Лекция 7. Задачи сетевого планирования при нефиксированной интенсивности работ

Объем работы, интенсивность и скорость выполнения работы

Оптимизация комплексов работ по стоимости

Агрегирование сетевых графиков и оптимальное ресурсное планирование

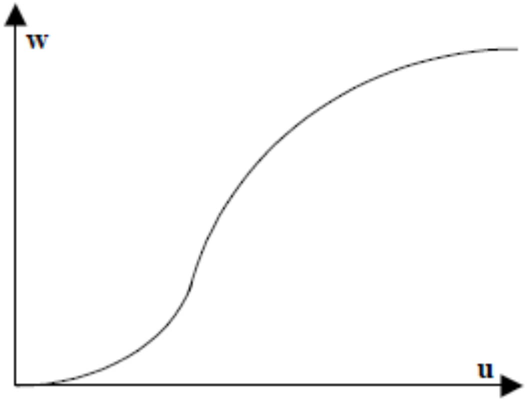
Анализ эмпирических правил распределения ресурсов при линейной интенсивности

Двойная сетевая модель

Предисловие

- Три уровня задач управления проектами
  - Задачи мультипроектного управления (проект как единое целое)
  - Задачи календарно-сетевого планирования, то есть планирования последовательности выполнения работ в рамках одного проекта (работа рассматривается как единое целое)
  - Задачи управления интенсивностью работ (можно менять параметры отдельной работы)

Модель операции (работы проекта)



- Главная характеристика работы – ее объем *W*
- Продолжительность работы.
  Общий случай – произвольная интенсивность $w = f(u)$ в зависимости от объема ресурса *u*. $W = \int_{t_н}^{t_к} f\big(u(t)\big)dt$, где *u*(*t*) – выделяемый ресурс
  - Фиксированная интенсивность: задается продолжительность *t*, тогда необходимый ресурс *u* = *W*/*t* ;
  - Постоянная интенсивность: задается зависимость $t = \tau(u)$ (обычно, убывающая), где *u* – объем выделенного ресурса, тогда интенсивность $w = f(u) = W/\tau(u)$ (не зависит от времени);
    - Линейная зависимость *f*(*u*).
    - Линейная с ограничениями $f(u) = \begin{cases} 0, & u < a \\ u & a \le u \le b, \\ b, & b < u \end{cases}$
    - Степенная *f*(*u*) = u^{α}.
- **Теорема:** при вогнутой *f*(*u*) и любом фиксированном объеме имеющегося ресурса оптимально его равномерное распределение во времени (*u(t) = const*)
- **Теорема:** при произвольной *f*(*u*) существует оптимальное распределение ресурса с не более чем двумя интервалами постоянства уровня.
- Можно ли так подобрать единицы измерения, что объем *W* любой задачи равен 1?

Ресурсы проекта

- Ресурсы
  - Воспроизводимые (люди)
  - Невоспроизводимые (деньги)
- На прошлой лекции обсуждались только ресурсы первого типа. На этой немного коснемся и роли невоспроизводимых ресурсов.
- В случае нескольких ресурсов один из них считается определяющим (леонтьевская, «комплектная» технология $f\left(u_1, \dots, u_q\right) = f(\min[\alpha_1 \cdot u_1, \dots, \alpha_q \cdot u_q])$). Ресурсы потребляются «наборами».

Оптимизация проекта по стоимости: минимизация расходов на сокращение продолжительности

- Критерий - стоимость выполнения проекта при ограничениях на время, или время выполнения при ограничении на бюджет.
- Задана зависимость стоимости каждой работы $S_i(t_i)$ в зависимости от продолжительности t_i.
- Рассмотрим линейные зависимости $S_i(t_i) = a_i - k_i \cdot t_i, t_i \in [d_i, D_i]$.
- Частный случай – цепочка работ
  - Как распределять финансирование на снижение продолжительности проекта по работам?

Оптимизация проекта по стоимости: минимизация расходов на сокращение продолжительности (cntd)

- Произвольный сетевой график
  1. Считаем продолжительности работ целочисленными
  2. Если имеется единственный критический путь, выбираем работу как для цепочки, сокращаем ее продолжительность на единицу.
  3. Если имеется несколько критических путей, то необходимо найти множество *S* работ, таких, что каждый критический путь содержит хотя бы одну работу множества, и сумма $\sum_{i \in S} k_i$ минимальна.
     - В представлении вершина-событие удаляем все дуги-работы, не относящиеся к критическим путям, назначаем дугам пропускные способности k_i и получаем **задачу о разрезе минимальной пропускной способности**.
     - Это задача двойственная к **задаче о максимальном потоке** (классическая задача о потоках в сети, алгоритм Форда-Фалкерсона, многочисленные улучшения). *Поищите в Интернете – это интересно.*
     - Сокращаем продолжительности найденных работ на единицу.
     - Возвращаемся на шаг 2.
- Какова трудоемкость алгоритма?
- Что получается в итоге?

Задача о максимальном потоке

- Постановка задачи

  Задан граф G и ограничения на потоки по дугам c_{ij}, $ij \in E(G)$.

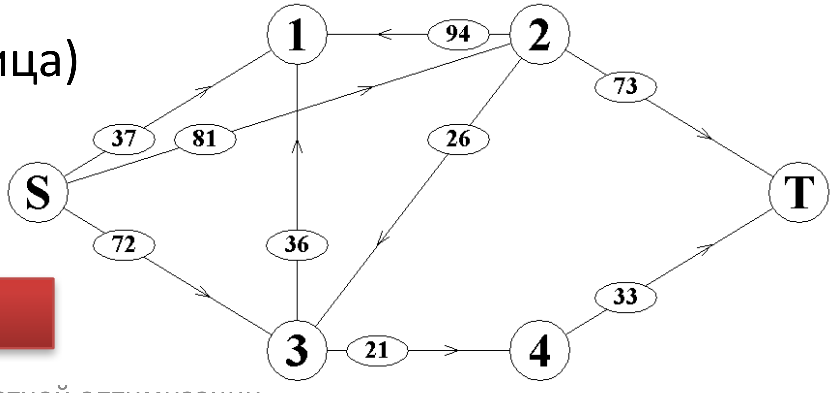
  Поток – это набор чисел $(f_{ij})_{ij \in E(G)}$: $f_{ij} = -f_{ji}$, $f_{ij} \leq c_{ij}$, $\Sigma_j f_{ij} = 0$, $i \neq S, T$

  Найти максимальный поток ($\Sigma_j f_{Sj} = \Sigma_j f_{jT} \to \max$).

- Алгоритм Форда-Фалкерсона
  1. Остаточный граф для потока f имеет $c_{ij}^f = c_{ij} - f_{ij}$. Текущий поток f := 0.
  2. Найти в остаточном графе путь P из S в T с $c_{ij}^f > 0$ для всех $ij \in P$. Если такого пути нет, максимальный поток найден, конец алгоритма.
  3. Для всех $ij \in P$ увеличим f_{ij} на $c_P := \min_{ij \in P} c_{ij}^f$, а f_{ji} уменьшим на c_P. Вернемся на предыдущий шаг.

- Алгоритм Эдмондса-Карпа (Диница)

  Путь P – кратчайший путь в остаточном графе, находится поиском в ширину. Сложность $|V||E|^2$



А какие расстояния в графе имеются в виду?

Агрегирование сетевых графиков

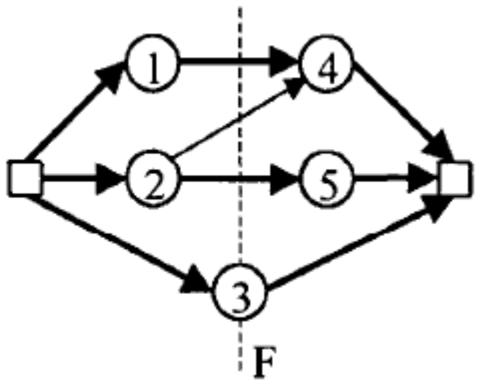
- Агрегирование - представление сложной модели (описываемой большим числом параметров) в упрощенном виде (описываемым небольшим числом параметров)
- Подход к решению задач большой размерности на основе построения агрегированных моделей адекватен иерархическому построению организационных систем
- ***Определение.*** Агрегированием комплекса операций (работ) называется его представление в виде комплекса с меньшим (как правило, значительно меньшим) числом операций.
- ***Определение.*** Ошибка агрегирования – $\max\limits_{N(t)\in \mathrm{M}} \left|1-\frac{T_a(N(t))}{T_m(N(t))}\right|$, где N(t) – график расходования ресурса, T_a – минимальное время реализации агрегированного графика, T_m - минимальное время реализации исходного графика.
- ***Определение.*** Агрегирование с нулевой ошибкой называется идеальным.

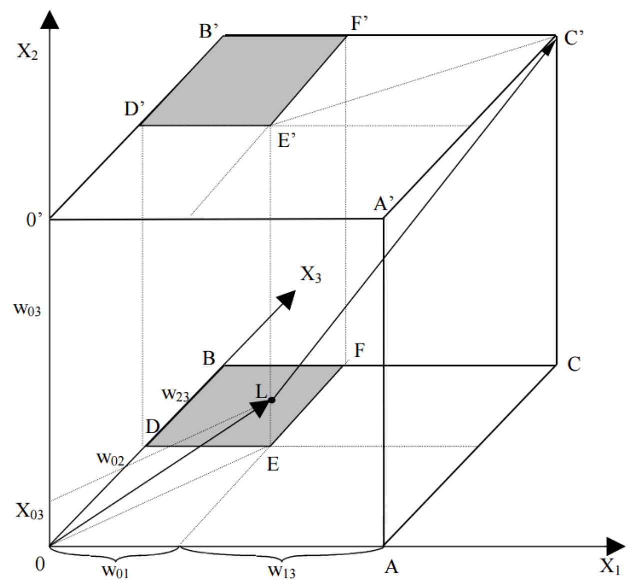
Агрегирование сетевых графиков (продолжение)

- **Лемма:** для произвольных вогнутых $f_i(u)$ комплекс **независимых** работ допускает оптимальное агрегирование, $f_i[u_i(t)] = w(t)W_i$, $i = \overline{1,n}$, а w(t) определяется из уравнения $\sum_{i=1}^{n} \xi_i\left[w(t)\,W_i\right] = N(t)$, $\xi_i(\cdot) := f_i^{-1}(\cdot)$. Момент завершения – из условия $\int_0^T w(t)\,dt = 1$.
- **Лемма:** Если $f_i(u_i) = \beta_i f(u_i)$, то для последовательных операций объемов W_i существует идеальное агрегирование с объемом $W_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i}{\beta_i}$ и скоростью f(u).
- **Следствие:** Последовательно-параллельные графики допускают агрегирование при (каких $f_i()$?)
- **Теорема:** При $f_i(u) = u_i^{\alpha}$, $\alpha < 1$, $i = \overline{1,n}$ **для произвольного сетевого графика (!)** существует идеальное агрегирование операцией с $f = u^{\alpha}$ *Вопрос только в том, как определить объем этой операции.*
- Все это для одного определяющего ресурса (например, люди)!
- *Кто доказал? Бурков в* [Burkov, 1972]

Определение эквивалентного объема агрегированной операции

- ***Определение.*** Размерностью сетевого графика называется максимальное число независимых операций m (максимальную ширину фронта).
- Множество состояний проекта размерности m можно изобразить в виде некоторой области m-мерного фазового пространства.
- Из параллелограмма вырезаются области нарушающие причинность операций
- Любому процессу реализации проекта соответствует траектория, соединяющая 0 с A и проходящая в области возможных состояний.
- Минимальному объему соответствует кратчайшая траектория с расстоянием





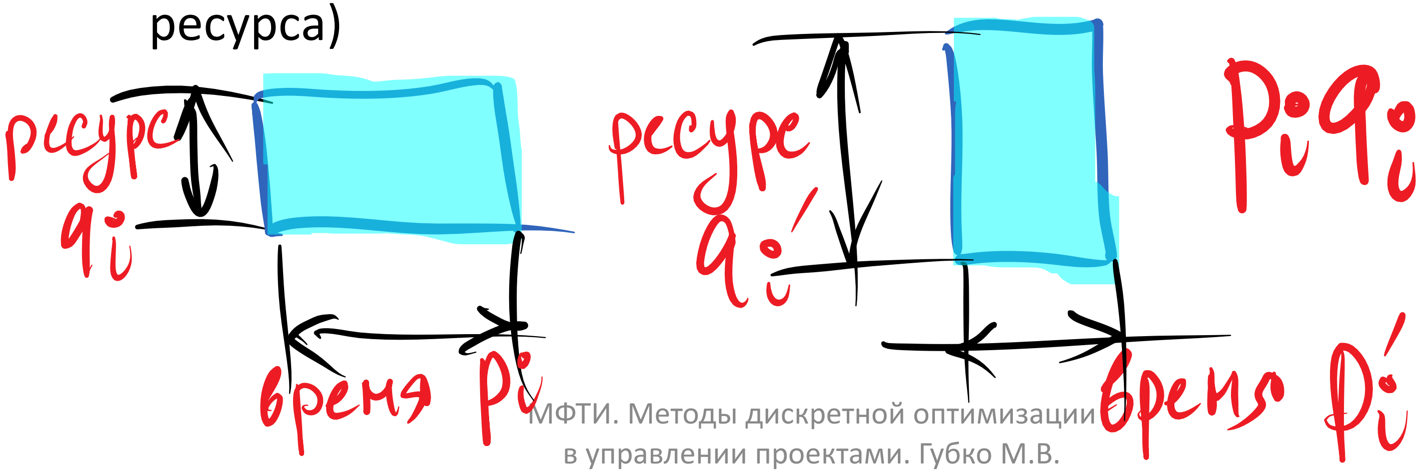
$$\rho\left(y^1, y^2\right) = \left(\sum_{j=1}^{m} \left|y_j^1 - y_j^2\right|^{1/\alpha}\right)^{\alpha}$$

Распределение ресурсов по работам для линейной зависимости интенсивности от ресурса

- Обратите внимание, что в предыдущей теореме α **<** 1. Почему это важно?
- Линейное правило без ограничений для одного ресурса – ресурс можно распределить без узких мест
- Линейные правила с ограничениями

$$f(u)=\begin{cases}0, & u<a\\ u & a\le u\le b,\\ b, & b<u\end{cases}$$

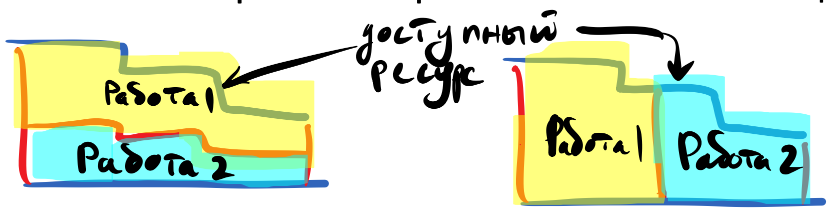
- Геометрическая интерпретация линейных правил (для одного ресурса)



$p_i q_i = p_i' q_i' = W_i$

Распределение ресурсов по работам для линейной зависимости интенсивности от ресурса

- Пусть
  - Работы разбиты на типы так, что работы одного типа выполняются одним видом ресурса (каменщики – кладут стены, маляры красят, …)
  - Допустима переменная нефиксированная интенсивность работы
- Тогда
  - Из двух однотипных работ во фронте работ выгодно максимально интенсивно выполнять одну, а вторую - по остаточному принципу. Первая работа завершается раньше и «освобождает» зависимые работы



  - Вопрос в том – на какую работу выделять ресурс (правила приоритетов).
  - Поэтому работает аналог алгоритма диспетчеризации и те же правила диспетчеризации

Правила приоритета для линейной зависимости интенсивности от ресурса

- $\tau_i = W_i / b_i$ - минимальная продолжительность *i*-й работы.
- Можно посчитать позднее время начала (критичность) (как?)
- Как теперь найти позднее время окончания?
- Правила маршрутизации:
  - LST – по критичности
  - SPT (по минимальной продолжительности) Какую продолжительность работ принять?
  - LCT – по минимальному позднему времени окончания (как его посчитать?)

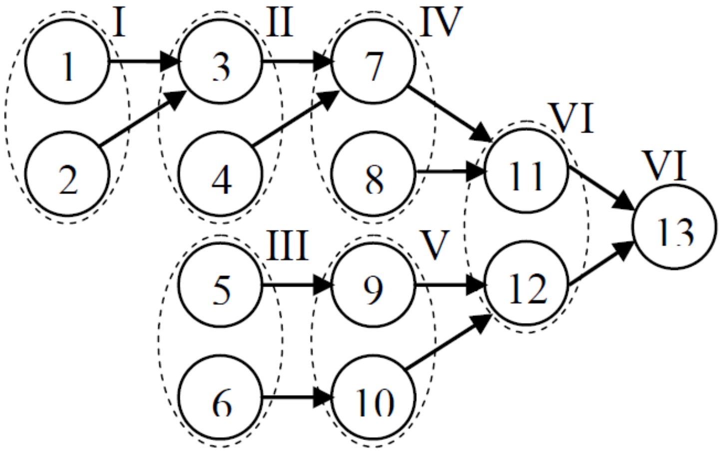
- А что делать, если несколько вакантных работ имеют одинаковое LST, SPT или LCT?

Алферов В.И., Баркалов С.А., Бурков В.Н., Курочка П.Н., Хорохордина Н.В., Шипилов В.Н. Прикладные задачи управления строительными проектами. / Воронеж. гос. арх. – строит. ун-т. 2008. – 766 с.

Вариация UPT, когда правило LST дает оптимальное решение

- Если сетевой график имеет вид дерева, все работы имеют t = 1 и требуют u = 1 ресурса (фиксированная производительность), LST дает оптимальное решение.

Почему?
Потому что критичность (d_i - p_i), то есть поздний срок начала, совпадает в этой задаче с уровнем вершины в дереве. Все работы i-го уровня могут быть завершены только после завершения всех работ (i+1)-го уровня.



Алферов В.И., Баркалов С.А., Бурков В.Н., Курочка П.Н., Хорохордина Н.В., Шипилов В.Н. Прикладные задачи управления строительными проектами. / Воронеж. гос. арх. – строит. ун-т. 2008. – 766 с.

Еще один частный случай, когда правило LST дает оптимальное решение?

- Линейная интенсивность $f(u)=\begin{cases} 0, & u<a \\ u & a\le u\le b, \\ b, & b<u \end{cases}$ причем a=0.
- **Определение.** Фронт работ – множество работ, которые могут выполняться параллельно (при наличии достаточных ресурсов)
- **Определение.** Пропускная способность фронта работ *F* определяется как $C(F) := \sum_{i\in F} b_i$, где b_i - максимальный объем ресурса на работу
- **Определение.** Фронт работ F_1 находится **правее** фронта F_2 ($F_1 > F_2$) если ни из одной работы F_1 нет пути ни в одну работу F_2.
- **Определение.** Сетевой график называется монотонным если $F_1 > F_2$ => $C(F_1) <= C(F_2)$.
- **Гипотеза.** Для монотонного сетевого графика LST дает оптимальное решение. **Попробуйте доказать!**
- Например, для фиксированной интенсивности неверно, см. пример в

Алферов В.И., Баркалов С.А., Бурков В.Н., Курочка П.Н., Хорохордина Н.В., Шипилов В.Н. Прикладные задачи управления строительными проектами. / Воронеж. гос. арх. – строит. ун-т. 2008. – 766 с.