УДК 519.86

МЕТОД СЕТЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Бурков В.Н., Буркова И.В.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Москва, Россия. Vlab17@bk.ru, Irbur27@gmail.com

Аннотация: В докладе рассматривается применение метода сетевого программирования к решению задач выбора проектов. Приведены два класса задач. В первом сетевые представления задач имеют вид дерева и метод сетевого программирования дает точное решение. Во втором классе сетевые представления не являются деревом, поэтому метод сетевого программирования позволяет получить верхние оценки на основе решения обобщенных двойственных задач.

Ключевые слова: метод сетевого программирования; метод дихотомического программирования; дерево; задача о ранце, обобщенная двойственная задача

Abstract: The report discusses the application of the network programming method to solving project selection problems. Two classes of problems are given. In the first, network representations of tasks have the form of a tree and the network programming method gives an exact solution. In the second class, network representations are not a tree, so the network programming method allows you to get upper bounds based on the solution of generalized dual problems.

Keywords: network programming method; dichotomous programming method; tree; knapsack problem, generalized dual problem

1. ВВЕДЕНИЕ

В большой класс задач в рамках управления проектами можно выделить задачи выбора проектов (формирование целевых программ, выбор портфеля проектов и подобные, например [1-4] и др.). В свою очередь многие из них сводятся к задаче о ранце и ее модификациям. В связи с этим имеет смысл рассмотреть ее подробнее.

Рассмотрим постановку задачи "одномерный ранец". Имеются n проектов, каждый проект характеризуется весом a_i и ценностью c_i (предполагается, что a_i, c_i целые положительные числа). Имеется также ранец (рюкзак, а в нашем случае – портфель) вместительностью R. Требуется загрузить ранец проектами так, чтобы суммарная ценность помещенных в ранец проектов была максимальной при условии, что суммарный вес не превышает R. Обозначим $x_i = 1$, если i-ый проект помещен в ранец, $x_i = 0$ в противном случае. Математическая постановка задачи имеет вид;

$$f(x) = \sum_j c_j x_j \to \max$$

$$\varphi(x) = \sum_j a_j x_j \le R$$

$$x_j \in \{0;1\}, \quad j = \overline{1,n}$$

Структура сетевого представления задачи является деревом, поэтому метод сетевого или дихотомического программирования дает оптимальное решение [5].

2. ЗАДАЧА ВЫБОРА ПРОЕКТА С СЕТЕВЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ В ВИДЕ ДЕРЕВА

Рассмотрим обобщения задачи, сохраняющие структуру сетевого представления в виде дерева.

Пусть множество всех проектов разбито на m непересекающихся подмножеств Q_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. В каждом подмножестве допускается выбор одного и только одного проекта. Для формальной постановки задачи введем переменные $\{x_{ij}\}$, $i = \overline{1,n_j}$, $j = \overline{1,m}$, принимающие значения 0 или 1. Примем $x_{ij} = 1$, если проект $i \in Q_j$, взят в ранец и $x_{ij} = 0$ – в противном случае. Задача заключается в определении $\{x_{ij}\}$, максимизирующих

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_{ij} \le R \tag{2}$$

$$\sum_{i \in Q_j} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,m} \tag{3}$$

где c_{ij}, a_{ij} – ценность и вес проекта $i \in Q_j$ соответственно.

Другая интерпретация этой задачи состоит в том, что имеются m проектов, но каждый проект имеет n_j модификаций, отличающихся по ценности и по весу. Необходимо выбрать одну модификацию каждого проекта. Структура сетевого представления по-прежнему является деревом.

Рассмотрим еще одно обобщение задачи, когда удается сохранить структуру сетевого представления в виде дерева. Пусть ограничения наложены на суммарный вес проектов j-ой группы, а именно

$$\sum_{i \in Q_j} a_{ij} x_{ij} \le B_j, \quad j = \overline{1,m} \tag{4}$$

Задача заключается в максимизации (1) при ограничениях (2) и (4). Полагаем, что

$$\sum_j B_j > R;$$

в противном случае задача распадается на m несвязанных задач о ранце. В данном случае структура сетевого представления также имеет вид дерева (рис. 1).

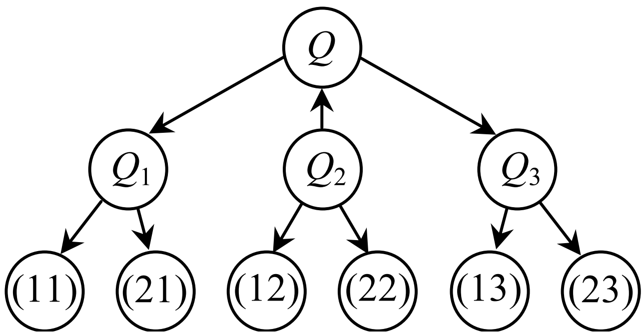

Рис. 1.

Описание алгоритма:

1 шаг. Решаем m задач о ранце следующего вида:

$$\sum_{i \in Q_j} c_{ij} x_{ij} \to \max$$

$$\sum_{i \in Qj} a_{ij} x_{ij} \le B_j$$

Выписываем все Парето-оптимальные варианты для каждой задачи.

2 шаг. Решаем задачу выбора по одному варианту из каждой группы, такие чтобы максимизировать (1) при ограничениях (2), (3).

Пример Имеются шесть проектов, разбитые на две группы: $Q_1 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$; $Q_2 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$. Данные о проектах приведены в табл. 1.

Таблица 1

N	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)
c_i	7	10	12	9	4	6

a_i	2	3	6	5	2	4

Примем $R = 14$, $B_1 = 8$, $B_2 = 10$.

1 шаг. Решаем первую задачу о ранце:

$$7x_{11} + 10x_{21} + 12x_{31} \to \max;$$
$$2x_{11} + 3x_{21} + 6x_{31} \le 8.$$

Приведем результаты решения.

Таблица 2

N	1	2	3	4	5
y_1	0	7	10	17	19
z_1	0	2	3	5	8

Решаем вторую задачу о ранце:

$$9x_{12} + 4x_{22} + 6x_{32} \to \max;$$
$$5x_{12} + 3x_{22} + 4x_{32} \le 10.$$

Приведем результаты решения.

Таблица 3

N	1	2	3	4	5	6	7
y_2	0	4	6	9	10	13	15
z_2	0	2	4	5	6	7	9

2 шаг. Решаем задачу о ранце с вариантами таблиц 2 и 3. Решение приведено в табл. 4.

Таблица 4

19, 8	19, 8	23, 10	25, 12	28, 13	29, 14	–	–
17, 5	17, 5	21, 7	23, 9	26, 10	27, 11	30, 12	32, 14
10, 3	10, 3	14, 5	16, 7	19, 8	20, 9	23, 10	25, 12
7, 2	7, 2	11, 4	13, 6	16, 7	17, 8	20, 9	22, 11
0, 0	0, 0	4, 2	6, 4	9, 5	10, 6	13, 7	15, 9
1 / 2	0, 0	4, 2	6, 4	9, 5	10, 6	13, 7	15, 9

Оптимальное решение соответствует клетке (32, 14). В свою очередь клетке (32, 14) соответствует четвертый вариант из таблицы 2 и седьмой вариант из табл. 3.

Оптимальное решение имеет вид:

$$x_{11} = 1,\ x_{21} = 1,\ x_{31} = 0,\ x_{12} = 1,\ x_{22} = 0,\ x_{32} = 1;$$

суммарная ценность $\Phi = 32$.

Приведем еще одно интересное обобщение. Пусть в задаче (1)–(3) число проектов, которые берутся в ранец, может быть более 1, т. е. ограничения (3) заменим более общими ограничениями.

$$\sum_{i \in Q_j} x_{ij} \le P_j, \quad j = \overline{1, m}$$

В этом случае возможны два подхода. Первый заключается в том, что рассматриваем все возможные сочетания из n_j элементов по S, где $0 \le S \le P_j$. Для каждого такого сочетания определяем его ценность и вес. Если каждое такое сочетание считать некоторым проектом, то задача сводится к задаче (1)–(3). Если число сочетаний невелико, то такой подход является достаточно эффективным.

К сожалению, при больших n_j и P_j метод перебора всех сочетаний становится не эффективным.

3. ОБОБЩЕННАЯ ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим сетевое представление задачи, структура которого уже не является деревом (рис. 2).

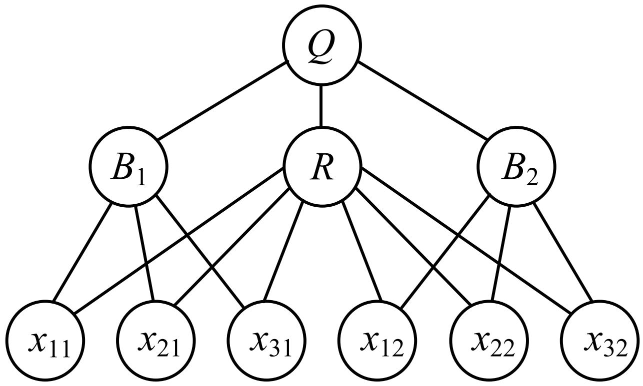

Рис. 2.

Согласно общему подходу для получения оценочных задач разделим каждую из вершин нижнего уровня на две, разделив соответственно и коэффициенты, т. е. представим c_{ij} в виде

$$c_{ij} = u_{ij} + v_{ij} \tag{5}$$

В результате получаем $(m + 1)$ несвязанных задач о ранце. Первые m задач имеют следующий вид.

Определить $\{x_{ij}\}$, $i \in Q$, максимизирующие

$$\sum_{i \in Q_j} u_{ij} x_{ij} \tag{6}$$

при ограничении

$$\sum_{i \in Q_j} x_{ij} \le P_j . \tag{7}$$

Последняя задача имеет вид: максимизировать

$$\sum_{i,j} v_{ij} x_{ij} \tag{8}$$

при ограничении

$$\sum a_{ij} x_{ij} \le R. \tag{9}$$

Обозначим: $\Phi_j(u_j)$ – значения целевых функций в оптимальных решениях задачи (6), (7); $\Phi(v)$ – значение целевой функции в оптимальном решении задачи (8), (9).

Согласно [5] сумма

$$\Theta(v,u) = \Phi(v) + \sum_j \Phi_j(u_j) \tag{10}$$

является оценкой сверху целевой функции исходной задачи.

Обобщенная двойственная задача (ОДЗ) заключается в определении u и v, удовлетворяющих (5) и минимизирующих (10).

Теорема. Существует такое решение ОДЗ, что $u_{ij} = \lambda_j$ для всех $i \in Q_j$, $j = \overline{1,m}$.

Доказательство. Оптимальное решение задачи (6), (7) получается достаточно просто: необходимо взять P_j наибольших значений u_{ij}.

Обозначим $\lambda_j = \min\limits_{i \in S(u_j)} u_{ij}$, где $S(u_j)$ – множество из p_j наибольших значений u_{ij}. Пусть $u_{ij} < \lambda_j$ (следовательно $i \notin S(u_j)$). Увеличим u_{ij} до $u'_{ij} = \lambda_j$. Величина целевой функции задачи (6), (7) не изменится. В то же врем в силу уменьшения v_{ij} целевая функция задачи (8), (9) не увеличится. Пусть теперь $u_{ij} > \lambda_j$. Уменьшим u_{ij} до $u'_{ij} = \lambda_j$. Целевая функция задачи (6), (7) уменьшится на величину (u_{ij}-λ_j), а целевая функция задачи (8), (9) может увеличиться, но не более чем на ту же величину ($u_{ij} - \lambda_j$). В результате целевая функция (10) не увеличится. Теорема доказана.

Целевая функция (10) принимает вид:

$$\Theta(\lambda, v) = \Phi(v) + \sum_j \lambda_j p_j .$$

Заметим, что $v_{ij} = c_{ij} - \lambda_j$, $i \in Q_j$. Поэтому

$$\Theta(\lambda) = \max_{\{x_{ij}\}} \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} - \sum_j \lambda_j \left(\sum_{i \in |Q_j} x_{ij} - P_j \right).$$

ОДЗ заключается в нахождении

$$\min_{\lambda} \max_{x} \left[\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} - \sum_j \lambda_j \left(\sum_{i \in |Q_j} x_{ij} - P_j \right) \right]$$

при ограничении (9).

Фактически мы получили функцию Лагранжа. Таким образом, решение обобщённой двойственной задачи свелось к методу множителей Лагранжа.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены задачи выбора проектов, решаемые методом сетевого программирования. Представляет интерес расширение класса задач, сетевое представление которых является деревом и для которых метод сетевого программирования дает оптимальное решение, а также – задач, для которых решение обобщенной двойственной задачи сводится к методу множителей Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зимин В.В. Формирование функционального объема и рабочих групп ERP-проекта предприятия / Зимин В.В., Митьков В.В., Зимин А.В. // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2017. Т. 60. № 12. С. 998-1004.
2. Гельруд Я.Д. Управление проектами: методы, модели, системы: монография / Я.Д. Гельруд, О.В. Логиновский; под редакцией д.т.н., профессора А.Л. Шестакова. – Челябинск: Издательский центр ЮУРГУ, 2015. – 331 с.
3. Кашенков А.Р. Об использовании метода сетевого программирования при решении некоторых задач дискретной оптимизации / А.Р. Кашенков // В сборнике: Автоматизация и энергосбережение машиностроительного и металлургического производств, технология и надежность машин, приборов и оборудования. материалы 4-й Международной научно-технической конференции. Федеральное агентство по образованию, Вологодский государственный технический университет; ответственный редактор Осипов Ю. Р., Вологда, 2008. С. 198-200.
4. Матвеев А.А., Новиков Д.А., Цветков А.В. Модели и методы управления портфелями проектов. – М.: ПМСОФТ, 2005.
5. Буркова И.В. Метод сетевого программирования в задачах нелинейной оптимизации. – «Автоматика и телемеханика», журнал. 2009. № 10. С. 15-21.