

Модели принятия решений в социальных сетях

к.т.н. Бреер В.В. (ИПУ РАН)

вторник, 29 декабрь 2015 г.

Лекция 2

Управление пороговым поведением

План лекции 2

- Модель Грановеттера
- Теоретико-игровая модель конформистов и анти-конформистов
- Модель с единым относительным порогом
- Вероятностное описание модели с единым относительным порогом. Связь с моделью Грановеттера.
- Модель поведения в СС Twitter, Facebook, ЖЖ.
- Методы управления толпой

План лекции 2

- **Модель Грановеттера**
- Теоретико-игровая модель конформистов и анти-конформистов
- Модель с единым относительным порогом
- Вероятностное описание модели с единым относительным порогом. Связь с моделью Грановеттера.
- Модель поведения в СС Twitter, Facebook, ЖЖ.
- Методы управления толпой

Пороговая модель Грановеттера.

Состав модели

Выбор агента являющегося свидетелем **погрома**.

Агент может либо «**действовать**», либо «**бездействовать**».

Для агента каждое из решений имеет свои положительные и отрицательные стороны.

Решение агента с одной стороны зависит от действий (или бездействия) окружающих его агентов, т.е. от социального фактора – **давления группы**. С другой стороны – от его индивидуальных предпочтений, т.е. индивидуального фактора – **автономности агента**.

Индивидуальный фактор (**порог**) - $\theta \in [0,1]$

Социальный фактор – **доля действующих агентов** $r \in [0,1]$

[GRANOVETTER M. 1978]

Пороговая модель Грановеттера.

Функционирование модели

Доля действующих агентов в момент t : $r(t)$

Правило принятия решения агентом:

Если $r(t) < \theta$, то агент «бездействует»

Если $r(t) \geq \theta$, то агент «действует»

Функция распределения порогов $F_\theta(\cdot): [0; 1] \rightarrow [0; 1]$

Доля агентов с пороговыми значениями, не превышающими $r(t)$, равна $F_\theta(r(t))$.

Значит, в момент времени $t + 1$ будут действовать:

$$r(t+1) = F_\theta(r(t)).$$

Положение равновесия характеризуется $r(t+1) = r(t)$, т.е.

$$r = F_\theta(r).$$

[GRANOVETTER M. 1978]

План лекции 2

- Модель Грановеттера
- Теоретико-игровая модель конформистов и анти-конформистов
- Модель с единым относительным порогом
- Вероятностное описание модели с единым относительным порогом. Связь с моделью Грановеттера.
- Модель поведения в СС Twitter, Facebook, ЖЖ.
- Методы управления толпой

Теоретико-игровая модель бинарных решений.

Состав модели.

Множество *агентов* $N = \{1, 2, \dots, n\}$, каждый из которых имеет две альтернативные возможности – *действовать или бездействовать*.

Выбор агента $i : x_i \in \{0; 1\}$, где $x_i = 1$ означает, что агент действует, а $x_i = 0$ – бездействует.

Состояние системы, определяемое как *вектор действий* всех агентов: $x \in \{0, 1\}^n$.

Вектор действий агентов, внешних по отношению к i -му агенту:
 $x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^{n-1}$ - *обстановка* для i -го агента.

[Бреер В.В. 2012]

Теоретико-игровая модель бинарных решений.

Целевая функция.

Поведение агента i определяется его стремлением к максимизации *целевой функции* следующего вида:

$$(1) \quad u_i(x) = u_i(x_i, x_{-i}) = a_i(x_{-i})x_i + b_i(x_{-i})(1 - x_i), \text{ где}$$

$a_i(\cdot)$ – *функция социального давления*, заставляющая агента **действовать**.

$b_i(\cdot)$ – *функция социального давления*, заставляющая агента **бездействовать**.

Социальное давление – словосочетание, отражающее зависимость от обстановки.

[Бреер В.В. 2012]

Теоретико-игровая модель бинарных решений. Конформность и пороговость.

Частичная упорядоченность $(\{0, 1\}^{n-1}, \underline{f})$ обстановок для любого агента i :

$$x_{-i}^{(1)} \underline{f} x_{-i}^{(2)} \text{ когда } \forall j \neq i : x_j^{(1)} \geq x_j^{(2)}.$$

Конформисты $N_c = \{n_1, n_2, \dots, n_c\} : a_i(\cdot) \uparrow, b_i(\cdot) \downarrow$ на $(\{0, 1\}^{n-1}, \underline{f})$, $i \in N_c$

Анти-конформисты $N_a = \{n_1, n_2, \dots, n_a\} : a_i(\cdot) \downarrow, b_i(\cdot) \uparrow$ на $(\{0, 1\}^{n-1}, \underline{f})$, $i \in N_a$

Если $a_i(\cdot)$ или $b_i(\cdot)$ равна константе $0 \leq \Theta_i \leq 1$, то этот случай является *пороговым поведением* (модель – *пороговой*), а сама величина Θ_i – порогом агента i .

Теоретико-игровая пороговая модель. Анонимное конформное поведение.

Множество конформистов N_c . Целевая функция агента i :

$$(1) \quad w_i^c(x_i, x_{-i}) = \left(\sum_{j \neq i} x_j - \theta_i \right) x_i, i \in N_c$$

Равновесие Нэша x^* :

$$(2) \quad \forall x_i^* \in N_c : w_i^c(x_i^*, x_{-i}^*) \geq w_i^c(x_i, x_{-i}^*)$$

Эмпирическая функция распределения:

$$(3) \quad F^c(y) = \#\{i \in N_c : \theta_i < y\}$$

Утверждение 1. Следующая ситуация

$$(4) \quad x^* = x^*(p) : x_i^* = \chi\{\theta_i < p\}, \forall i \in N_c$$

является равновесием Нэша для игры в нормальной форме $(\{0,1\}^n, \{w_i^c\}_{i \in N_c}, N_c)$ тогда и только тогда, когда p есть решение следующего уравнения:

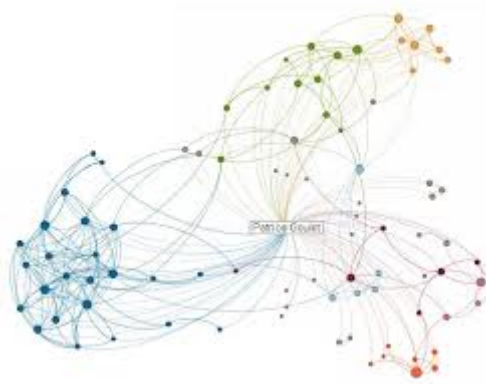
$$(5) \quad F^c(p) = p$$

План лекции 2

- Модель Грановеттера
- Теоретико-игровая модель конформистов и анти-конформистов
- **Модель с единым относительным порогом**
- Вероятностное описание модели с единым относительным порогом. Связь с моделью Грановеттера.
- Модель поведения в СС Twitter, Facebook, ЖЖ.
- Методы управления толпой

Модель с единым относительным порогом. Микро-описание.

Социальная сеть задана в виде двунаправленного графа.



На решение агента i влияет:

- Множество $D(i)$ ($d_i = |D(i)|$) других агентов – его соседей.
- Значение $\theta_i \in [0, 1]$ порога доли соседей

В результате достижения консенсуса у всех агентов единый относительный порог θ .

Целевая функция агента i :

$$(6) \quad w_i^\theta(x_i, x_{-i}) = \left(\sum_{j \in D(i)} x_j - \theta d_i - \varepsilon \right) x_i, 0 < \varepsilon < \frac{1}{n}.$$

Равновесие Нэша x^* :

$$(7) \quad \forall x_i^* \in N_c : w_i^\theta(x_i^*, x_{-i}^*) \geq w_i^\theta(x_i, x_{-i}^*).$$

Аналитически р. Нэша выразить невозможно, поэтому используется имитационное моделирование.

План лекции 2

- Модель Грановеттера
- Теоретико-игровая модель конформистов и анти-конформистов
- Модель с единым относительным порогом
- **Вероятностное описание модели с единым относительным порогом. Связь с моделью Грановеттера.**
- Модель поведения в СС Twitter, Facebook, ЖЖ.
- Методы управления толпой

Модель с единым относительным порогом.

Вероятностное макро-описание.

Число соседей агента – это целое случайное число $s : 1 \leq s \leq n - 1$.

Пусть $M(d) : \{1, 2, \dots, n - 1\} \rightarrow [0, 1]$ – вероятность того, что число соседей будет равно d .

Пусть на произвольном шаге действует q агентов. Рассчитаем математическое ожидание числа агентов, действующих на следующем шаге, если их поведение описывается целевой функцией (6).

Сначала вычислим вероятности G_n событий, заключающихся в том, что *ровно k соседей агента действуют*. Всего существует C_{n-1}^d вариантов того, что агент имеет d соседей. Число таких вариантов, что именно среди d соседей данного агента будет *ровно $k \leq d$ действующих* (из q действующих во всей сети агентов) равно C_q^k , а число вариантов того, что среди этих соседей будет $d - k$ из $n - 1 - q$ бездействующих равно C_{n-1-q}^{d-k} . Таким образом, вероятность того, что *ровно k из d соседей агента действуют*, можно записать в виде *гипергеометрического распределения*

$$(8) \quad G_n(q, d, k) = \frac{C_q^k C_{n-1-q}^{d-k}}{C_{n-1}^d}.$$

Модель с единым относительным порогом.

Вероятностное макро-описание.

Вычислим вероятность P_n того, что агент будет действовать под влиянием q действующих агентов во всей сети. Для того чтобы агент действовал, согласно выражению (6), необходимо, чтобы более чем θd его соседей действовали. Искомая вероятность $P_n = P_n(q, d, \theta)$ представляет собой сумму вероятностей (8) по всем $k: [\theta d] < k \leq d$ ($[\cdot]$ обозначает целую часть числа):

$$(9) \quad P_n(q, d, \theta) = \sum_{k=[\theta d]+1}^d G_n(q, d, k) = 1 - \sum_{k=0}^{[\theta d]} \frac{C_q^k C_{n-1-q}^{d-k}}{C_{n-1}^d}.$$

Вероятность (9) численно равна доле действующих на следующем шаге агентов с числом соседей d . Значит, математическое ожидание доли действующих на следующем шаге агентов

$$(10) \quad F_n(q, \theta) = \sum_{d=1}^{n-1} P_n(q, d, \theta) M(d).$$

Итак, динамику числа действующих агентов социальной сети можно записать в виде рекуррентной схемы:

$$(11) \quad q_{k+1} = [nF_n(q_k, \theta)].$$

План лекции 2

- Модель Грановеттера
- Теоретико-игровая модель конформистов и анти-конформистов
- Модель с единым относительным порогом
- Вероятностное описание модели с единым относительным порогом. Связь с моделью Грановеттера.
- **Модель поведения в СС Twitter, Facebook, ЖЖ.**
- Методы управления толпой

Модель с единым относительным порогом.
Примеры из СС.

Табл. 1. Макро-показатели СС

СС	MaxFrnds	Users	Nonzero users	Links	AvgFriends
Facebook	4 199	3 250 580	3 084 017	77 639 757	50.35
Live Journal	2 499	5 758 706	3 586 959	124 729 288	34.77
Twitter	759 313	~41 700 000	35 427 738	1 418 363 662	40.04

Модель с единым относительным порогом.

Примеры из СС. Задача 1

Задача 1 заключается в идентификации функций распределения $M(\cdot)$ в указанных трех СС. В рамках этой задачи строятся эмпирические распределения $M_F(\cdot)$, $M_L(\cdot)$ и $M_T(\cdot)$, и ищутся аппроксимирующие их в аналитическом виде функции $\bar{M}_F(\cdot)$, $\bar{M}_L(\cdot)$ и $\bar{M}_T(\cdot)$.

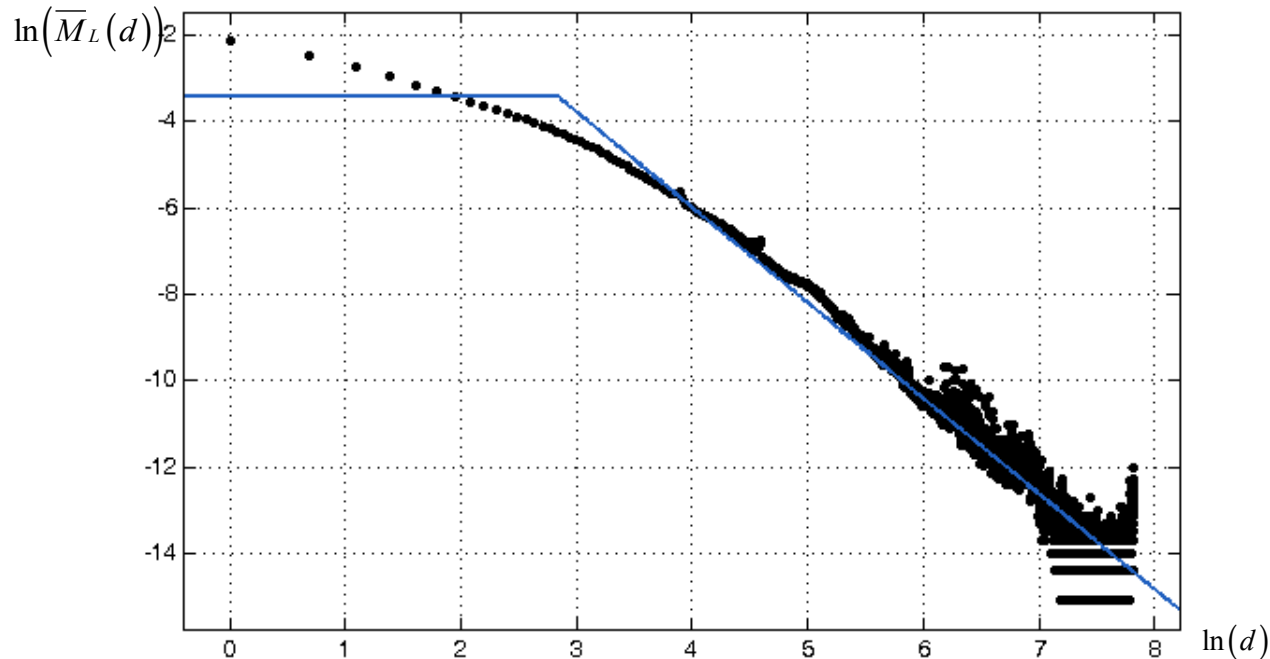


Рис. 1. «Срезанная» линейная аппроксимация $\bar{M}_L(\cdot)$

Модель с единым относительным порогом.

Примеры из СС. Задача 2

Задача 2 заключается в построении и исследовании имитационных моделей порогового поведения, которое задается целевой функцией (6)

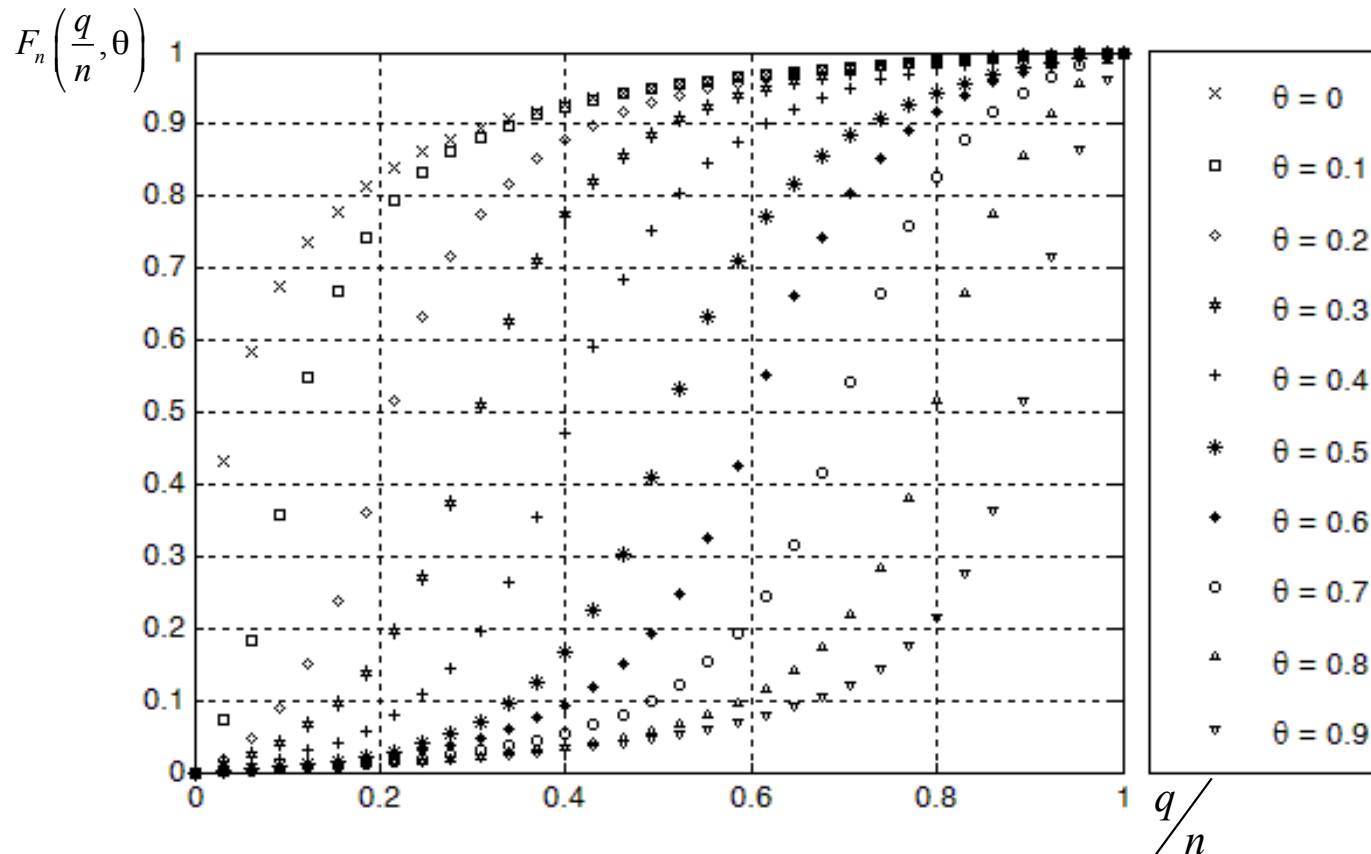


Рис. 1. СС Facebook. Результаты имитационного моделирования

Модель с единым относительным порогом.

Примеры из СС. Задача 3

Задача 3 состоит в аппроксимации сигмовидными функциями зависимостей, полученных при имитационном моделировании в рамках решения задачи 2.

$$f(p, \theta, \lambda) = \frac{\operatorname{arctg} \lambda(p - \theta) + \operatorname{arctg}(\lambda \theta)}{\operatorname{arctg} \lambda(1 - \theta) + \operatorname{arctg}(\lambda \theta)}$$

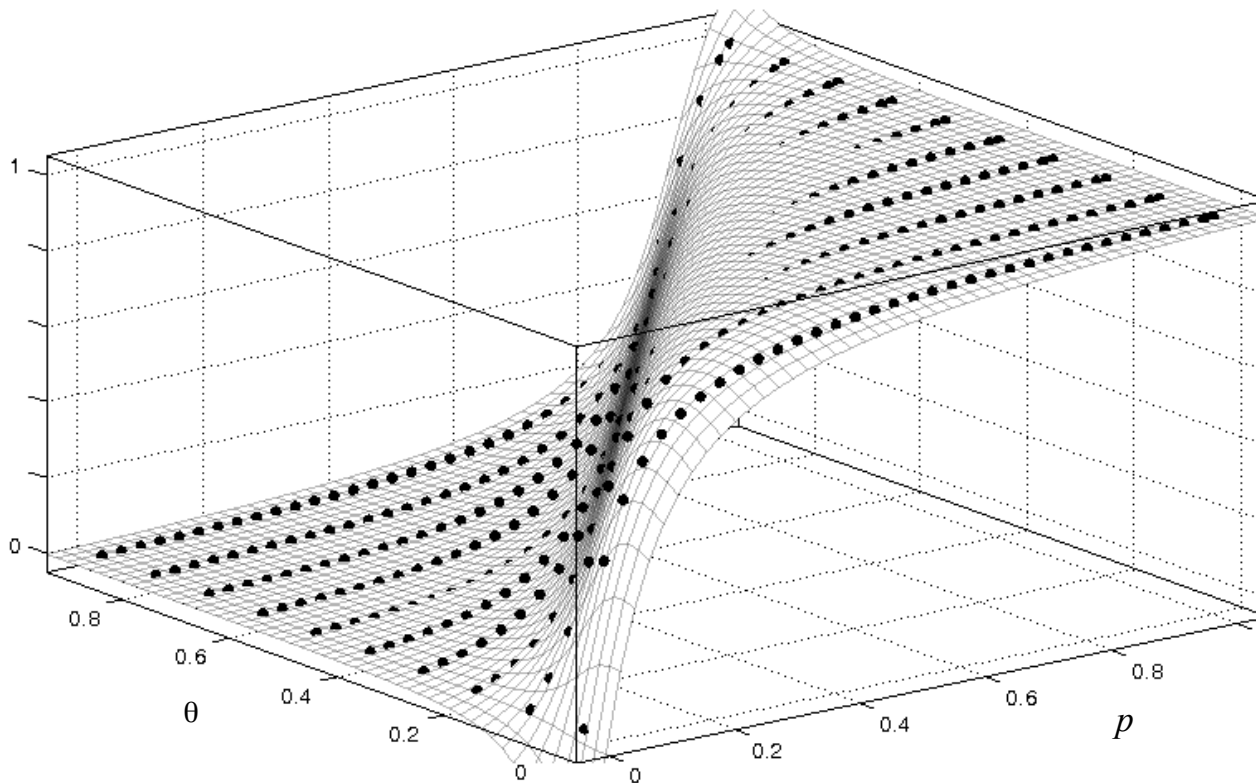


Рис. 1. Приближение экспериментальных данных $F_n(p, \theta)$ (точки)

аналитическим семейством $f(p, \theta, \lambda_F)$ (сетка) для социальной сети Facebook

План лекции 2

- Модель Грановеттера
- Теоретико-игровая модель конформистов и анти-конформистов
- Модель с единым относительным порогом
- Вероятностное описание модели с единым относительным порогом. Связь с моделью Грановеттера.
- Модель поведения в СС Twitter, Facebook, ЖЖ.
- Методы управления толпой

Управление в СС.

Управление возбуждением толпы. Модель I

Предположим, что пороги агентов являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с теоретической функцией распределения $F(\cdot)$. Пусть в результате управленческого воздействия порог каждого агента независимо от других агентов может стать равным нулю с одинаковой для всех агентов вероятностью $\alpha \in [0; 1]$. Данную модель будем называть **моделью I**. Будем считать, что в соответствии с целевой функцией агенты, имеющие нулевые пороги, выбирают единичные действия независимо от действий других агентов, то параметр α может интерпретироваться как доля первоначально *возбуждаемых* агентов.

Утверждение 2. В результате «возбуждения» пороги агентов будут описываться функцией распределения

$$(12) \quad F_{\alpha}(x) = \alpha + (1 - \alpha) F(x).$$

Можно найти α , которое приводит к реализации заданного равновесия y :

$$(13) \quad \alpha(y) = \frac{y - F(y)}{1 - F(y)}.$$

Управление возбуждением толпы. Модель II

Рассмотрим другой способ управления положением равновесия (**модель II**) - когда к множеству N (напомним, что $\#N = n$) добавляются k внешних *провокаторов* (множество K). Они имеют пороги $\theta_i = 0, \forall i \in K$ и всегда действуют. Тогда вероятность того, что произвольно выбранный агент из нового множества агентов $N \cup K$ имеет порог, не превышающий x , складывается из вероятностей двух независимых событий:

1. Вероятности того, что выбранный агент является внешним провокатором, а именно $\frac{k}{k+n}$.
2. Вероятности того, что выбранный агент не является внешним провокатором и его порог не превышает x : $\left(1 - \frac{k}{k+n}\right)F(x)$.

Таким образом, мы получили новое множество агентов, пороги которых являются независимыми и одинаково распределенными величинами со следующей функцией распределения

$$(14) \quad F_K(x) = \frac{k}{k+n} + \left(1 - \frac{k}{k+n}\right)F(x).$$

В модели I вероятность α , кроме как вероятность возбуждения произвольного агента, может быть проинтерпретирована как вероятность встретить такого агента с нулевым порогом. Поэтому разумно ввести то же обозначение и для вероятности встретить

внешнего провокатора во второй модели: $\alpha = \frac{k}{k+n}$. Как видно из сравнения функций

распределения (12) и (14) в случае, когда речь идет только о «возбуждении» части агентов, модели I и II являются эквивалентными.

Управление в СС. Управление иммунизацией толпы. Модель I

Модель I. Пусть в результате управленческого воздействия порог каждого агента независимо от других агентов может стать равным единице с одинаковой для всех агентов вероятностью $\beta \in [0; 1]$. Так как агенты, имеющие единичные пороги, действовать не будут, то параметр β может интерпретироваться как доля первоначально «иммунизируемых» агентов. Можно показать, что в результате «иммунизации» пороги агентов будут описываться функцией распределения

$$(15) \quad F_{\beta}(x) = \begin{cases} (1-\beta) F(x), & x \in [0; 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Управление иммунизацией толпы. Модель II

Рассмотрим модель II - способ управления положением равновесия, когда к множеству N добавляются l иммунизаторов (множество L). Иммунизаторы не действуют никогда и имеют пороги $\theta_i = 1, \forall i \in L$. Тогда вероятность того, что произвольно выбранный агент имеет порог, не превышающий $x < 1$, равна вероятности того, что выбранный агент не является иммунизатором и его порог не превышает $x < 1$, т.е. $\left(1 - \frac{l}{l+n}\right)F(x)$. Так как вероятность того, что порог произвольно выбранного агента не превышает единицы, равна единице, то мы получили новое множество $N \cup L$ агентов, пороги которых являются независимыми и одинаково распределенными величинами со следующей функцией распределения

$$(16) \quad F_L(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{l}{l+n}\right)F(x), & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

В модели I вероятность β , кроме как вероятность иммунизации произвольного агента может быть проинтерпретирована как вероятность встретить такого агента с единичным порогом. Поэтому разумно ввести то же обозначение и для вероятности встретить внешнего иммунизатора во второй модели $\beta = \frac{l}{l+n}$.

Управление в СС. Противоборство двух центров. Модель I

Рассмотрим случай информационного противоборства, когда имеются два центра и доля $\alpha \in [0, 1]$ агентов «возбуждается» первым центром, а доля $\beta \in [0, 1]$ агентов «иммунизируется» (или каждый агент независимо с соответствующей вероятностью может быть возбужден или/и иммунизирован) вторым центром. Для определенности предположим, что если некоторый агент возбуждается и иммунизируется одновременно, то его порог не меняется (модель I).

Вероятность того, что агент является провокатором и не является иммунизатором $\alpha(1 - \beta)$.

Вероятность того, что агент является провокатором и при этом на него не воздействовали два центра одновременно $\alpha - \alpha\beta$, тоже для иммунизатора - $\beta - \alpha\beta$.

Тогда получим следующую функцию распределения порогов агентов:

$$(17) \quad F_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} \alpha(1 - \beta) + (1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta) F(x), & x \in [0; 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Управление в СС. Противоборство двух центров. Модель II

Добавим к множеству N конформистов k провокаторов и l иммунизаторов (множества K и L соответственно). Тогда вероятность того, что произвольно выбранный агент имеет порог, не превышающий $x < 1$, складывается из вероятности двух независимых событий:

вероятности того, что выбранный агент является провокатором, а именно $\frac{k}{k+l+n}$;

вероятности того, что выбранный агент является конформистом и его порог не превышает $x < 1$: $\frac{n}{k+l+n} F(x)$.

Введем следующие обозначения для долей провокаторов и иммунизаторов относительно общего количества всех агентов соответственно:

$$(18) \quad \alpha' = \frac{k}{k+l+n}; \beta' = \frac{l}{k+l+n}$$

Функция распределения, соответствующей модели II:

$$(19) \quad F_{KL}(\alpha', \beta', x) = \begin{cases} \alpha' + (1 - \alpha' - \beta') F(x), & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

- БРЕЕР В.В. *Теоретико-игровые модели конформного поведения* // Автоматика и телемеханика. 2012, № 10 С 111-126
- БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А. *Модели управления толпой* // Проблемы управления. – 2012. – № 2. – С. 38 – 44.
- БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А., РОГАТКИН А.Д. Микро и макро модели управления толпой, Проблемы управления №5 2014 с 28-33.
- GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior*, AJS Volume 83 Number 6, pp 1420-1443, 1978.