Лекция 1. Введение в исследование операций

Определение. Предмет. История
Классификация задач и подходов.

Исследование операций: определения

- Дисциплина, занимающаяся разработкой и применением методов **нахождения оптимальных решений** на основе **математического моделирования, статистического моделирования и различных эвристических подходов** в различных областях человеческой деятельности. (Wiki, Е.С. Вентцель)
- **Комплексная** математическая дисциплина, занимающаяся **построением, анализом и применением** математических моделей принятия оптимальных (наилучших в каком-то смысле) решений. (Волков И.К., Загоруйко Е.А.)
- Научный метод выработки количественно обоснованных **рекомендаций** по принятию решений

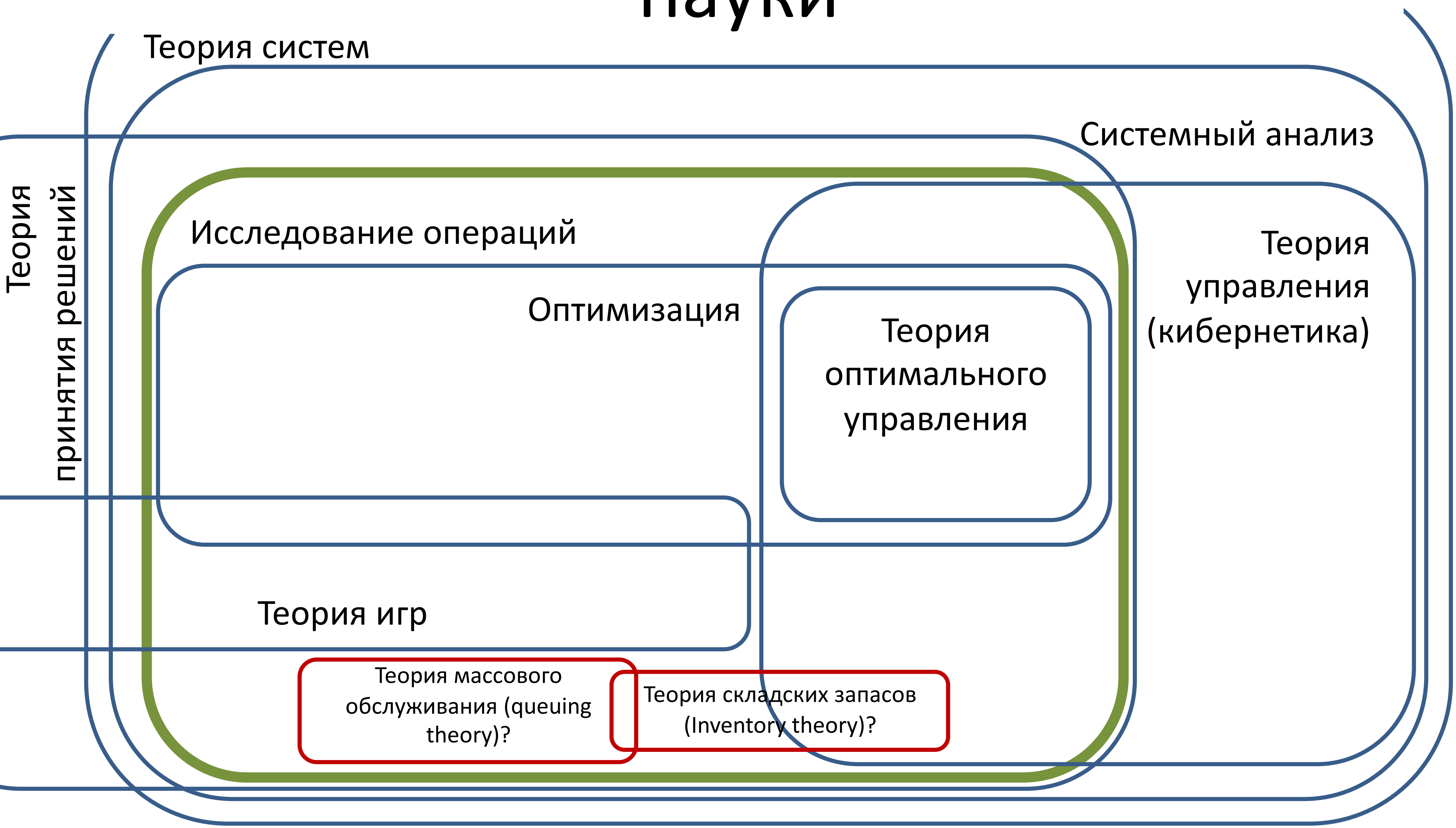
- A discipline that deals with the application of advanced analytical methods to help make **better decisions**. (Wiki)
- A scientific method of providing executive departments with a **quantitative basis for decisions** regarding the operations under their control.

- Есть даже такое определение: *«Наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов* ***наиболее оптимального (sic!)*** *управления организационными системами. (Вавилов В.А., Змеев О.А., Змеева Е.Е. Электронное пособие «Исследование операций»)»*

Исследование операций: вехи истории

- 40-е гг XX в. Умники – на благо Родины
- 50-е гг Конверсия: науку – в производство
- 60-е гг Управление экономикой (СССР, Великобритания)
- 70-е гг Системный анализ – комплексный подход к решению сложных задач
- 80-е гг Широкое применение вычислительной техники
- 90-е гг Новые приложения – информационные технологии
- 00-е гг Поведенческие модели и машинное обучение

Исследование операций и другие науки



Исследование операций: синонимы

- Исследование операций
- Operations research
- Operational research
- Operations/research (☺)
- Operational analysis
- Теория принятия решений
- Decision science
- Quantitative management
- Management science (!)

- Теория оптимизации (началась раньше, но считается частью ИО)
- Математическое программирование (в т.ч. линейное)
- Optimization theory
- Mathematical programming
- Системный анализ
- Теория систем
- Systems analysis
- Systems theory

Устойчивое словосочетание: Системный анализ и исследование операций

Исследование операций: учебники

- Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
- Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: учебное пособие для вузов, 2-е издание. М: — Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002.
- Taha H. Operations research: an introduction. 8th ed. Pearson Prentice Hall, 2007.

Исследование операций: общая постановка задачи

- В некотором пространстве $\mathfrak{X}$ задано **множество допустимых решений** $X \subseteq \mathfrak{X}$
- Также задано множество параметров (внешних факторов) A
- На множестве $X \times A$ задана функция $F: X \times A \to \mathfrak{R}$ – **целевая функция** $F(x, \alpha)$
- Задача – найти **оптимальное решение**, то есть

$$x^*(\,\cdot\,) \in \operatorname{Arg\,max}_{x \in X} F(x, \alpha)$$

или все множество оптимальных решений

$$X^*(\,\cdot\,) = \operatorname{Arg\,max}_{x \in X} F(x, \alpha)$$

Пример?

Исследование операций: классификация задач

- Основание классификации – информированность
  - $A = \{\alpha\}$ – полная информация, задача оптимизации
  - A известно, полная информация, параметрическая оптимизация, $x^*(\alpha)$
  - A на момент принятия решения неизвестно – задача принятия решения в условиях неопределенности
    - x^* не может зависеть от α – необходимо устранять неопределенность

Исследование операций: виды неопределенности

- Природная неопределенность (неизвестные объективные факторы)
  - Интервальная неопределенность
    - Принцип максимального гарантированного результата (критерий Вальда)

$$\Phi_V(x) = \min_{\alpha \in \mathrm{A}} F(x, \alpha)$$

    - Гипотеза благожелательности

$$\Phi_O(x) = \max_{\alpha \in \mathrm{A}} F(x, \alpha)$$

    - Умеренный оптимизм (критерий Гурвица)

$$\Phi_H(x) = \lambda \cdot \Phi_V(x) + (1 - \lambda) \cdot \Phi_O(x)$$

    - Гипотеза равных вероятностей (критерий Лапласа)

$$\sum_{\alpha \in A} F(x, \alpha)$$

    - Минимизация сожалений (критерий Сэвиджа)

$$\min_{\alpha \in A} [F(x, \alpha) - \max_{x \in X} F(x, \alpha)] \to \max_{x \in X}$$

  - Вероятностная (стохастическая) неопределенность
    - Математическое ожидание $\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) F(x, \alpha)$
    - Матожидание при ограничении на риск $(P(\{\alpha: F(x^*, \alpha) \leq B\}) \leq r)$
    - VaR (value at risk) среднее значение потерь (значения целевой функции ниже заданного или заданного процента наихудших случаев)
  - Нечеткая неопределенность
- Игровая неопределенность (целенаправленные действия третьих лиц)

Устранение неопределенности: пример

<table>
<tr><td colspan="4" rowspan="3">$F(x, \alpha)$</td><td colspan="4">α</td></tr>
<tr><td colspan="2">Легкий билет</td><td colspan="2">Сложный билет</td></tr>
<tr><td>Проверят шпаргалку</td><td>Не проверят шпаргалку</td><td>Проверят шпаргалку</td><td>Не проверят шпаргалку</td></tr>
<tr><td rowspan="4">x</td><td rowspan="2">Готовиться</td><td>Писать шпаргалку</td><td>Подготовленный со шпаргалкой</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Не писать шпаргалку</td><td>Подготовленный без шпаргалки</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Не готовиться</td><td>Писать шпаргалку</td><td>Неподготовленный со шпаргалкой</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Не писать шпаргалку</td><td>Неподготовленный без шпаргалки</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Устранение неопределенности: пример

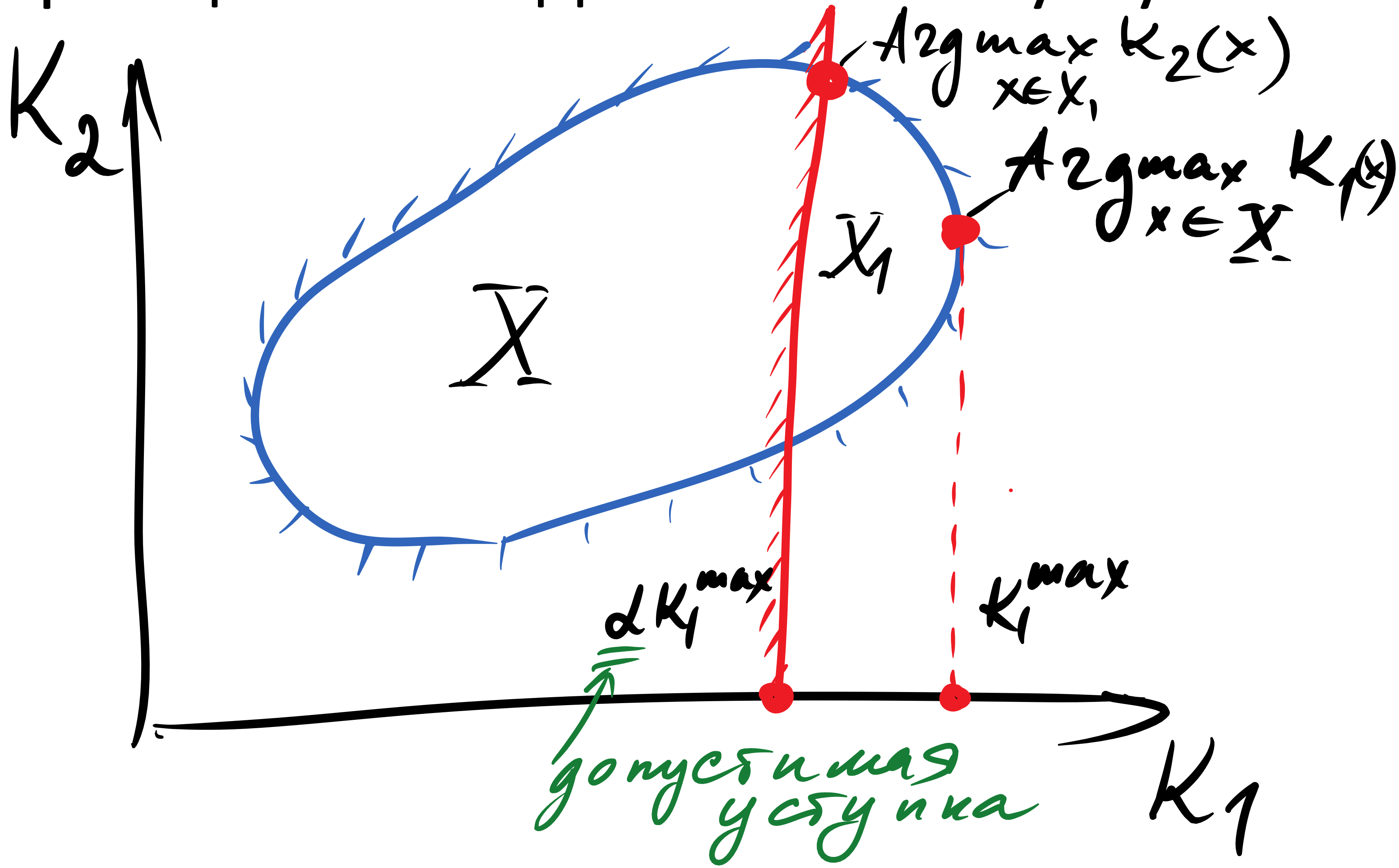
				α			
				Легкий билет		Сложный билет	
				Проверят шпаргалку	Не проверят шпаргалку	Проверят шпаргалку	Не проверят шпаргалку
x	Готовиться	Писать шпаргалку	Подготовленный со шпаргалкой	2	5	2	4
		Не писать шпаргалку	Подготовленный без шпаргалки	5	5	3	3
	Не готовиться	Писать шпаргалку	Неподготовленный со шпаргалкой	2	5	2	4
		Не писать шпаргалку	Неподготовленный без шпаргалки	4	4	2	2

- Найти оптимальное решение

Классификация задач исследования операций

- По числу критериев оптимизации
  - Однокритериальные задачи (или просто задачи оптимизации)
  - Задачи многокритериальной оптимизации
    - Взвешенная свертка
    - Парето-оптимальные решения
    - Лексиминный критерий
    - Переход к ограничениям
    - Принцип последовательных уступок

Принцип последовательных уступок



Закончили с исследованием операций

- Выводы
  - ИО – это не только математика, но и методология
  - Прикладная ориентированность ИО
  - Подробнее – в курсе теории принятия решений (проф. Ф.Т. Алескеров)

- Переходим к оптимизации

Общая постановка задачи оптимизации

- В некотором пространстве $\mathfrak{X}$ задано **множество допустимых альтернатив** $X \subseteq \mathfrak{X}$
- На множестве X задана функция $F: X \to \mathfrak{R}$ – **критерий оптимизации**
- Задача – найти **оптимальную допустимую альтернативу**, то есть

$$x^* \in \operatorname{Arg\,max}_{x \in X} F(x)$$

или все **множество оптимальных альтернатив**

$$A^* = \operatorname{Arg\,max}_{x \in X} F(x)$$

Классификация задач оптимизации

- По типу пространства альтернатив
  - Число измерений
    - $\mathfrak{X} = \mathfrak{R}^n$ – конечномерные задачи (задачи математического программирования)
      - $n = 1$ - задачи одномерной оптимизации
      - $n > 1$ – задачи многомерной оптимизации
    - $\mathfrak{X} = Z^n$– целочисленного программирования - **задачи дискретной (комбинаторной) оптимизации**
    - $\mathfrak{X}$ – пространство функций (задачи вариационного исчисления, F называется функционалом)
      - $\mathfrak{X} = \{0,1\}^n$ – задачи двоичного (бинарного) программирования (почему этот случай эквивалентен Z^n?)
      - $x(t)$ – функции времени (задачи оптимального управления)

Пример?

Классификация задач оптимизации

- По типу множества альтернатив
  - Конечность множества
    - X– конечно или счетно - **задачи дискретной (комбинаторной) оптимизации (discrete, combinatory)**
    - Иначе – «непрерывные» задачи оптимизации (задачи непрерывной оптимизации), continuous

Классификация задач математического программирования

- По типу пространства альтернатив (cntd)
  - Наличие ограничений
    - $X = \mathfrak{X}$ – задачи безусловной оптимизации
    - $X \subset \mathfrak{X}$ – задачи условной оптимизации
      - с ограничениями типа равенств
      - с ограничениями типа неравенств
      - более сложным образом
  - Динамика
    - Статическая задача (время отсутствует)
    - Динамическая задача
      - Если при этом время дискретно – задача динамического программирования

Классификация задач математического программирования

- По направлению оптимизации
  - max – задачи максимизации
  - min – задачи минимизации
- По виду критерия максимизации F *и* неравенств-ограничений
  - F – линейная функция – задача линейного программирования
  - F – квадратичная форма – задача квадратичного программирования (определение?)
  - F – выпуклая вверх (вогнутая) функция – задача выпуклого программирования (а допустимое множество?)
  - F – произвольная нелинейная функция – задача нелинейного программирования
  - F – негладкая, соответственно, негладкая оптимизация
  - F и ограничения сепарабельны (сепарабельное прогр-е)
  - F и ограничения заданы **позиномами** – геометрическое программирование

Классификация задач математического программирования

- **По объекту поиска**
  - Экстремальное значение критерия
  - Точка экстремума
  - Множество, на котором достигается экстремум
  - Множество ε-оптимальных решений

Классификация методов оптимизации

- По характеру искомых решений
  - Методы глобальной оптимизации
  - Методы локальной оптимизации
- Методы поиска
  - детерминированные
  - случайные (стохастические)
  - комбинированные
- По виду представления решения
  - Аналитические
  - Численные
  - Графические

Аналитические методы оптимизации

- Математический анализ: безусловная оптимизация
  - одномерная
  - многомерная
    - О непрерывности и дифференцируемости
- Условная нелинейная оптимизация
  - Лагранжиан
  - Условия первого порядка (необходимое условие – теорема Куна-Таккера)
  - Негладкость (субградиенты)

Условия первого порядка (прямая теорема Куна-Таккера)

Задача 1: $F(x) \to \max$ при $\varphi_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m$.
Функция Лагранжа $L(x, \lambda) = F(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_i(x)$,
$x = (x_1, \dots, x_n), \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.
Если x^* - решение Задачи 1, то найдутся такие $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, что

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*) = 0, i = 1, \dots, n,$$

$$\varphi_j(x^*) \lambda_j = 0, j = 1, \dots, m.$$

Пример?

Аналитические методы оптимизации

- Глобальная оптимизация
  - Проверка свойств функции (ограниченность, липшицевость, и т.д.)
  - Выпуклое программирование

Общая итеративная схема решения задачи оптимизации

Общая итеративная схема

Вводные данные: начальная точка x_0 и требуемая точность $\varepsilon > 0$.

Настройка. Полагаем $k = 0$ и $I_{-1} = \varnothing$. Здесь k — это счетчик итераций, а I_k — это накапливаемая *информационная модель* решаемой задачи.

Основной цикл

1. Задаем вопрос оракулу $\mathcal{O}$ в точке x_k.
2. Пересчитываем информационную модель:
$$I_k = I_{k-1} \cup \big(x_k, \mathcal{O}(x_k)\big).$$
3. Применяем правила метода $\mathcal{M}$ для анализа модели I_k и формируем точку x_{k+1}.
4. Проверяем критерий остановки $\mathcal{T}_\varepsilon$. Если ответ положительный, то генерируем ответ $\bar{x}$. В противном случае полагаем $k := k + 1$ и переходим на шаг 1.

Пример – оценка трудоемкости задачи безусловной глобальной оптимизации

- Класс задач минимизации $\mathscr{C}$, определенный как

Модель: $\min\limits_{x \in B_n} f(x)$,

$f(x)$ является l_∞-липшицевой функцией на B_n.

Оракул: черный ящик нулевого порядка.

Приближенное решение:

найти $\bar{x} \in B_n : f(\bar{x}) - f^* \leqslant \varepsilon$.

Следствие 1.1.1. *Аналитическая сложность класса задач минимизации (1.4), (1.5), (1.7) для метода $\mathscr{G}$ не превосходит*

$$\mathscr{A}(G) = \left(\left\lfloor \frac{L}{2\varepsilon} \right\rfloor + 2 \right)^n \quad \textit{вызовов оракула}$$

Теорема 1.1.2. *Пусть $\varepsilon < (1/2)L$. Тогда аналитическая сложность класса $\mathscr{C}$ составляет по крайней мере $(\lfloor L/2\varepsilon \rfloor)^n$ вызовов оракула.*

Численные (алгоритмические) методы оптимизации

- Одномерная оптимизация унимодальной функции
  – метод равномерного поиска
  – метод деления пополам
  – метод золотого сечения
  – квадратичная аппроксимация
  – поиск стационарных точек

Многомерная локальная безусловная максимизация

– Метод покоординатного спуска/подъема (Гаусса)

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_k)e_j,\, j = (k \bmod n) + 1.$$

– Градиентный метод (метод наискорейшего спуска/подъема)

$$x_{k+1} = x_k + h_k\, \nabla f(x_k) \quad , j = (k \bmod n) + 1.$$

Правило Голдштейна-Армийо: *h* такой, чтобы

$$\alpha h \left|\left| \nabla f(x) \right|\right|^2 \le f\big(x + h\, \nabla f(x)\big) - f(x) \le \beta h \left|\left| \nabla f(x) \right|\right|^2$$

– Метод Ньютона основан на квадратичной аппроксимации критерия

$$f(x) = f(x_k) + (x - x_k)^{\mathrm{T}} \nabla f(x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^{\mathrm{T}} H(x_k)(x - x_k).$$

$$x_{k+1} = x_k + H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)$$

- Быстрая (квадратичная) сходимость в окрестности экстремума, НО Сходимость гарантирована только для выпуклых функций
- Нужно вычислять (и обращать) матрицу Гессе $H(x_k) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$.
- **Методы переменной метрики** итерационно строят матрицу *H*

Численные (алгоритмические) методы оптимизации

- Многомерная локальная **условная** оптимизация
  - Методы штрафных функций и барьеров
    - Метод внутренней точки (барьерный метод)
    - Метод внешней точки (штрафных функций)
    - Комбинированный метод

Численные методы

- Глобальная оптимизация
  – Использование информации о функции (расстояние между экстремумами)
  – метод Монте-Карло
    - Случайные броски
    - Случайный выбор стартовой точки

Численные методы

- Линейное программирование
  - Симплекс-метод (Данциг), экспоненциальная сложность
  - Метод эллипсоидов (Хачиян), полиномиальная сложность, непрактичный
  - Метод внутренних точек (Кармакар), полиномиальный, практическая эффективность сравнима с симплекс-методом

На практике можно считать, что задачи ЛП эффективно решаются

Методы решения других задач оптимизации и исследования операций

- Мы не касаемся в этой лекции
  – методов дискретной оптимизации (подробно обсуждаем позже)
  – методов вариационного исчисления и теории оптимального управления (отдельный курс)
  – Методов решения теоретико-игровых задач (отдельный курс)

Дополнительная литература

- Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
- Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. - М.: МЦНМО, 2010.