МЕТОД СЕТЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Бурков В.Н., Буркова И.В.

ИПУ РАН

СибГИУ

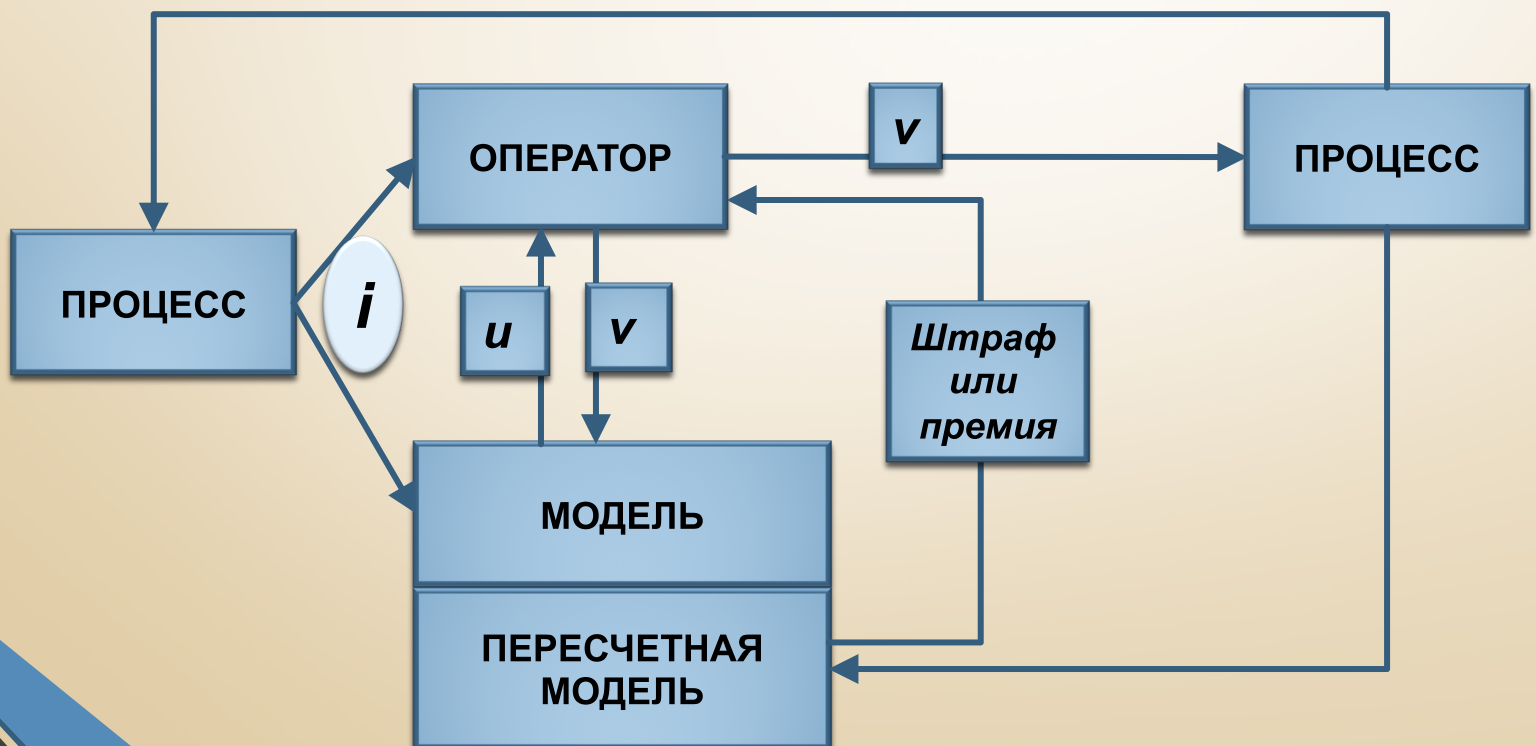
70-е годы

2020-е годы

НАЧАЛО. 70-е годы

Проект «Двухканальные механизмы в черной металлургии» (советчик оператора)

Проект разработан совместно лабораторией активных систем и командой В.П. Авдеева



НАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ
МЕТОД СЕТЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (МСП)

открытие нового метода решения задач дискретной оптимизации	- УДАЧА!
Поиск задач для применение метода сетевого програм-мирования (МСП)	- РАБОТА

Применение МСП:

- формирования программ развития предприятий и регионов;
- программ обеспечения безопасности дорожного движения;
  - программ обеспечения безопасности при уничтожении химического оружия.

НАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ
МЕТОД СЕТЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ – СибГИУ

Опытное применение программного комплекса, реализующего МСП при формировании плана сервисных улучшений для планирования образовательной, научной и другой деятельности профессорско-преподавательского состава университета позволило улучшить значение индекса эффективности планов на 5–40 % при одинаковых трудозатратах на их реализацию.

МСП был апробирован и практически использован в учебном процессе СибГИУ по направлениям подготовки 09.03.02 и 09.04.02. Программные комплексы решения задач

- управления компетенциями персонала,
- формирования портфеля проектов,
- совершенствования ИТ-процессов жизненного цикла ИТ-сервиса

включены в состав базового ПО учебного назначения Центра цифровых компетенций СибГИУ. Используются магистрантами для исследования

- зависимости оптимальных решений задачи управления компетенциями ИТ-персонала от уровня начальных компетенций и затрат на обучение;
- исследования зависимости состава портфеля проектов совершенствования ИТ-процессов жизненного цикла ИТ-сервиса от размеров инвестиционного и операционного бюджетов;
  - исследования зависимости состава портфеля проектов совершенствования ИТ-процессов жизненного цикла ИТ-сервиса от принятой ИТ-провайдером стратегии.

СЕТЕВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ (А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд)

функция четырех переменных

$f(x) = (x_1x_2 + x_1^2)x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$

Ее сетевое представление:

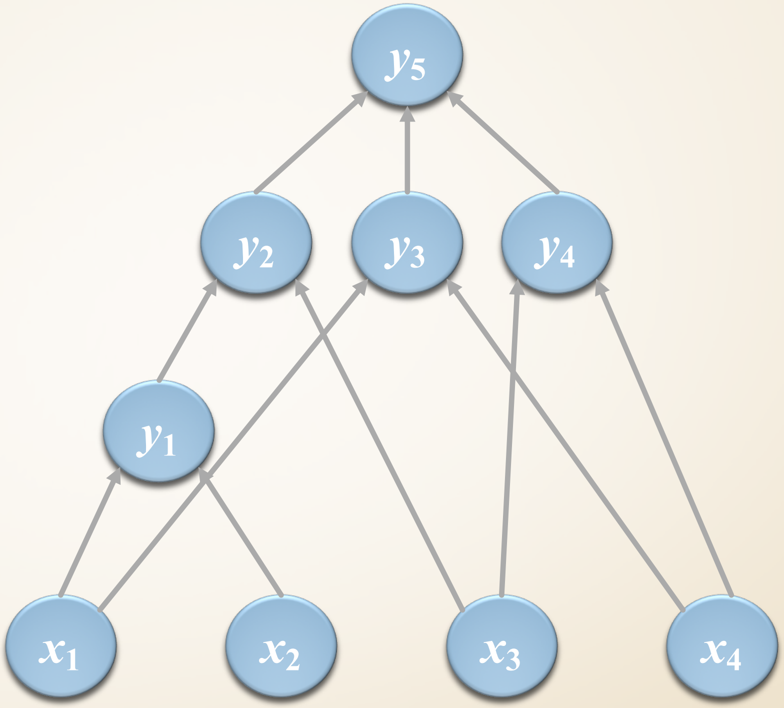
$y_1 = x_1x_2 + x_1^2$

$y_2 = y_1x_3$

$y_3 = x_1x_4$

$y_4 = x_3x_4$

$y_5 = y_2 + y_3 + y_4$



СЕТЕВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ (А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд)

функция четырех переменных

$f(x) = (x_1x_2 + x_1^2)x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$

Ее сетевое представление:

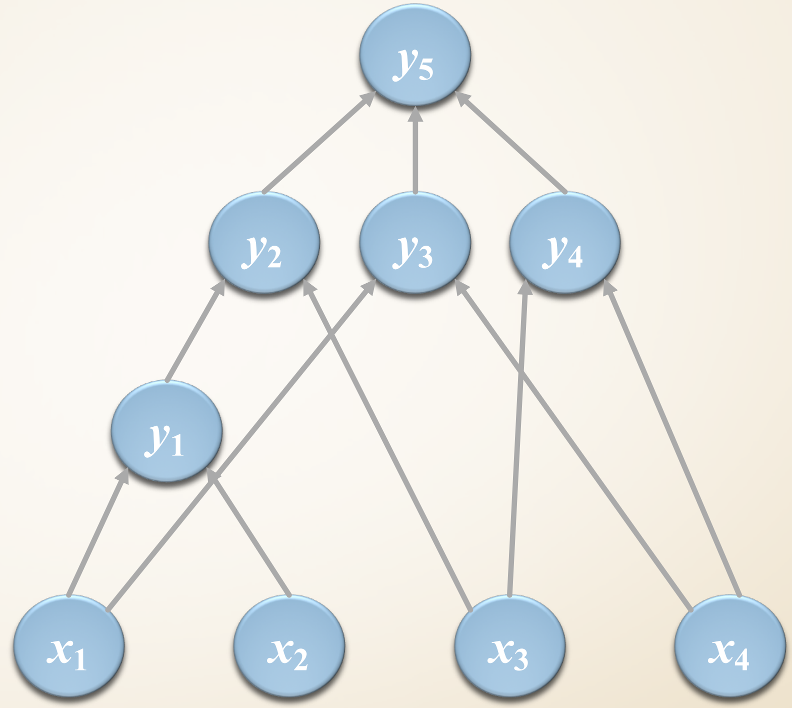
$y_1 = x_1x_2 + x_1^2$

$y_2 = y_1x_3$

$y_3 = x_1x_4$

$y_4 = x_3x_4$

$y_5 = y_2 + y_3 + y_4$



Определение. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ структурно-подобные (с-подобные), если существуют сетевые представления этих функций такие, что соответствующие сетевые структуры совпадают.

Пример. Легко заметить, *что одно из сетевых представлений функции*

$$\varphi(x) = (x_1 + x_2)x_3 + (x_1 + x_4) + x_3x_4$$

имеет такой же вид.

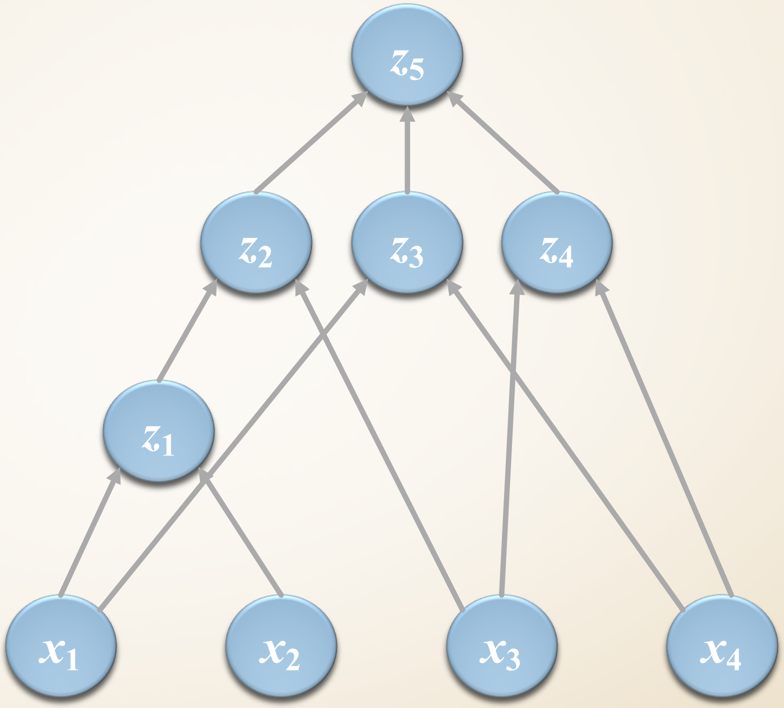
СЕТЕВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ (А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд)

функция четырех переменных

$f(x) = (x_1x_2 + x_1^2)x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$

Ее сетевое представление:

$y_1 = x_1x_2 + x_1^2$	$z_1 = x_1 + x_2$
$y_2 = y_1x_3$	$z_2 = z_1x_3$
$y_3 = x_1x_4$	$z_3 = x_1 + x_4$
$y_4 = x_3x_4$	$z_4 = x_3x_4$
$y_5 = y_2 + y_3 + y_4$	$z_5 = z_2 + z_3 + z_4$



Определение. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ структурно-подобные (с-подобные), если существуют сетевые представления этих функций такие, что соответствующие сетевые структуры совпадают.

Пример. Легко заметить, *что одно из сетевых представлений функции*

$$\varphi(x) = (x_1 + x_2)x_3 + (x_1 + x_4) + x_3x_4$$

имеет такой же вид.

МЕТОД СЕТЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

$$\begin{cases} f(x) \to \max \\ \phi(x) \le b \end{cases}$$

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ – с-подобные. $\Rightarrow$ есть их общее сетевое представление. f и φ - монотонные (возрастающие) функции обобщенных переменных y.

В сетевом представлении выделим вершины нулевого уровня, которым соответствуют переменные x_i.

Вершинам первого уровня соответствуют задачи оптимизации следующего вида :

$$y_i = f_i(x) \to \max$$
$$z_i = \varphi_i(x) \le p,$$

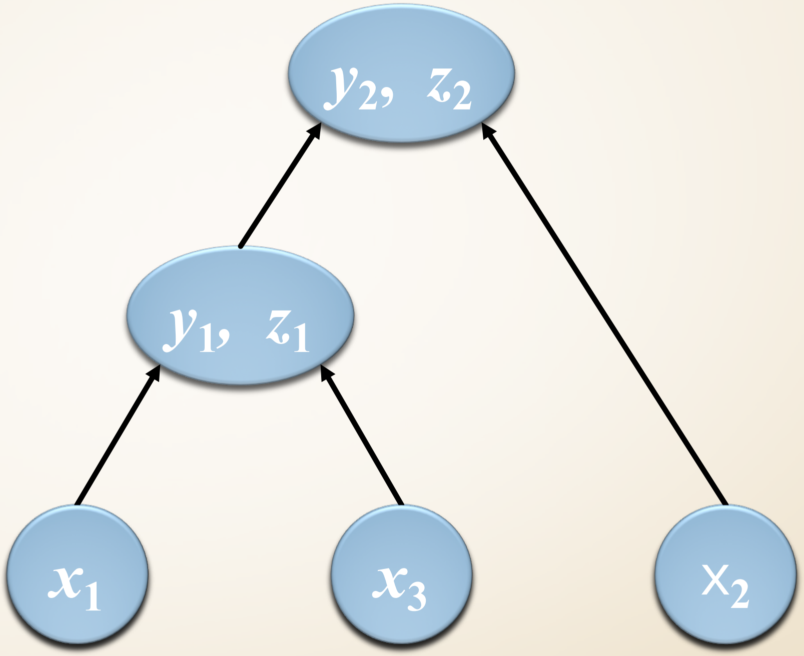
где p – параметр, ($p \le \mathrm{b}$). Набор переменных для $f_i(x)$ и $\varphi_i(x)$ совпадает и определяется структурой сетевого представления.

Решив задачи первого уровня, переходим к решению задач второго уровня, и т.д. Последней решается задача, соответствующая выходу сети. Обозначим для нее $y(b)$ – значение целевой функции в оптимальном решении задачи.

Теорема. Величина $y(b)$ – верхняя оценка исходной задачи.

СЛУЧАЙ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

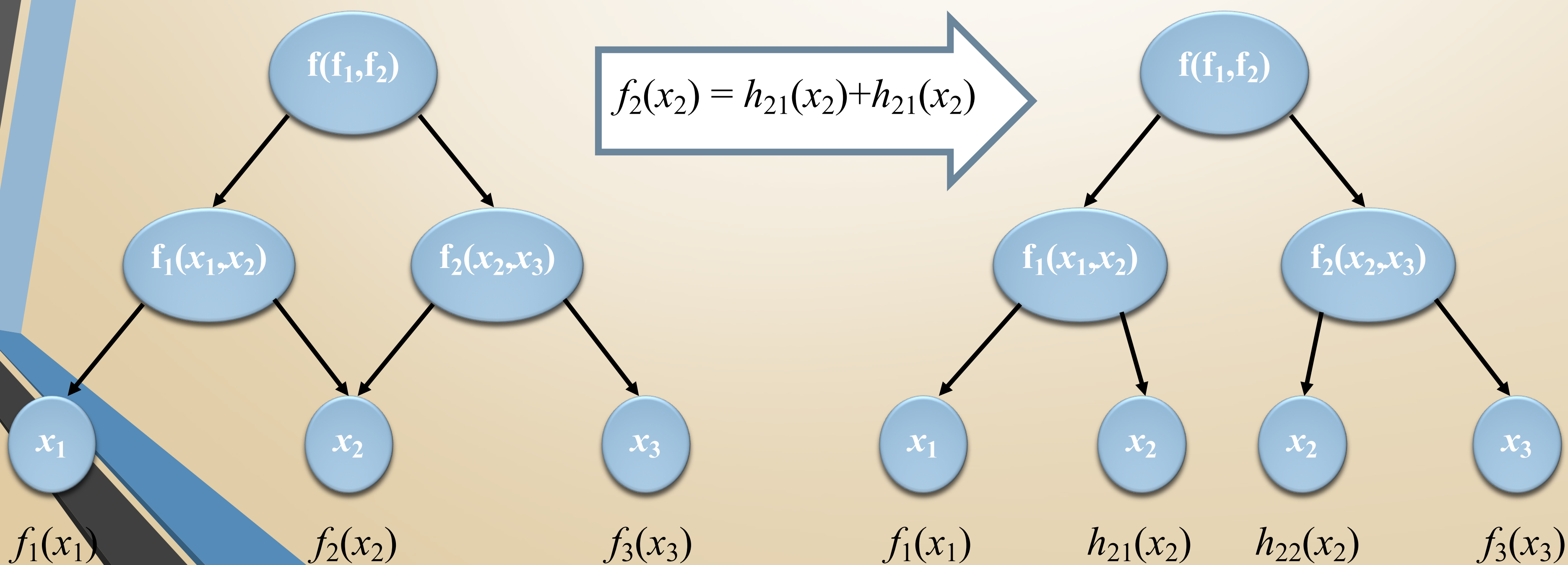
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to max \\ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \le R \end{cases}$$



- ✓ Аддитивная функция с-подобна любой функции того же числа переменных.
- ✓ Сетевое представление аддитивной функции – дерево.
- ✓ Решение, полученное на такой сетевой структуре всегда допустимо и, следовательно, оптимально.

НЕ ДЕРЕВО. ОДЗ

Обобщенная двойственная задача (ОДЗ). Определить функции h (для всех вершин сетевого представления функции $\varphi(x)$ с числом исходящих вершин более 1 так, чтобы верхняя оценка решения исходной задачи была минимальной.



ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ ПАКЕТА ПРОЕКТОВ
(Задача о ранце)

Постановка задачи

Имеются n проектов. Для каждого проекта i $(i = \overline{1,n})$

a_i – затраты на проект,
c_i – эффект от проекта,
R – ограничение на объем финансирования.
x_i = 1, если i-ый проект вошел в портфель, x_i = 0 в противном случае.

$$f(x) = \sum_j c_j x_j \to \max$$

$$\varphi(x) = \sum_j a_j x_j \le R$$

$$x_j \in \{0;1\}, \quad j = \overline{1,n}$$

Структура сетевого представления – дерево $\Rightarrow$ метод сетевого программирования дает ***оптимальное решение***.

В работе рассмотрены обобщения задачи, сохраняющие структуру сетевого представления в виде дерева.

МОДИФИКАЦИИ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ

Постановка задачи о ранце

$$f(x)=\sum_j c_j x_j \to \max \qquad \varphi(x)=\sum_j a_j x_j \le R \qquad x_j \in \{0;1\}, \quad j=\overline{1,n}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Выбор одного проекта из подмножества

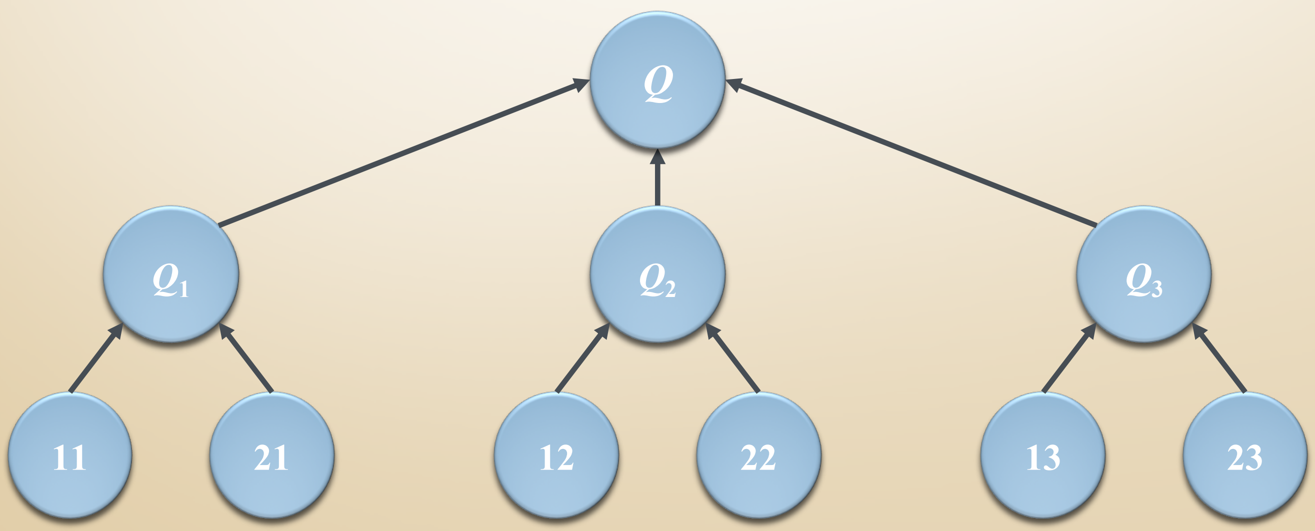
$$\sum_{i,j} a_{ij} x_{ij} \le R$$

$$\sum_{i\in Q_j} x_{ij} = 1, \quad j=\overline{1,m}$$

Ограничение на финансирование подмножества

$$\sum_{i\in Q_j} c_{ij} x_{ij} \to \max$$

$$\sum_{i\in Qj} a_{ij} x_{ij} \le B_j \qquad j=\overline{1,m}$$



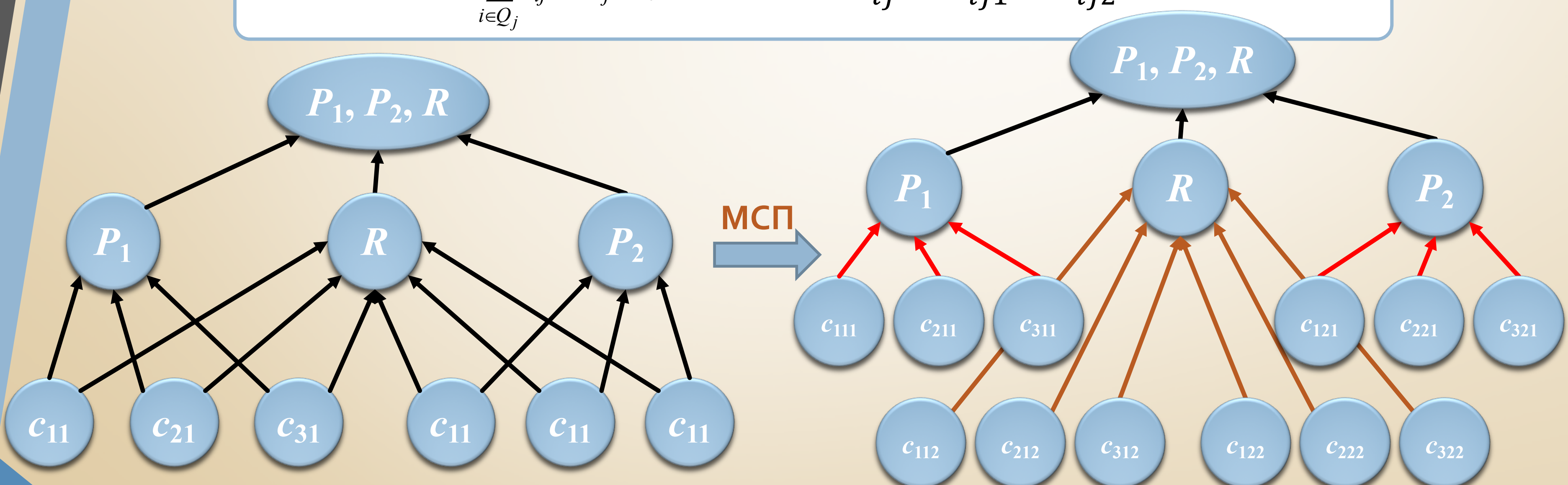
МОДИФИКАЦИИ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ
(не древовидная структура)

$$f(x)=\sum_j c_j x_j \to \max \qquad \varphi(x)=\sum_j a_j x_j \le R \qquad x_j \in \{0;1\}, \quad j=\overline{1,n}$$

Д О П О Л Н И Т Е Л Ь Н Ы Е   О Г Р А Н И Ч Е Н И Я

Выбор нескольких проектов из подмножества

$$\sum_{i\in Q_j} x_{ij} \le P_j, \quad j=\overline{1,m} \qquad c_{ij}=c_{ij1}+c_{ij2}$$



Обобщенная двойственная задача (ОДЗ) – найти такое разбиение c_{ij} на c_{ij1} и c_{ij2}, при котором верхняя оценка будет минимальной.

ЗАДАЧА ВЫБОРА МНОЖЕСТВА ПРОЕКТОВ ПО ВЫПУСКУ НОВЫХ ПРОДУКТОВ

Есть n инновационных проектов (новых продуктов).
y_i – объем финансирования i-го продукта, принятого к разработке

a_i – постоянные затраты на разработку и освоение i-го продукта

ρ_i – рентабельность i-го продукта

C_i – максимальный объем финансирования i-го продукта

D_i – эффект от выпуска i-го продукта

R – величина инновационного фонда

$$D_i(y_i) = \rho_i \max[0; y_i - a_i],$$

$$y_i \le C_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Задача. Определить множество продуктов, принятых к освоению и y_i каждого продукта, так чтобы суммарный доход был максимальным при ограничении на R.

$$D(y) = \sum_{i=1}^{n} D_i(y_i) \to \max$$

$$S(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \le R$$

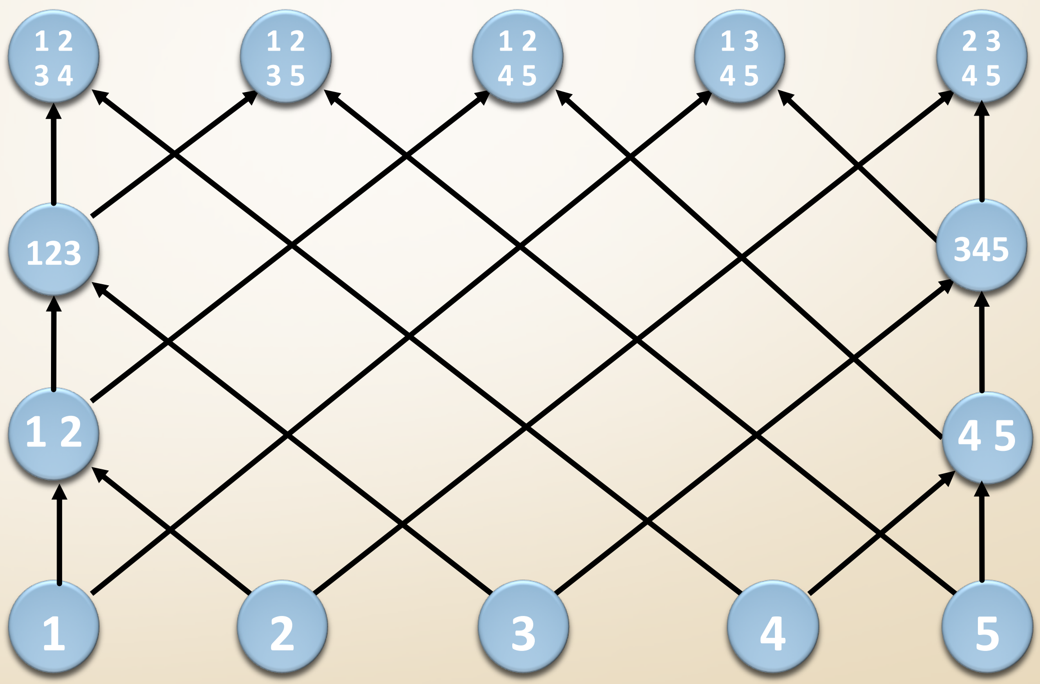
$$0 \le y_i \le C_i$$

Теорема. Существует такое оптимальное решение, при котором все принятые к разработке продукты (за возможным исключением одного продукта) финансируется в максимальном объеме.

Алгоритм

1. Решаем задачи о ранце без продукта 5 и без продукта 1.

2. Для получения решения остальных задач используем уже полученные решения, например для решения задачи без продукта 4 решаем всего одну задачу (для объединенного продукта (1,2,3) и продукта 5).



Всего решается **3(*n*-2)** подзадач, вместо ***n*(*n*-2)** при их независимом решении.

Спасибо за внимание!