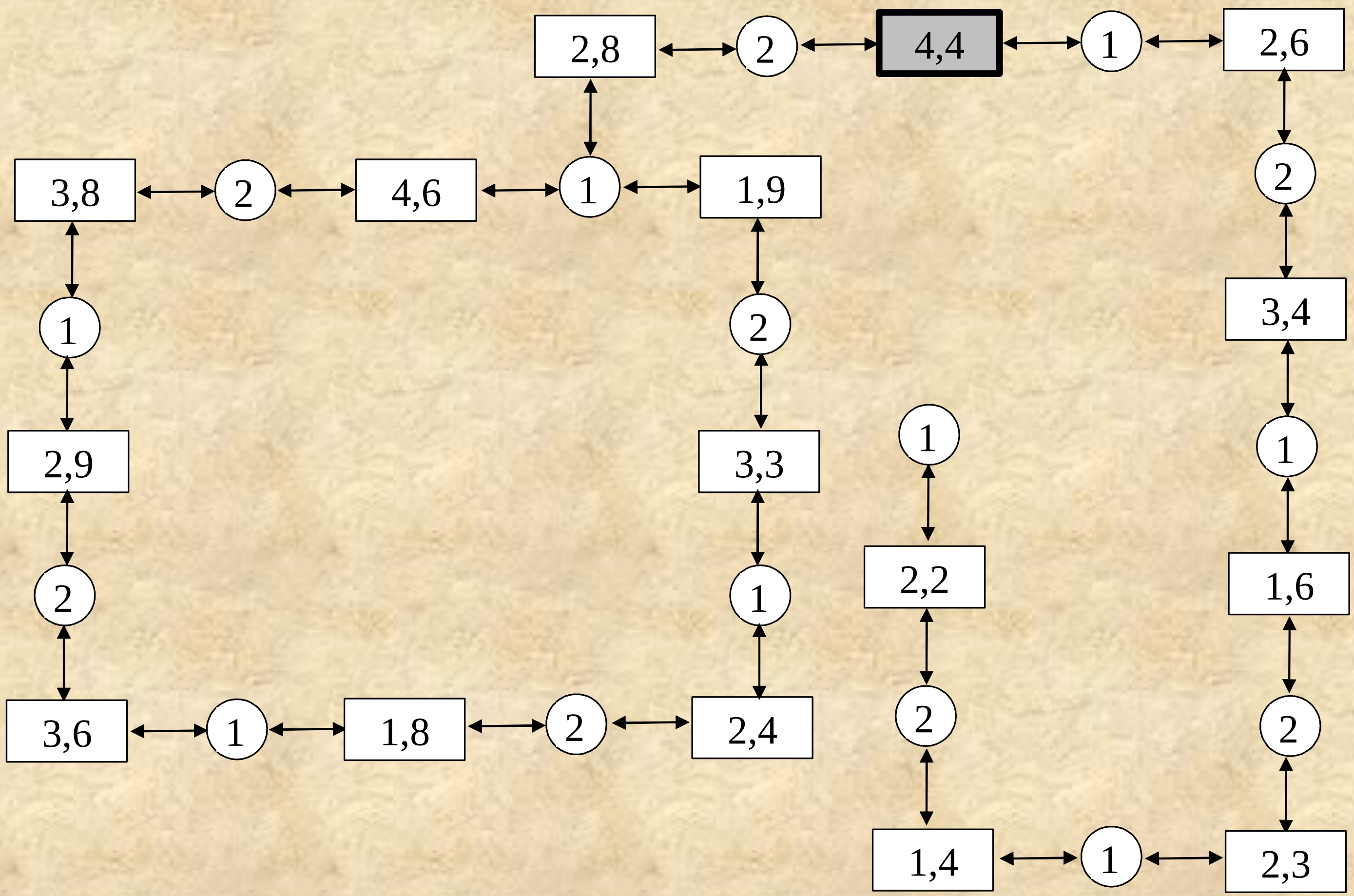
Если агент принадлежит разным мирам (напр., ω' и ω''), то множество A_i также может модифицироваться – если $w_i(\omega') \neq w_i(\omega'')$.

Затем исключаются все миры и агенты, не связанные с реальным миром.

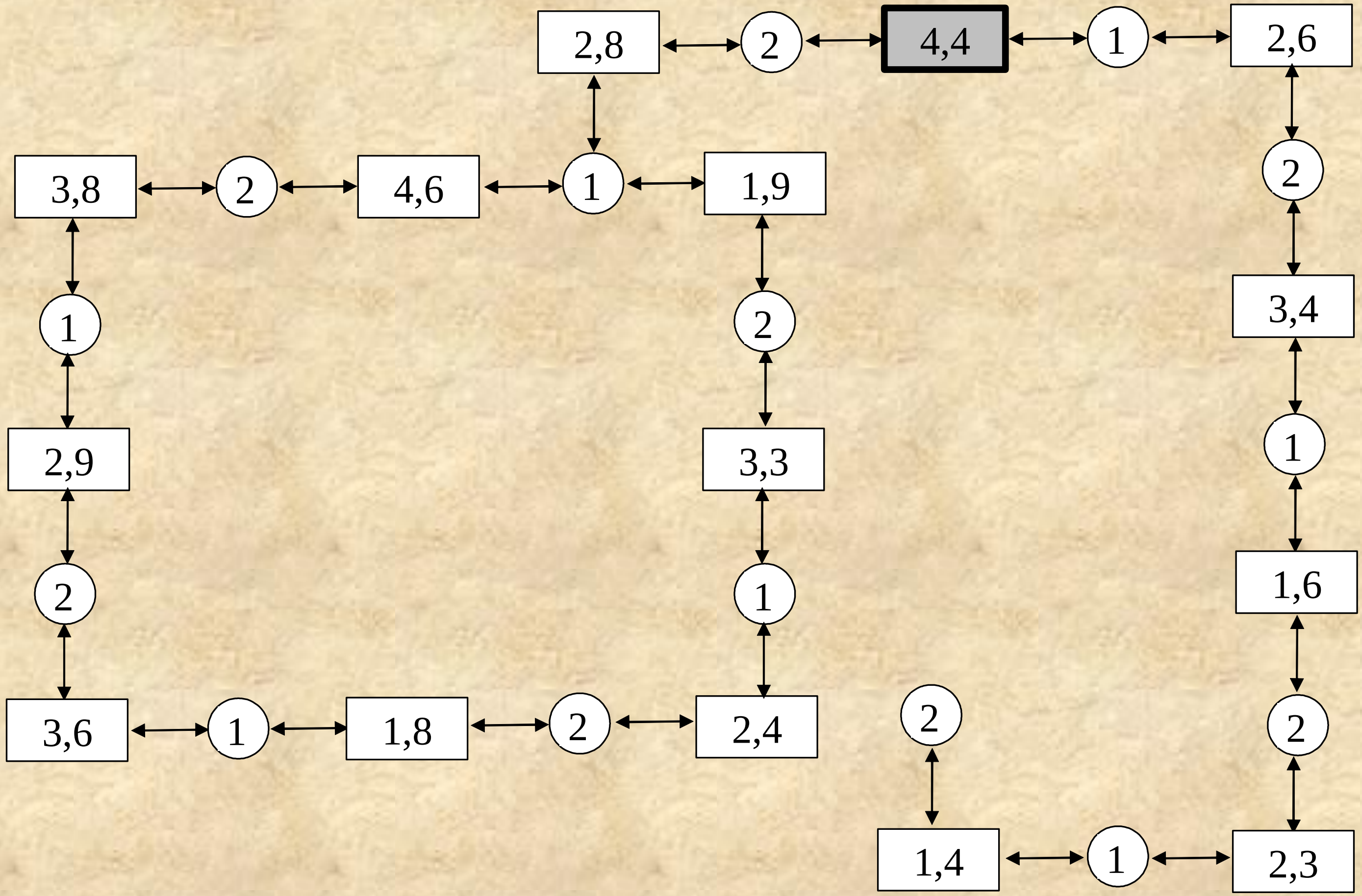
Трансформация структуры информированности в примере 9



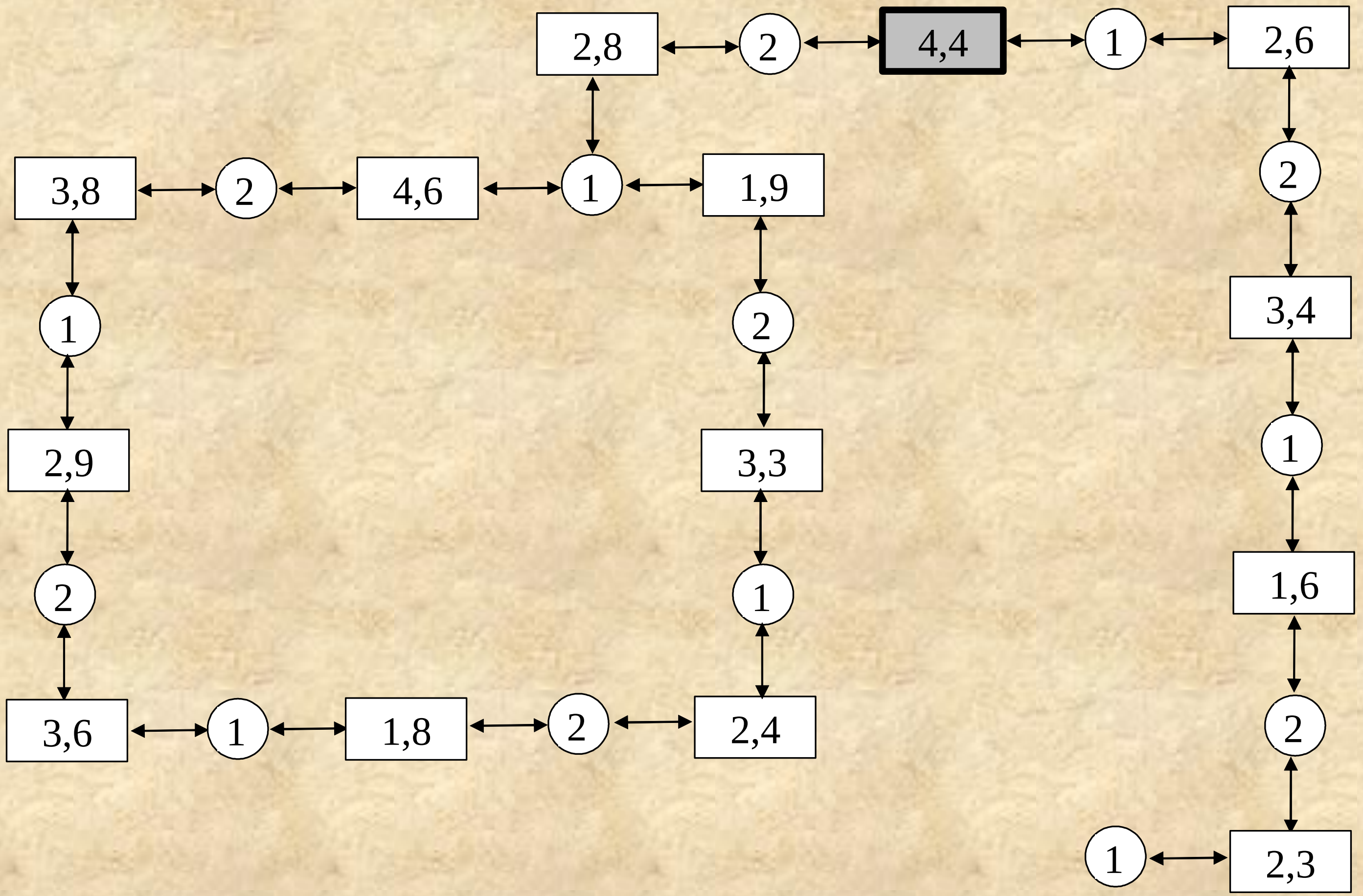
После 1-го вопроса и ответов



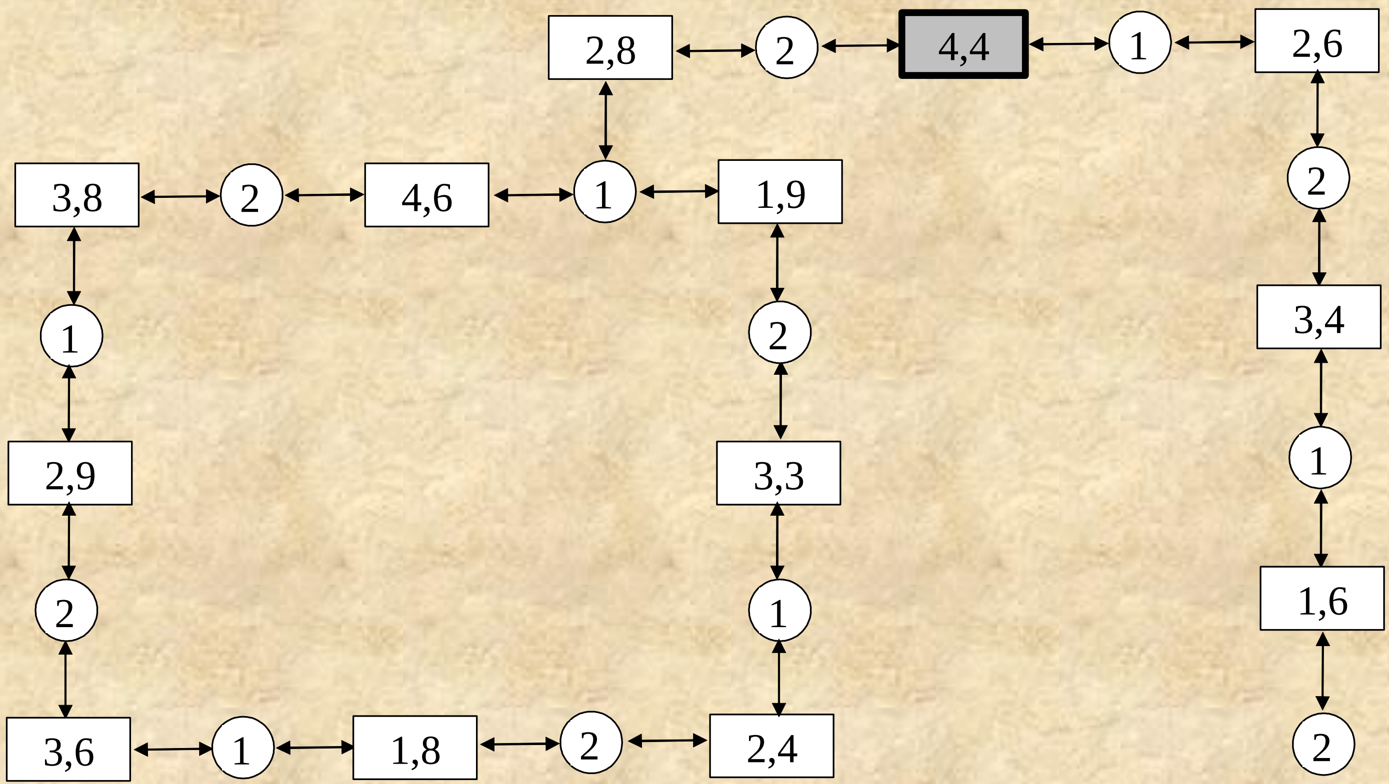
После 2-го вопроса и ответов



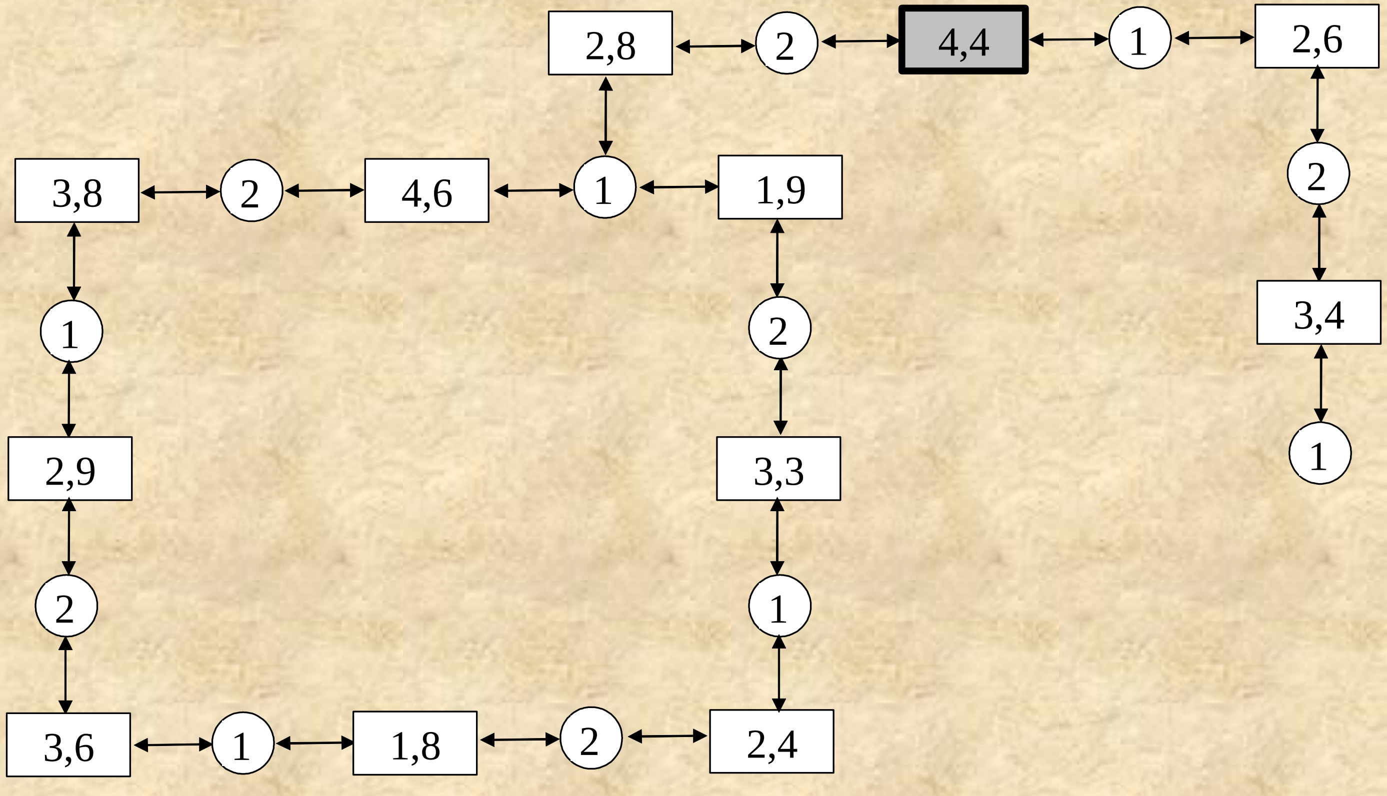
После 3-го вопроса и ответов



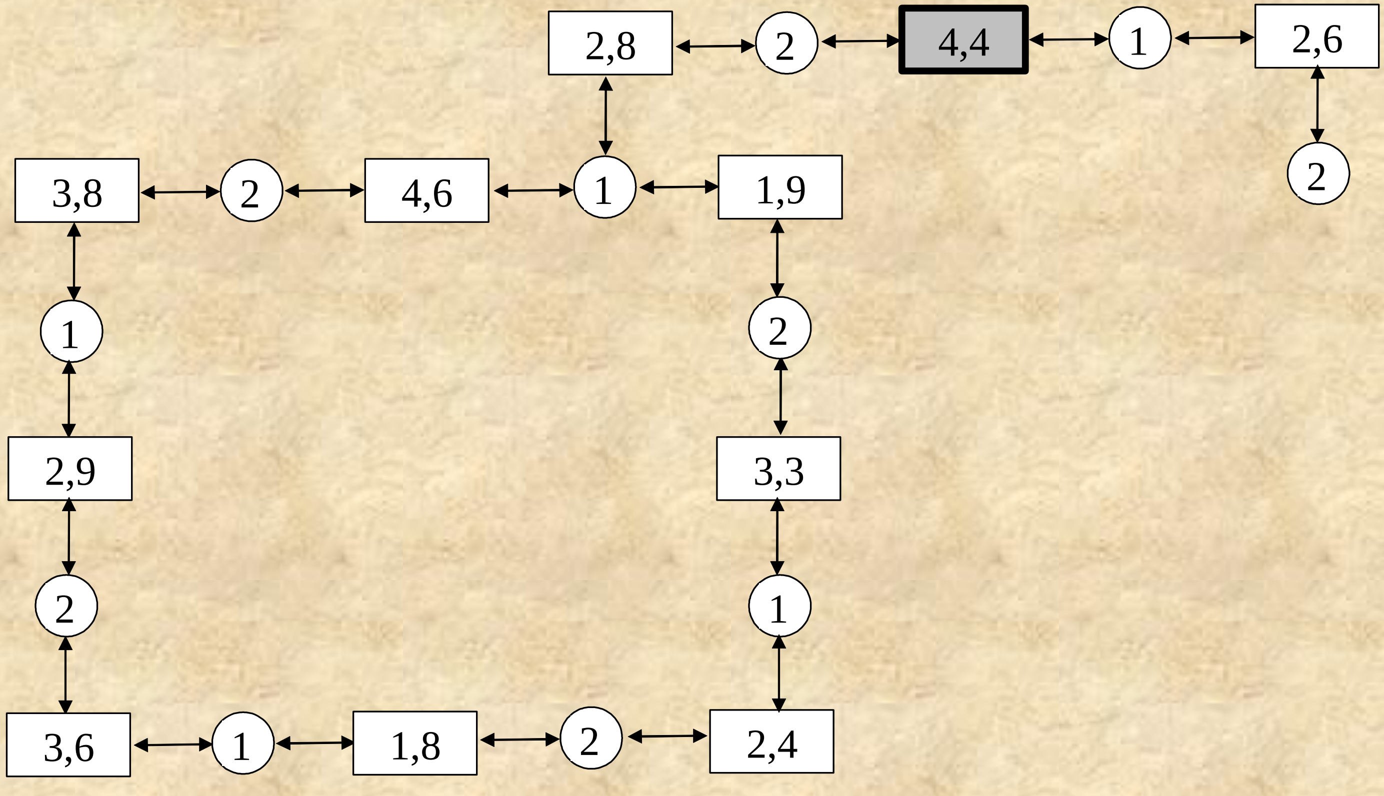
После 4-го вопроса и ответов



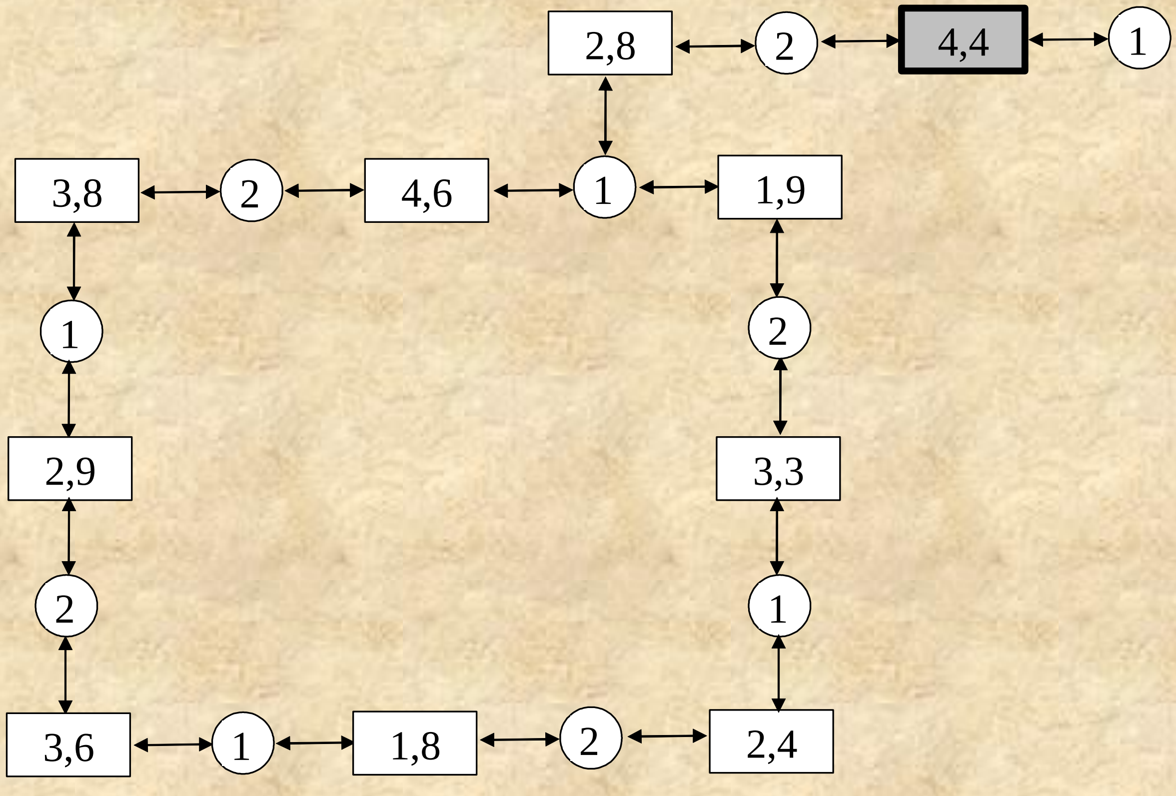
После 5-го вопроса и ответов



После 6-го вопроса и ответов



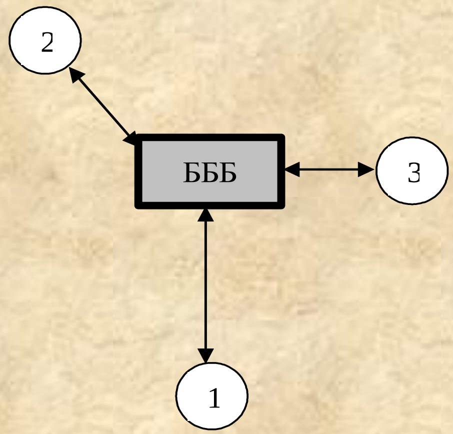
После 7-го вопроса и ответов



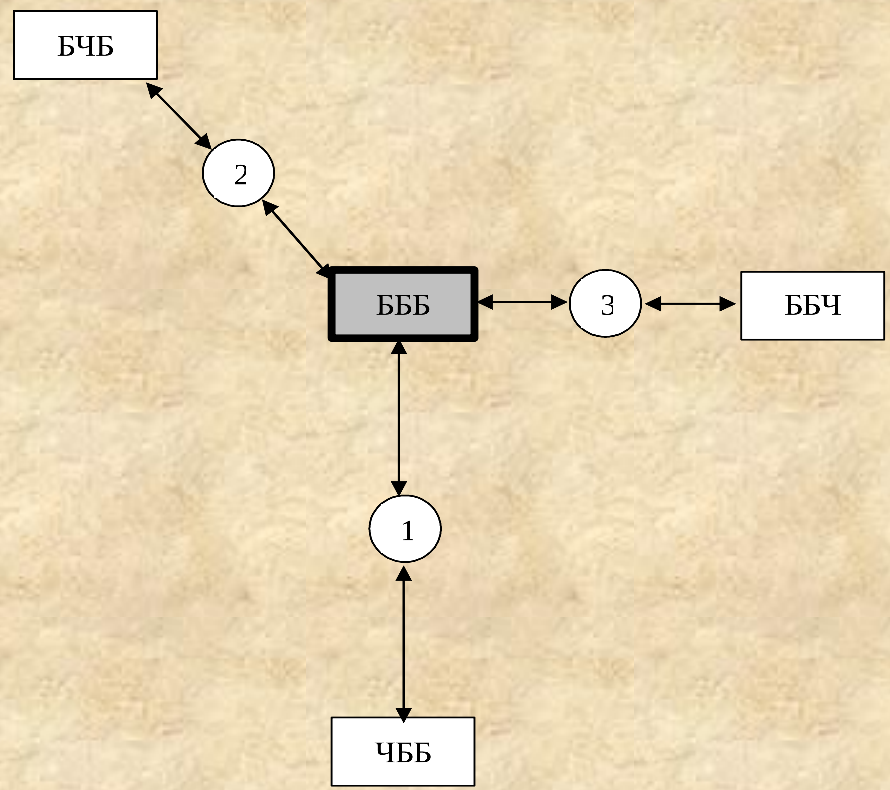
Пример 10
(три мудреца, белые и черные шапки)

БББ

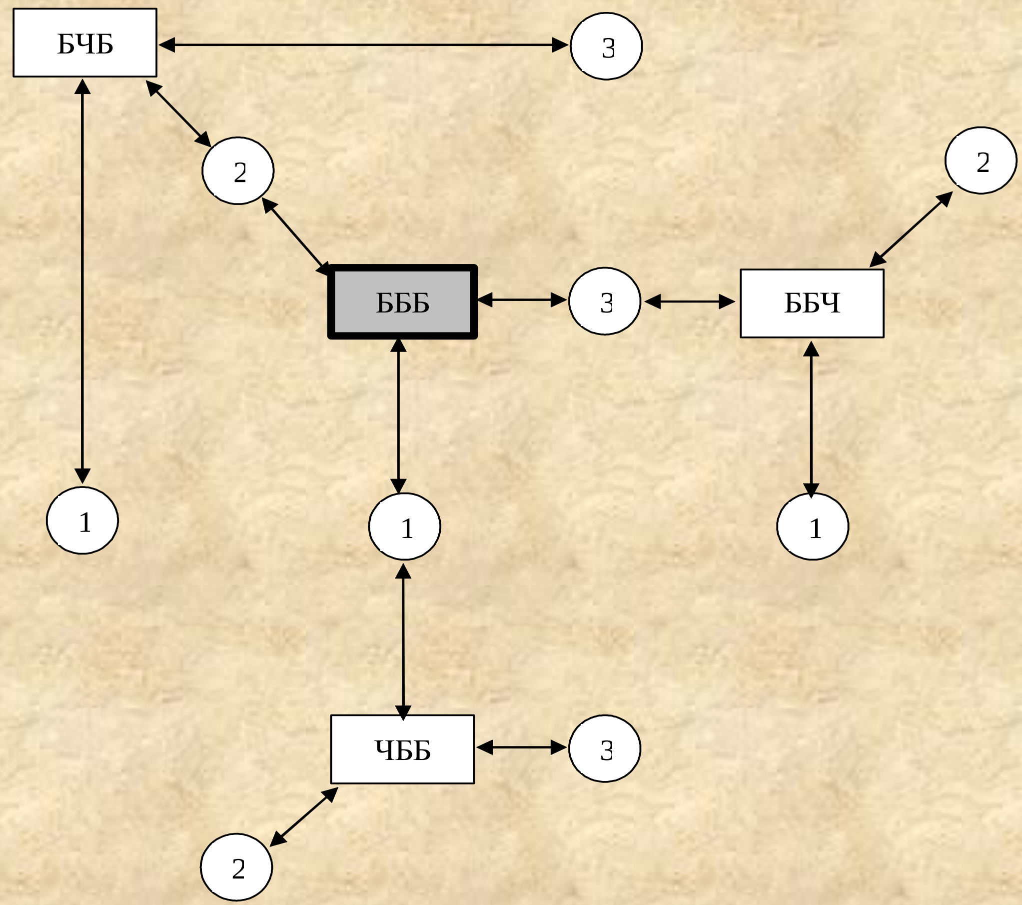
Пример 10
(три мудреца, белые и черные шапки)



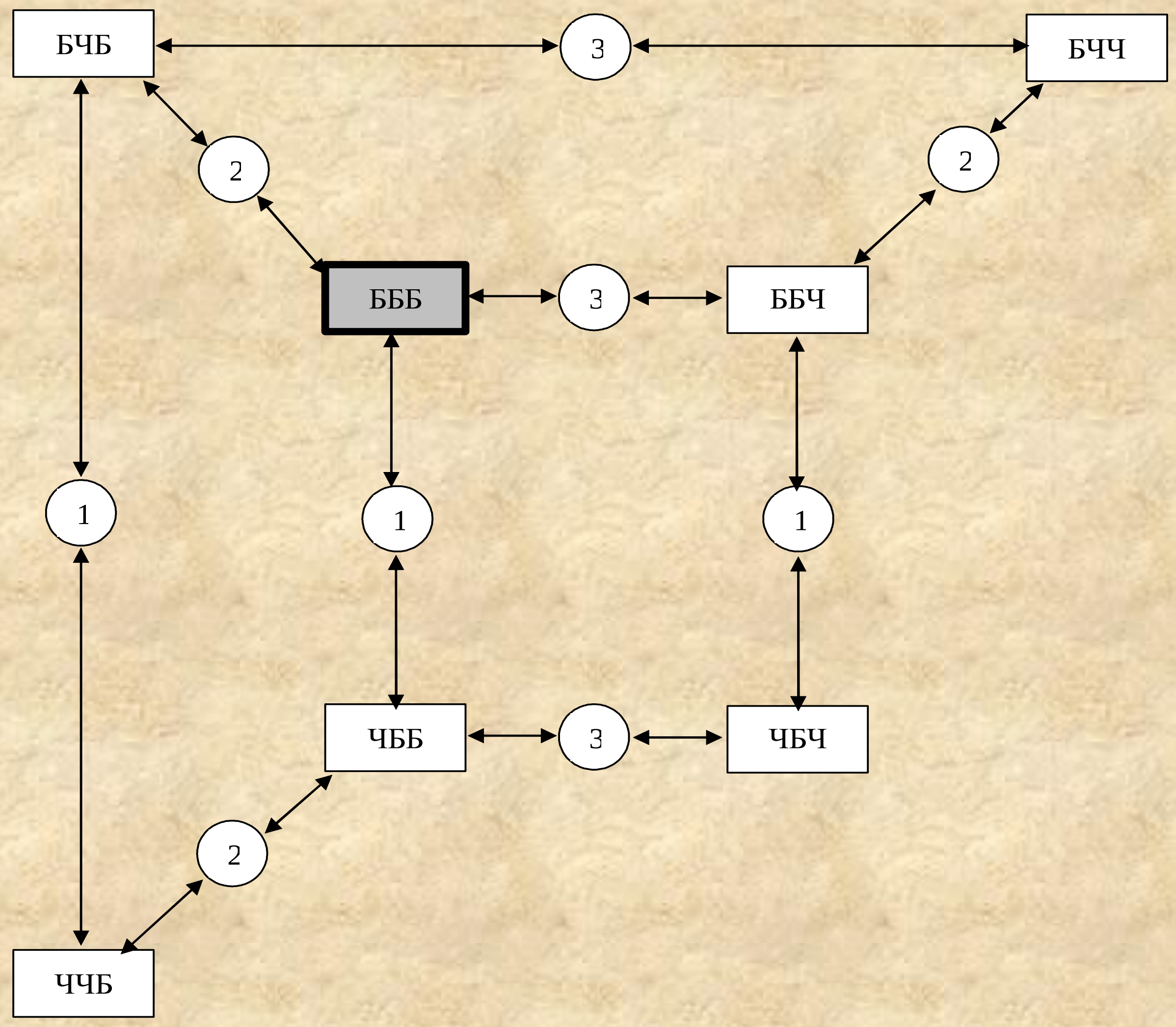
Пример 10
(три мудреца, белые и черные шапки)



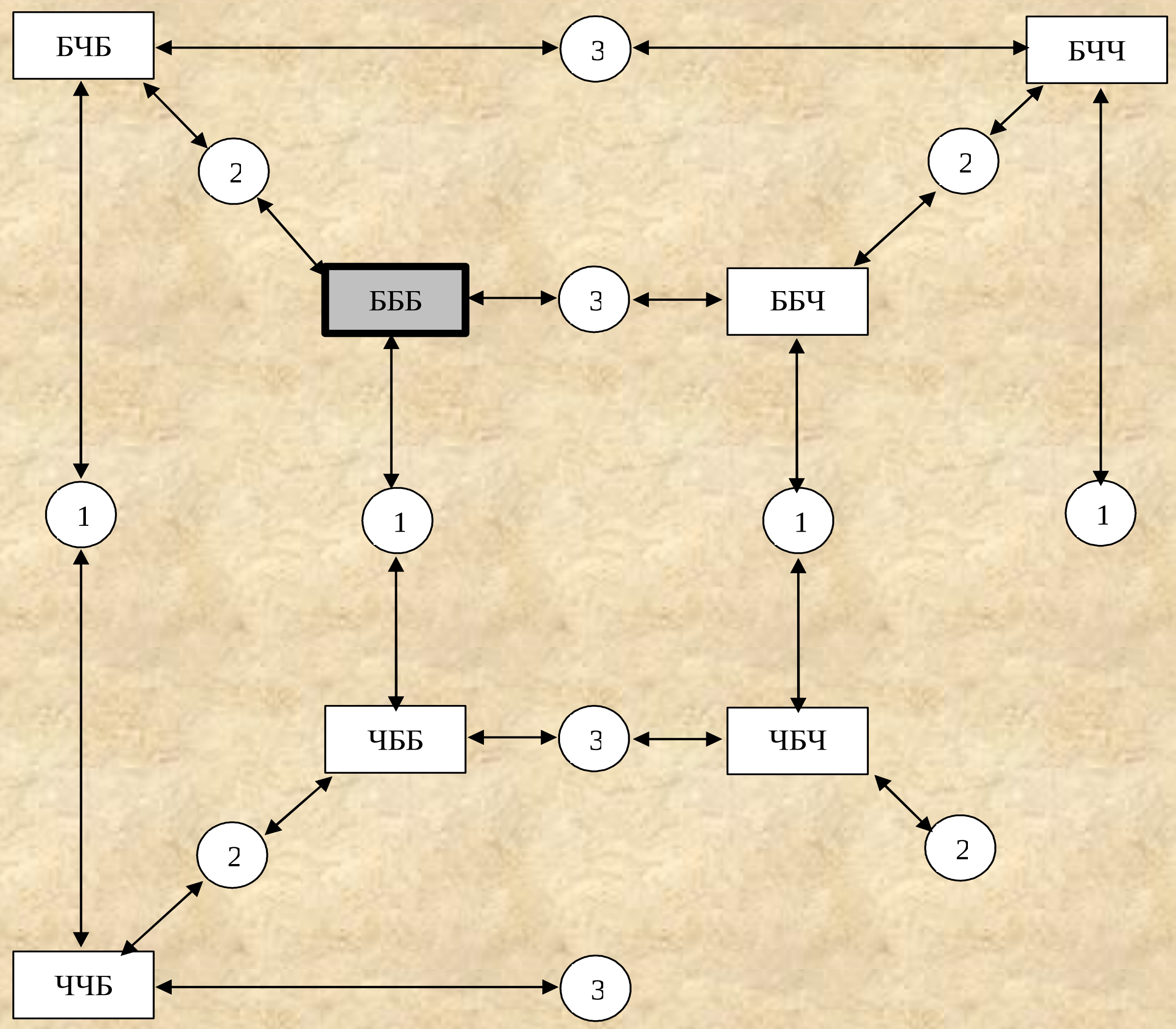
Пример 10
(три мудреца, белые и черные шапки)



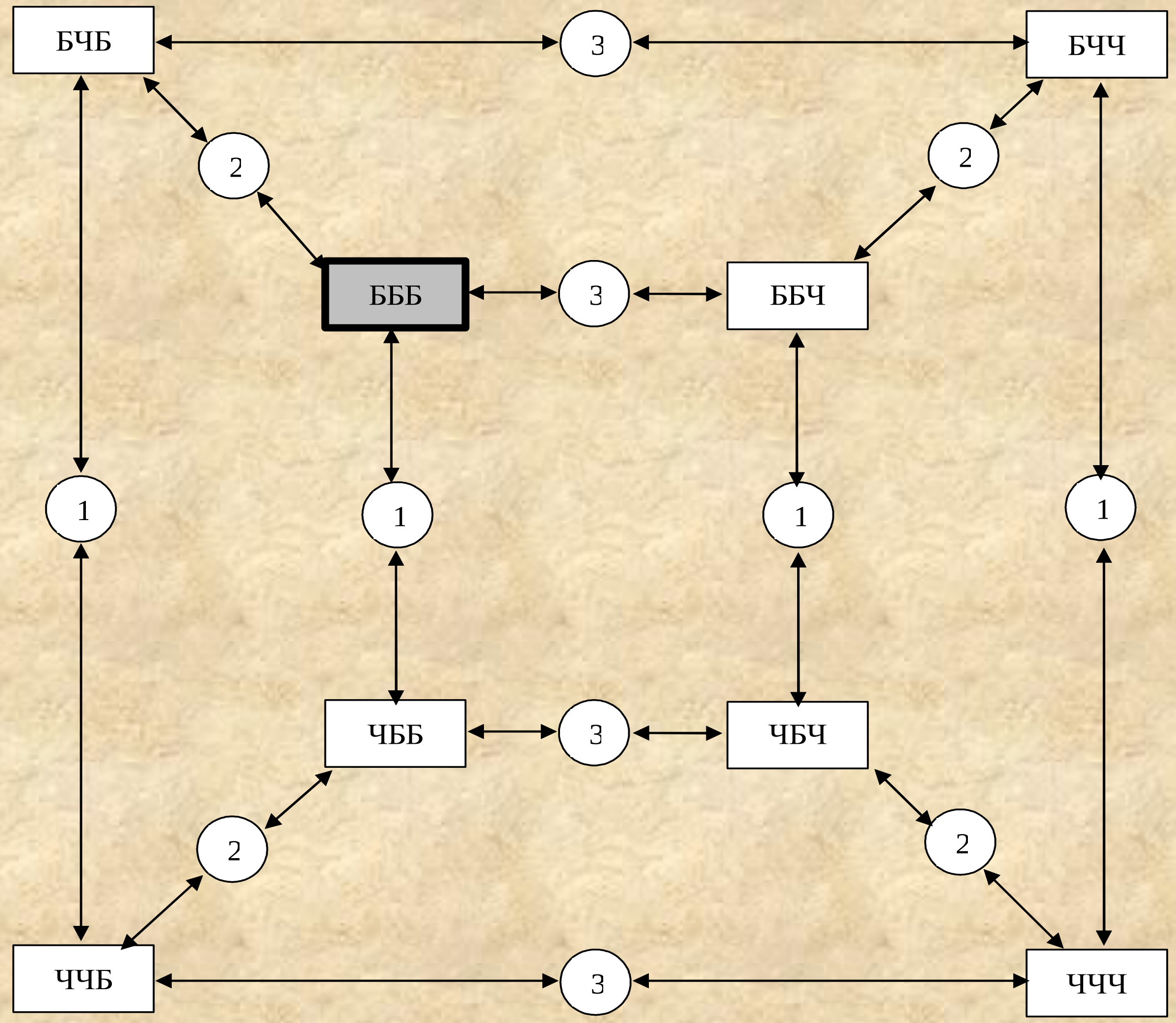
Пример 10
(три мудреца, белые и черные шапки)



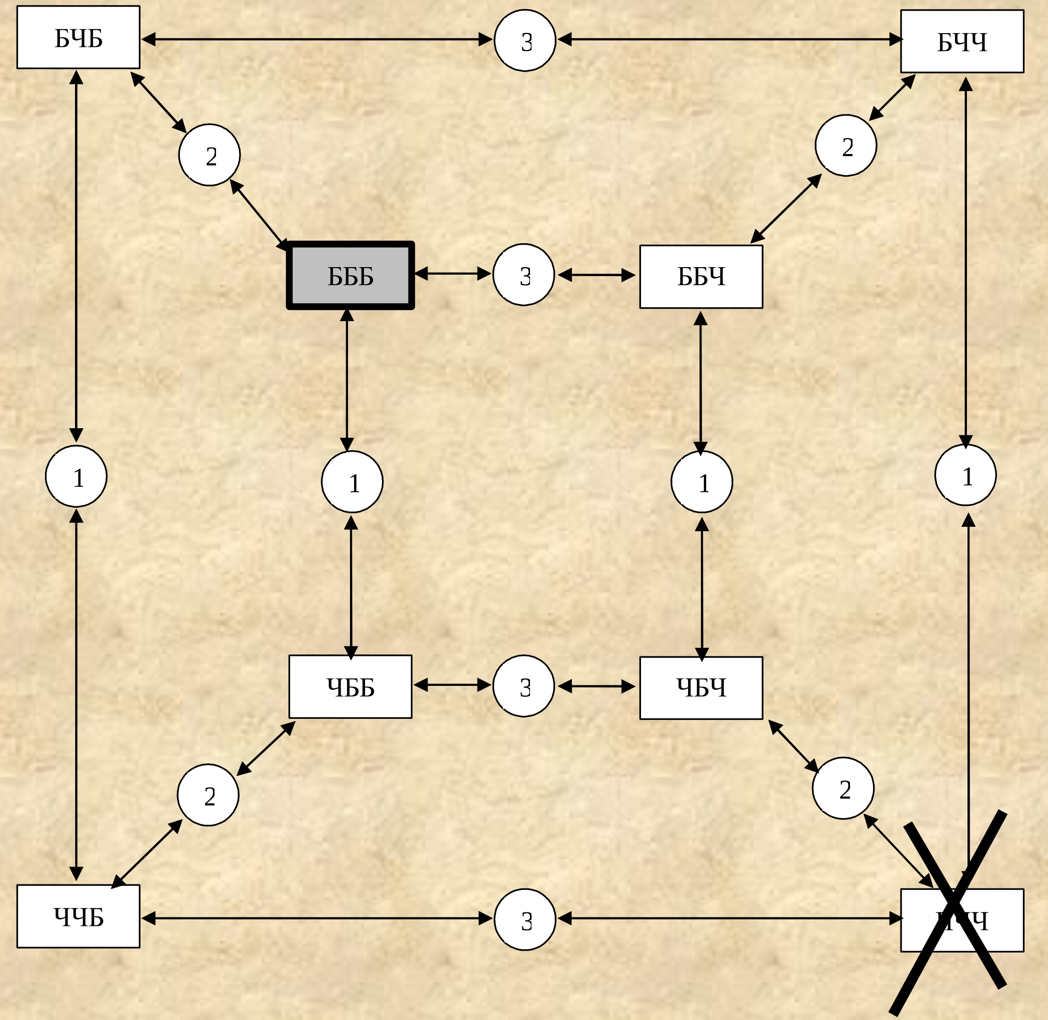
Пример 10
(три мудреца, белые и черные шапки)



Пример 10
(три мудреца, белые и черные шапки)

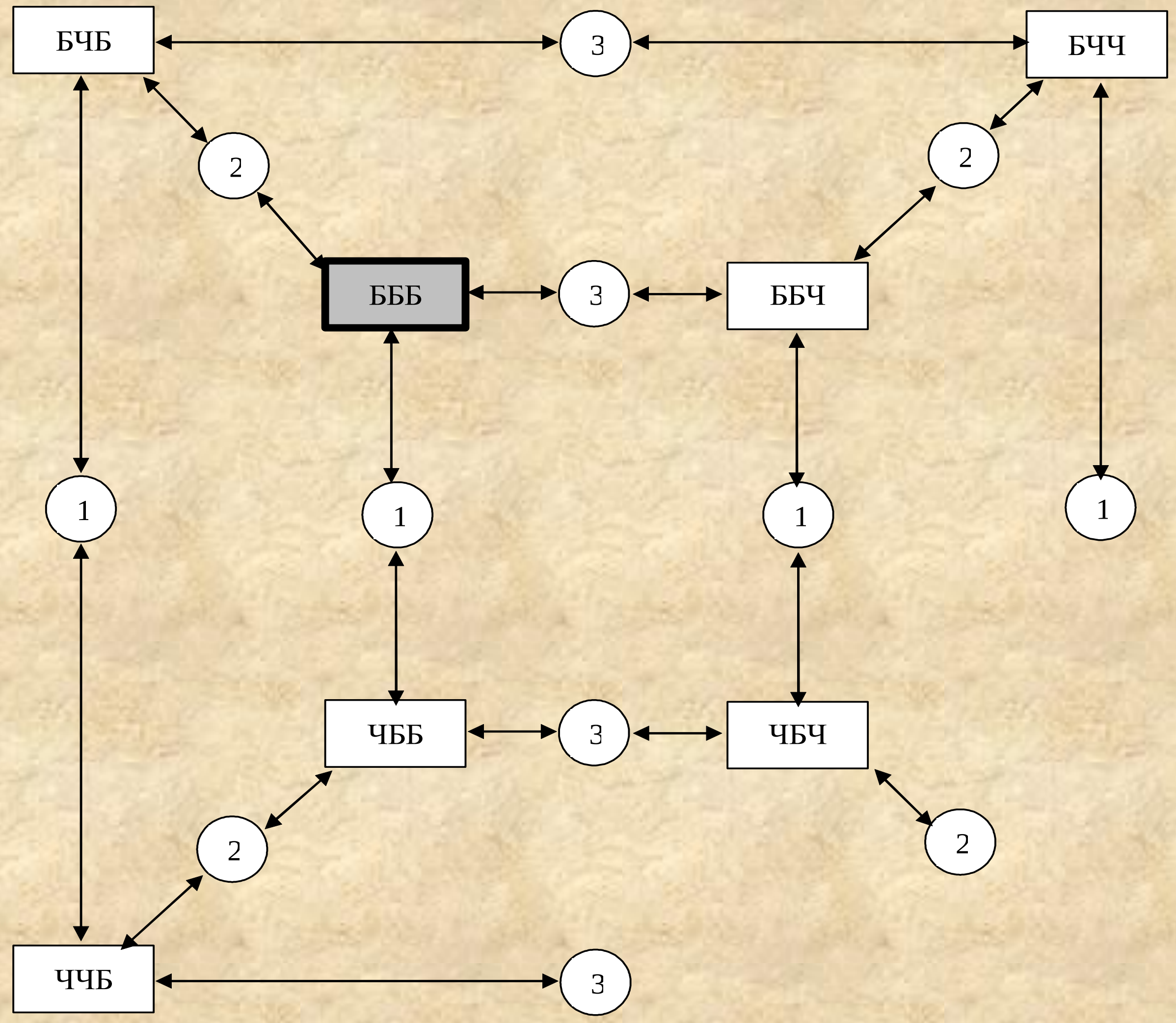


Сообщение

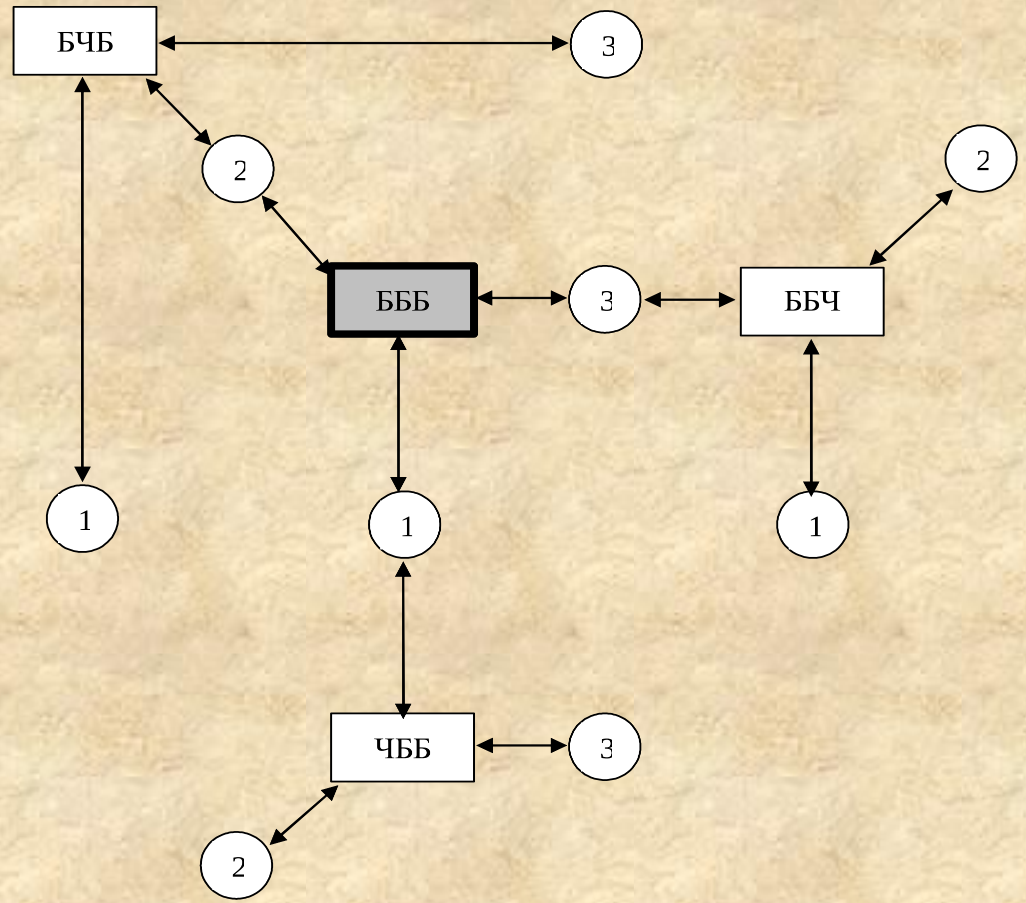


Сообщение «ЧЧЧ невозможно» делается гласно всем трем участникам

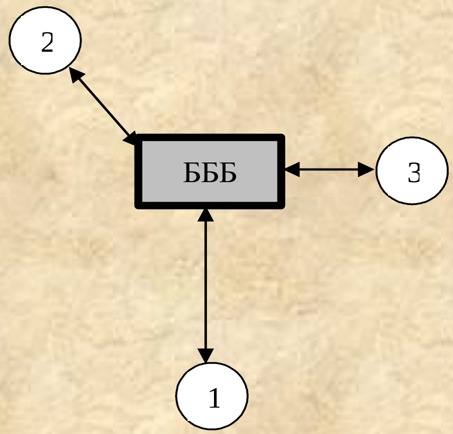
После сообщения



После первого шага игры



После второго шага игры: полная определенность



Содержание лекции

Точечные структуры информированности

Рефлексивные игры

Информационное равновесие

Граф рефлексивной игры

Информационные воздействия

Множественные структуры информированности

Согласованное информационное управление

Информационное управление без ограничений (агент доверяет центру)

1. Центр владеет полной информированностью о ситуации, агент – частичной
2. Центр сообщает агенту информацию
3. Агент корректирует свою информированность
4. Агент выбирает действие (максимизирует свою целевую функцию) на основе скорректированной информированности

Информационное управление без ограничений (пример 11)

Функция полезности агента имеет следующий вид:

$$f(\theta, x) = \theta x - \frac{x^2}{2}$$

θ – неопределенный параметр: случайная величина, принимающая каждое значение из множества $\Theta = \{1, 3, 7\}$ с одинаковой вероятностью 1/3

$x \in [0; +\infty)$ – действие, выбираемое агентом

Информационное управление без ограничений (пример 11)

Целевая функция агента:

$$\mathrm{E}_{\theta}\, f(\theta, x) = \mathrm{E}\theta \cdot x - \frac{x^2}{2}$$

$\mathrm{E}\theta$ – математическое ожидание случайной величины θ. Находя максимум целевой функции, агент может определить свое оптимальное действие:

$$x^* = \mathrm{E}\theta \dot{=} \frac{1}{3}(1+3+7) = \frac{11}{3}$$

Информационное управление без ограничений (пример 11)

Сообщения центра	Действия агента
{1}	1
{3}	3
{7}	7
{1, 3}	2
{1, 7}	4
{3, 7}	5
{1, 3, 7}	11/3

Стабильное информационное управление

1. Центр владеет полной информированностью о ситуации, агент – частичной
2. Центр сообщает агенту информацию
3. Агент корректирует свою информированность
4. Агент выбирает действие (максимизирует свою целевую функцию) на основе скорректированной информированности
5. Агент наблюдает результат своего действия

ИУ является стабильным, если наблюдаемый агентом результат не противоречит его информированности

Стабильное информационное управление (продолжение примера 11)

Истинное значение θ	**Сообщения центра**	**Действия агента (соответственно сообщениям центра)**
1	{1}, {1, 3},{1, 7}, {1, 3, 7}	1, 2, 4, 11/3
3	{3}, {1, 3}, {3, 7},{1, 3, 7}	3, 2, 5, 11/3
7	{7}, {1, 7}, {3, 7}, {1, 3, 7}	7, 4, 5, 11/3

Согласованное информационное управление

Ход мыслей «недоверчивого» агента:

«Центр своим сообщением пытается добиться от меня соответствующего действия. Но это мое действие является выгодным для центра. Является ли оно также выгодным для меня?»

Согласованное информационное управление

$F(\theta, x)$ – функция полезности центра

S – множество возможных сообщений

Стратегией центра – управлением – является выбор сообщения в зависимости от известного ему состояния природы, т.е. выбор функции $s(\theta)$

Шаг 1. Центр сообщает агенту функцию $s(\theta)$: $\Theta \to S$.
Шаг 2. Центр узнает истинное значение θ.
Шаг 3. Центр сообщает значение $s \in S$.
Шаг 4. Агент выбирает действие $x = x(s)$.

Согласованное информационное управление

Агента, получившего на шаге 3 сообщение s, интересует лишь множество $\{\theta \in \Theta \mid s(\theta) = s\}$. Поэтому можно считать, не ограничивая общности, что на шаге 1 центр сообщает агенту некоторое разбиение множества Θ. Множество Θ будем считать конечным, тогда разбиение имеет вид

$$S = \{\Theta_1, \ldots, \Theta_m\}.$$

Фактически, стратегией центра (управлением) является выбор разбиения.

Условие согласованности управления (=согласованности разбиения)

$\forall i \in M \ \ \forall \theta \in \Theta_i \ \ \forall x^* \in X_i^* \ \forall x \in X^*$ либо $x \in X_i^*$, либо

$F(\theta, x^*) \geq F(\theta, x)$

$X_i^* = \operatorname*{Argmax}_{x \in X} \mathrm{E}_{\theta \in \Theta_i} f(\theta, x), i = 1, \ldots, m$ – множество оптимальных действий агента при сообщении Θ_i

$X^* = X_1^* \cup \ldots \cup X_m^*.$ – множество оптимальных действий агента при каком-либо сообщении

Согласованные разбиения (пример 12)

$$f(\theta, x) = \theta x - \frac{x^2}{2}$$ – функция полезности агента

$$F(\theta, x) = \gamma \theta x - \frac{x^2}{2}$$ – функция полезности центра

Параметр γ характеризует близость интересов агента и центра

Условие согласованности в примере 12 для разбиения $S = \{\{1\}, \{3\}, \{7\}\}$

$$X_1^* = \{1\},\ X_2^* = \{3\},\ X_3^* = \{7\}$$

$$F(1,1) \ge F(1,3) \Leftrightarrow \gamma - \frac{1}{2} \ge 3\gamma - \frac{9}{2}$$

$$F(1,1) \ge F(1,7) \Leftrightarrow \gamma - \frac{1}{2} \ge 7\gamma - \frac{49}{2}$$

$$F(3,3) \ge F(3,1) \Leftrightarrow 9\gamma - \frac{9}{2} \ge 3\gamma - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{7} \le \gamma \le \frac{5}{3}$$

$$F(3,3) \ge F(3,7) \Leftrightarrow 9\gamma - \frac{9}{2} \ge 21\gamma - \frac{49}{2}$$

$$F(7,7) \ge F(7,1) \Leftrightarrow 49\gamma - \frac{49}{2} \ge 7\gamma - \frac{1}{2}$$

$$F(7,7) \ge F(7,3) \Leftrightarrow 49\gamma - \frac{49}{2} \ge 21\gamma - \frac{9}{2}$$

Согласованные разбиения в примере 12

Разбиение	**Значения γ, при которых разбиение согласовано**
$\{\{1\}, \{3\}, \{7\}\}$	$\frac{5}{7} \le \gamma \le \frac{5}{3}$
$\{\{1\}, \{3, 7\}\}$	$1 \le \gamma \le 3$
$\{\{3\}, \{1, 7\}\}$	$\varnothing$
$\{\{7\}, \{1, 3\}\}$	$\frac{9}{14} \le \gamma \le \frac{3}{2}$
$\{1, 3, 7\}$	$\gamma > 0$

Полные и тривиальные разбиения

Полное разбиение – разбиение множества, при котором каждая часть разбиения совпадает с отдельным элементом множества.

Тривиальное разбиение – разбиение, где часть ровно одна: $S = \{\Theta\}$. Всегда является согласованным.

<u>Утверждение 5.</u> Если целевые функции центра и агента совпадают, то полное разбиение является согласованным.

Согласованные разбиения в примере 12

Разбиение	**Значения γ, при которых разбиение согласовано**	**Значение целевой функции центра**
{{1}, {3}, {7}}	$\frac{5}{7} \le \gamma \le \frac{5}{3}$	$59\left(\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{6}\right)$
{{1}, {3, 7}}	$1 \le \gamma \le 3$	$51\left(\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{6}\right)$
{{3}, {1, 7}}	$\varnothing$	–
{{7}, {1, 3}}	$\frac{9}{14} \le \gamma \le \frac{3}{2}$	$57\left(\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{6}\right)$
{1, 3, 7}	$\gamma > 0$	$\frac{169}{3}\left(\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{6}\right)$

Оптимальные согласованные разбиения в примере 12

При $0 < \gamma < 9/14$ и $\gamma > 5/3$ оптимальным является разбиение

$$S^* = \{1, 3, 7\}$$

При $9/14 \le \gamma < 5/7$ оптимальным является разбиение

$$S^* = \{\{7\}, \{1, 3\}\}$$

При $5/7 \le \gamma \le 5/3$ оптимальным является разбиение

$$S^* = \{\{1\}, \{3\}, \{7\}\}$$

Утверждение 6. Если целевые функции центра и агента совпадают, то полное разбиение является оптимальным (соответствует оптимальному согласованному информационному управлению).

Содержание лекции

Точечные структуры информированности

Рефлексивные игры

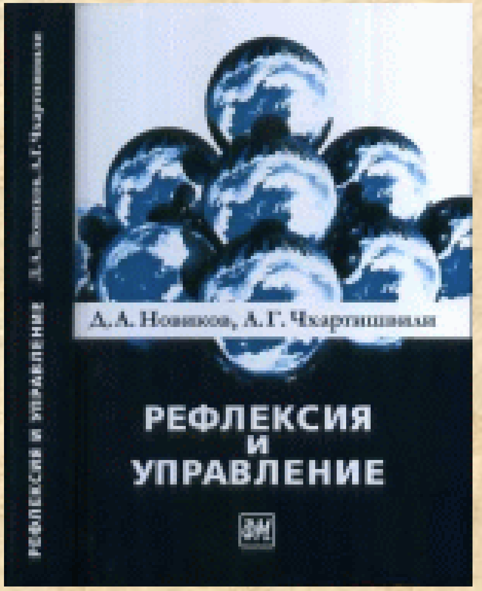
Информационное равновесие

Граф рефлексивной игры

Информационные воздействия

Множественные структуры информированности

Согласованное информационное управление



Рефлексивные игры и информационное управление

Чхартишвили Александр Гедеванович
(ИПУ РАН)

sandro_ch@mail.ru

www.mtas.ru